华章数学译丛

30

PEARSON
Prentice
Hall

HZ BOOKS

An Introduction to Dynamical Systems

Continuous and Discrete

动力系统导论

(美) R. Clark Robinson 著
西北大学

韩茂安 邢业朋 毕平 译



机械工业出版社
China Machine Press

动力系统导论

动力系统是非线性科学的重要组成部分，目前已在数学、统计学、物理学、信息与计算科学等领域得到了广泛的应用。本书概括地介绍了动力系统的基础理论知识与基本研究方法。全书分为两部分：第一部分主要介绍非线性常微分方程组的各个方面，第二部分主要介绍与叠函数有关的内容。书中每一章的内容均按照"基本概念+应用+理论与证明+练习"的形式组织，有条不紊，十分适合教学使用。

本书既可作为高等院校相关专业常微分方程定性理论与分支或动力系统课程的教材或教学参考书，又可供专门从事动力系统理论研究的学者和工程技术人员参考。

作者简介



R. Clark Robinson　拥有加州大学伯克利分校博士学位，现为美国西北大学数学系教授。除本书外，他还著有《Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos》一书。

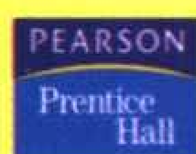
An Introduction to Dynamical Systems

Continuous and Discrete

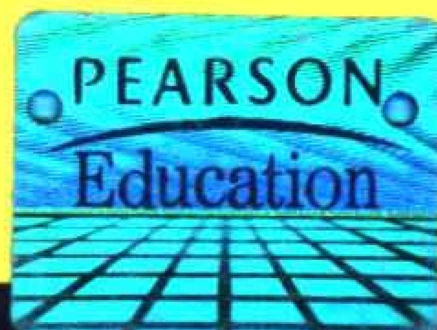


影印版

ISBN 7-111-15913-6
定价：65.00元



www.PearsonEd.com





封面设计·杨宇梅



华章图书

华章网站 http://www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com



ISBN 7-111-19999-5
定价：75.00 元

华 章 数 学 译 丛

30

An Introduction to Dynamical Systems

Continuous and Discrete

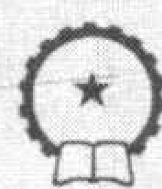


动力系统导论

(美) R. Clark Robinson 著

西北大学

韩茂安 邢业朋 毕平 译



机械工业出版社
China Machine Press

本书概括地介绍了动力系统的基础理论知识与基本研究方法. 全书分为两部分: 第一部分主要介绍非线性常微分方程组的各个方面, 第二部分主要介绍与叠函数有关的内容. 书中每一章的内容均按照"基本概念 + 应用 + 理论与证明 + 练习"的形式组织, 有条不紊, 十分适合教学使用.

本书既可作为高等院校相关专业常微分方程定性理论与分支或动力系统课程的教材或教学参考书, 又可供专门从事动力系统理论研究的学者和工程技术人员参考.

本书版权登记号: 图字: 01-2005-0526

图书在版编目(CIP)数据

动力系统导论/(美)罗宾逊(Robinson, R. C.)著; 韩茂安等译. —北京: 机械工业出版社, 2007.1

(华章数学译丛)

书名原文: An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete

ISBN 7-111-19999-5

Ⅰ.动…　Ⅱ.①罗…　②韩…　Ⅲ.动力系统(数学)　Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 118484 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)
责任编辑: 白红莉　迟振春
北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
186mm × 240mm · 37.75 印张
定价: 75.00 元

凡购本书, 如有倒页、脱页、缺页, 由本社发行部调换
本社购书热线: (010)68326294

译 者 序

动力系统是非线性科学的重要组成部分，研究自然现象随时间演变的极限行为．经过庞加莱(Poincare)、李雅普诺夫(Lyapunov)、伯克霍夫(Birkhoff)等人的奠基和发展，动力系统已成为现代数学的重要分支之一，由此也产生了很多很好的应用数学(比如混沌控制等).

本书根据美国西北大学数学系教授 R. Clark Robinson 所著的《An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete》一书翻译而成．翻译工作历时一年多，其中绝大部分内容是按照原文直译的，有个别之处是在原文的基础上根据译者的知识和理解来确定的．尽管本书是一本数学著作，但书中不仅涉及一些应用模型，而且还含有不少体现作者水平的带有评论性的描述，这些方面自然增加了翻译的难度，译者对这部分内容的理解和翻译可能不完全与作者一致.

本书分两部分介绍动力系统的概念，第一部分讨论非线性常微分方程组有关定性理论和分支的各个方面，第二部分讨论离散动力系统的基本理论．正像本书“前言”所述，本书假定学生已经学过单变量和多变量微积分、线性代数和微分方程导论的课程，可作为高年级本科生和低年级研究生非线性常微分方程或动力系统课程的教材．本书在内容处理上十分注重对概念与思路的解释以及定理与方法的运用，并有比较翔实的细节，因此本书非常适合作为理工科硕士研究生常微分方程定性理论与分支或动力系统课程的教材或主要参考书.

本书的第 1、3、5、9、11 章及第 2 章前两节由邢业朋翻译，第 4、8、10、12 章及第 2 章的后三节由毕平翻译，第 6、7、13、14 章及书末的附录由韩茂安翻译，在每位译者翻译并自我审查后，由韩茂安对全书进行了审查和修改．另外，在翻译和输稿过程中我们还得到了王政教授、博士研究生胡召平和臧红及硕士研究生杨俊敏和赵勇等人的帮助，在此向他们表示感谢．由于时间仓促和水平有限，翻译难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

韩茂安

于 2006 年 9 月

前　　言

本书可作为高年级本科生非线性常微分方程或动力系统课程的教材，书中部分内容也可在低年级研究生课程中讲授. 本书旨在提供计算的范例和方法，同时介绍相关数学概念. 无论是介绍动力系统有关应用的概念还是更带理论性的数学引论的课程，主讲教师均可从本书选材. 进一步的使用说明可参考下列“组织结构”中的有关说明.

本书假定学生选修过单变量和多变量微积分、线性代数和微分方程导论的课程. 多变量微积分中有关偏导数的素材在本书中广泛使用，少数地方还用到多重积分和面积分(见附录 A). 特征值和特征向量是书中用到的线性代数的主要概念，有关线性代数的其他主题请见附录 C. 微分方程基础知识只在本书第一部分用到，我们假定学生能用变量分离法解一阶方程，并了解二阶标量方程解的形式. 选修过微分方程基础课程的学生通常对常系数线性系统(至少有实特征值的情形)比较熟悉，但本书第 2 章重述了部分材料，其中对相图也进行了介绍. 没有选修过微分方程基础课程的学生也能够理解这里介绍的新材料，但需要用额外的努力弥补所缺少的必要背景知识. 最后要提到的是，阅读本书并不要求学生学过实分析或高等微积分的课程. 然而，使用这些课程中的一些术语会带来方便，为此，我们提供了一个有关连续性和拓扑学术语的附录.

组织结构

本书分两部分介绍动力系统的概念，两部分无先后之分：第一部分讨论非线性常微分方程组的各个方面，第二部分讨论叠函数的相关方面. 两部分中任一部分均可用于一学期[⊖]、两学期甚至一学年的课程. 在美国西北大学我们开设了两门课程，一门课程用一学期讲授第一部分，另一门课程用两学期讲授第二部分. 在一学期的微分方程课程中，很难讲授混沌吸引子，甚至不得不略去各章末尾的许多应用实例和证明. 一学期的微分方程也可能从第 9 ~ 11 章选用有关叠函数的题材. 在用本书第二部分的离散动力系统课程中，我们用一学期讲授一维叠函数(第 9 ~ 11 章)的大部分材料. 有关高维叠函数(第 12 ~ 13 章)的材料当然依赖于一维函数的材料，一学期的课程则可以在讲授第 9 ~ 11 章时融入一些高维函数的例子. 最后，第 14 章分形可放在几章之前讲授，分形维可在微分方程课程结束时结合到混沌吸引子的材料中讲授，分形维或叠函数系统的材料可在一维叠函数的课程中讲授.

各章前面几节主要讲解概念，其后一节介绍某些应用，再后面一节是对较难结果的证明和更具理论性的材料. 这种节之间的材料划分带有某种随意性. 例如，有关竞争种群和捕食与被捕食体系的材料就安排在相关章的前面几节之一中，而不是放在各章末的应用部分，因为这些主题是为展现主要方法服务的. 另外，把某些含有较复杂计算和有助于使概念更加清晰的证明放在一些主要节中. 对较长且技巧性较强的证明和进一步的理论探讨分别在每一章的结尾

⊖ 这里是指每学年分为四学期制度中的一学期. ——编辑注

给出.

对于着重从应用出发来讲授动力系统概念的课程，可从本书主要章节选材，不用各章末尾有关应用和包含更多理论材料的几节.

各章应用部分提供动力系统的诱导因素，并说明概念的用处. 这一节的材料并不是后面主要章节的论述所必需的. 这部分材料越多越能加强应用性.

用本书作为教材，教师可以通过舍弃较繁难的证明界定课程的理论水平. 具有较高理论水准的课程可以考虑采用各章后面的大部分证明.

计算机程序

本书并未明确介绍计算机编程问题. 但是，选用的一些习题需要用计算机模拟产生微分方程的相图或叠函数. Sample Maple 电子表格可从网页 http://www.math.northwestern.edu/~clark/dyn-sys 获得，学生对其加以修改可以用来解决一些其他计算问题(有关本书的订正及更新也可通过该网址查到).

有几本用 Maple 和 Mathematica 来讨论动力系统的书，其中两本是 M. Kulenović [**58**]和 S. Lynch [**70**]. J. Polking 和 D. Arnold 的书[**85**]中讨论了用 Matlab 求解微分方程，所用软件包可从 http://www.math.rice.edu/~dfield 获得. H. Nusse 和 J. Yorke 的书[**80**]中有其专门的动力系统软件包.

致谢

我谨对其他几本书的作者深表谢意，我在讲授这一题材时曾用过他们的书，这些书影响了我对题材的理解，特别是在有效地介绍题材方式方面. 我难以一一列出那些同样对我产生影响的更高级的书籍. 关于微分方程部分我用过的参考书有：F. Brauer 和 J. Nohel [**19**], M. Hirsch 和 S. Smale [**51**], M. Braun [**21**], I. Percival 和 D. Richards [**84**], D. W. Jordan 和 P. Smith [**55**], J. Hale 和 H. Koçak [**48**], S. Strogatz [**104**]. 有关叠函数部分我用过的参考书包括：R. Devaney 的两本书 [**31**]和[**32**], D. Gulick[**45**], K. Alligood、T. Sauer 和 J. Yorke [**7**].

还要感谢我读研究生期间指导过我的三位教授：Charles Pugh、Morris Hirsch 和 Stephen Smale，他们把我引领到动力系统这门学科，并教给我许多思想和方法，使我终身受益. 还有我在西北大学的许多同事以不同方式深深影响着我，他们之中有 John Franks、Donald Saari 和 Robert Williams.

下面的审阅人对本书初稿的改进提出了许多宝贵意见和建议，在此我也一并感谢. 他们是：John Alongi (波莫纳学院), Pau Atela(史密斯学院), Peter Bates(伯明翰扬大学), Philip Bayly(华盛顿大学), Roman Grigoriev(佐治亚理工学院), Michael Brin(马里兰大学), Palle Jorgensen(艾奥瓦大学), Randall Pyke(雷尔森大学), Joel Robbin(威斯康星大学), Bjorn Sandstede(俄亥俄州立大学), Douglas Shafer(北卡罗来纳大学夏洛特分校), Milena Stanislavova(堪萨斯大学), Franz Tanner(密歇根理工大学), Howard Weiss(宾夕法尼亚州立大学).

我还要感谢组稿编辑 George Lobell 对这个项目的鼓励，制作编辑 Lynn Savino Wendel 为改进表达的清晰性所提出的建议，Adam Lewenberg 对准备付印的最后电子文档给予的帮助，Julio Ottino 为本书提供封面照片，Miguel Lerma 对解决 LaTex 和图形的各种问题提供的帮助，以及 Marian Gidea 对使用 Adobe Illustrator 和 Kamlesh Parwani 对使用 Maple 电子表格所给予的帮助.

特别要感谢我的妻子 Peggie，她始终如一的宽容、耐心、理解和祝愿，使得本书最终得以完成.

R. Clark Robinson

clark@ math. northwestern. edu

目　录

第二部分 叠函数

历史回顾

微分方程理论历史悠久，可以追溯到大科学家牛顿(Isaac Newton). 古希腊人及后来的哥白尼(Copernicus)、开普勒(Kepler)、伽利略(Galileo)等已经运用运动特性来直接描述行星的运动，比如行星的运动轨道近似为椭圆(或是多个具有不同周期和振幅的环路的组合). 而牛顿另辟蹊径，用作用于行星上的力来描述决定行星运动的力学定律，这些力所产生的效果可以用微分方程来表述. 牛顿发现的基本定律就是，行星运动是由物体间的万有引力决定的，这个力与两物体质量的乘积成正比，与两物体间距离的平方成反比. 用牛顿万有引力定律可以证明，绕太阳运行的行星沿椭圆运动，而其他行星对它的万有引力会使该行星的运动轨迹发生偏移，这正好解释了行星的运动轨迹不是一个标准的椭圆. 在这方面有研究的后继人有欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯(Laplace)、勒让德(Legendre)、泊松(Poisson)、哈密顿(Hamilton)、雅可比(Jacobi)、刘维尔(Liouville)等.

到19世纪末，人们认识到很多非线性微分方程根本没有显式解(explicit solutions)，即便是遵守牛顿万有引力定律的三体运动也有非常复杂的性态，从而无法得到其显式解(例如太阳、地球、月亮的运动轨迹就无法用已知的函数来表示). 虽然短期解(short term solution)可以用幂级数来给出，但这一办法对于长期解(long-term solution)将不再适用. 为解决这一问题，庞加莱(Poincaré)在1880年至1910年期间，把研究工作的重心从寻找显式解转移到探讨解的几何性质上来. 他通过一些具体的例子阐述了自己的许多思想，这些思想成为当今混沌动力系统学科的开端. 特别需要指出的是，庞加莱意识到一个确定性系统(deterministic system)(即该系统所受外力是不改变的，也不是随机的)可以明显地出现随机性态(即混沌).

在1898年，阿达马(Hadamard)给出一个例子，表明曲率恒负的曲面的测地线具有混沌性质. 接下来，伯克霍夫(G. D. Birkhoff)继续庞加莱的工作并发现了很多不同类型的长期极限行为，其中包括本书5.4节和11.1节所阐述的 α 极限集和 ω 极限集. 他的工作总结在书《Dynamical Systems》[**16**]中，而动力系统(Dynamical system)一词则源于此书.

20世纪的上半叶涌现出大量有关非线性振子的研究工作，所谓非线性振子是模拟一组弹力(或其他诸如电力等物理力)的一个方程组，其中恢复力非线性地依赖于离开平衡点的位移. 李雅普诺夫(Lyapunov)等人研究了平衡点的稳定性(参见4.4节和5.3节)；范德波尔(Van der Pol)发现了某些自激系统存在周期轨道(参见6.3节)；安德罗诺夫(Andronov)和庞特里亚金(Pontryagin)证明了微分方程系统在一个吸引平衡点附近是结构稳定的[**8**](即对该微分方程做一个小扰动前后的解是等价的). 此外，包括本迪克松(Bendixson)、Cartwright、Bogoliubov、Krylov、Littlewood、Levinson和Lefschetz在内的一些人开展了非线性微分方程的研究. 所能进行分析研究的解的类型不外乎下面三种：(1)平衡态(静止不动)；(2)周期运动(例如行星运动的首次近似)；(3)拟周期解——它可表示为频率不可公度的几个周期项的组合(参见2.2.3节). 1950年前后，Cartwright、Littlewood和Levinson给出了一个有无穷多个不同周期的受迫非

线性振子模型——考虑这个微分方程系统的初值解，可发现无穷多个不同的初始条件，而由每个初始条件出发将得到一个周期恰好为强迫力频率某一倍数的周期运动，并且不同的初始条件导致不同的周期．这个例子的一些复杂性是以前从未见过的．

在20世纪60年代，斯梅尔(Stephen Smale)转而利用庞加莱首创的思想——从拓扑和几何的角度——来重新审视微分方程的性质，并在1967年发表了一篇影响深远的综述性论文[**98**]．尤其是他所提出的斯梅尔"马蹄"不但把Cartwright、Littlewood和Levinson等人的结果统一到了一个具有一般性的理论框架里，而且推广了这些结果，他还证明了这些结果都是后来所说的混沌现象．之后，一批美国和欧洲的数学家的工作进一步充实了斯梅尔的思想体系，与此同时，在莫斯科一批以阿诺索夫(Anosov)和Sinai为首的数学家也在考虑类似的问题，其中阿诺索夫把阿达马的工作推广到具有负变曲率的流形上之测地线．在1975年，"混沌"(chaos)一词首次由T. Y. Li和J. Yorke提出，并用来刻画比不动点、周期运动、拟周期运动更为复杂的非周期(aperiodic)性态(见[**66**])．一个与"混沌"密切相关的概念——*奇怪吸引子*由Ruelle和Takens引入，与其复杂的运动本质相比，这一概念更强调吸引子在相空间中复杂的拓扑和几何结构[**90**]．这些数学家的理论工作提供了许多思想和方法，并在后来广泛应用于物理学、天体力学、化学、生物学等一些实用性更强的研究领域．

其实，这些思想在物理系统中的运用从未停止过，对行星和恒星的运动的描述和确定这一研究历史悠久的问题就是其中一例．通过数学模型来研究这类运动就称为*天体力学*，这涉及有限个遵守牛顿万有引力的星体．伯克霍夫(Birkhoff)、Siegel、Kolmogorov、Arnold、Moser、Herman等许多人研究了稳定性问题，并发现了出现于天体力学及其他物理系统的复杂行为，其中有些可以用所谓的*哈密顿微分方程*来描述(这类方程能量守恒且可以用能量函数的偏导数来表示)．K. Sitnikov在[**97**]中给出了三个物体在牛顿引力下相互作用而出现混沌震荡的现象，后来，Alekseev指出上述现象可用"斯梅尔马蹄"来解释[**3～5**]，Moser的书[**78**]大大简化了这一结果，并深化了"斯梅尔马蹄"在更多物理系统中的应用．在发表于1971年、引入奇怪吸引子概念的文献[**90**]中，Ruelle和Takens给出了用于解释流体中湍流是如何形成的非线性动力系统的思想和方法．接下来，P. Coullet和C. Tresser在文献[**29**]、Feigenbaum在文献[**37**]中分别发现通向混沌的倍周期路径，进一步显示出非线性动力系统和物理学的密切联系．

此外，相关于一个全新的物理系统，以Belousov和Zhabotinsky在20世纪50年代的工作为起点，相继产生一些出现混沌行为的化学反应数学模型，这些模型的解既不趋向于平衡状态，也不出现可预测的振动现象，最终这种古怪情形被理解为混沌和奇怪吸引子．

2

在20世纪20年代早期，A. J. Lotka[**69**]和V. Volterra[**111**]各自独立地用微分方程建立了反映两个物种数量相互作用的数学模型；到了20世纪70年代早期，May向我们展示了人口动力系统模型是如何产生混沌的，他又在专著[**75**]中阐述了一个简单的非线性数学模型是如何为大量的现象提供数学诠释的．从20世纪70年代开始，非线性动力学在生物数学模型中的应用便日益广泛；由Murray[**79**]和Taubes[**106**]各自编写的大学教材是研究涉及振动或混沌微分方程的一些生物学领域的入门书，而Kaplan和Glass的书[**56**]及Strogatz的著作[**104**]则包括了大量其他方面的应用．

大大影响非线性微分方程的研究的另一个因素是使用计算机来寻找数值解，为了开展这一研究而设计的有效算法当然也层出不穷．尽管书中讨论了一些最简单的算例，但我们更着重于利用计算机模拟来发现解的性质．1963 年 E. Lorenz 用一台计算机研究模拟大气湍流运动的非线性方程，做出了重要的贡献，他发现初始条件的细微变化可以在相对短的时间里导致非常不同的后果，这一性质被称为是*对初始条件的敏感依赖性*，或者是更常说的"*蝴蝶效应*"．后一种叫法源于洛伦兹(E. Lorenz)，他把这一现象形象地解释为澳大利亚的一只蝴蝶拍动一下翅膀就会在一个月后影响到美国的天气．我们在本书第 7 章介绍了他的工作．直到 20 世纪 70 年代洛伦兹的工作才被更注重理论的数学界所熟知，从此数学界就致力于证明洛伦兹关于此类方程的基本思想的正确性．最近，借助于计算机辅助手段，Warwick Tucker 已经证明洛伦兹系统不仅具有对初始条件的敏感依赖性，而且还具有所谓的"混沌吸引子"(详见第 7 章)．几乎与洛伦兹同时，Ueda 发现了范德波尔(Van der Pol)周期受迫系统(或其他非线性振子)具有现在所说的混沌吸引子，此类系统也将在第 7 章加以讨论(或参阅 Ueda 后来出版的著作[**109**])．

大约从 1970 年开始且仍在延续，借助计算机来研究非线性动力系统已经有很多数值研究成果，其中一部分在本书中作为解释某些现象的简单例子加以介绍(例如 7.4 节中关于 Rössler 吸引子的讨论)，另外一部分是自然科学、工程及其他可用非线性微分方程建模的领域中的一些特殊模型．Enns 和 McGuire 在书[**36**]中介绍了许多计算机程序，这些程序可用来研究出现于物理及其他自然科学学科中的非线性函数和非线性微分方程．

总之，20 世纪的后 40 年见证了非线性方法在解决物理问题方面的日益增长的重要性．如今人们通过有关数学理论及其应用方式对一个世纪前由庞加莱提出的许多思想有了更深入的认识．现代动力系统理论在其应用领域最重要的一个贡献在于它揭示了一个简单的模型可以具有复杂古怪的动力学性态，正因为产生了混沌，基本的环境未必含有随机扰动因素．

以下三本书是介绍混沌学发展历程的大众化读物：James Gleick 写的《Chaos：Making a New Science》[**40**]、Ian Stewart 的《Does God Play Dice?，The Mathematics of Chaos》[**102**]以及 Florin Diacu、Philip Holmes 合著的《Celestial Encounters》[**33**]．第一本书最畅销，该书着重于把研究人员的成果与实际应用结合起来，而 Stewart 的书更强调数学家在混沌学发展中的作用，其视角与这本书更为密切．Gleick 的书易于被较多的读者所接受而更加流行，Diacu 和 Holmes 的书《Celestial Encounters》描述了庞加莱的贡献和时至今日的天体力学的发展，其处理别具一格，恰到好处．

3
4

第一部分　非线性微分方程组

第1章　解微分方程的几何方法

在初等微分方程的基础课程中，讨论的重点是线性微分方程．例如，考虑带摩擦的线性调和振子(或有阻尼调和振子)：

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0,$$

其中$\dot{x}$表示$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\ddot{x}$表示$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$m$，$k>0$，$b\geqslant 0$．若令$v=\dot{x}$，则$m\dot{v}=m\ddot{x}=-kx-bv$，该方程可改写为只含有一阶导数的方程组：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=v\\ \dot{v}&=-\frac{k}{m}x-\frac{b}{m}v.\end{aligned}\tag{1.0.1}$$

用矩阵形式表示，即

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}.$$

当$b=0$时，该方程组的一个显式解为

$$\begin{aligned}x(t)&=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\\ v(t)&=-\omega A\sin(\omega t)+\omega B\cos(\omega t),\end{aligned}$$

其中$\omega=\sqrt{k/m}$，A，B为任意常数，这些解都是以$2\pi/\omega$为周期的周期解．见图1.0.1.

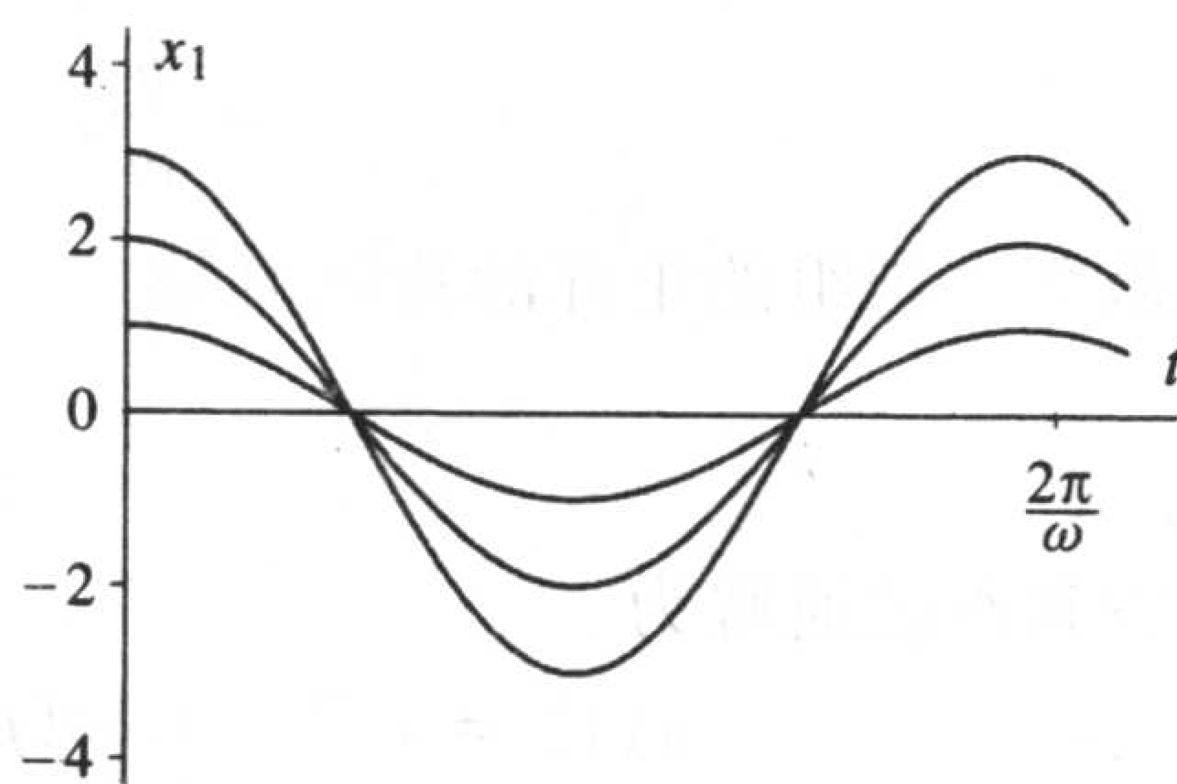


图1.0.1　线性调和振子的解：x看作t的函数

理解$b=0$时方程的解的另一方法是寻求这个方程组所守恒的能量．若方程$\dot{v}+\omega^2x=0$两边同乘以v，则有

$$v\dot{v}+\omega^2x\dot{x}=0.$$

方程左端恰为函数

$$E(x,v)=\frac{1}{2}v^2+\frac{\omega^2}{2}x^2,$$

关于t的导数，因此函数$E(x, v)$沿方程的解恒等于常数．该运动的积分(integral of motion)清楚地表明方程的解在由E的水平集确定的(x, v)平面的椭圆上运动．$(x, v)=(0, 0)$是一个不

动点或平衡点，其他解在绕原点的椭圆形轨道上周期性地运动．对这个线性方程而言，所有的轨道形状相同，周期相同(与轨道的大小无关)：我们称它的局部行为和全局行为是一致的．见图 1.0.2.

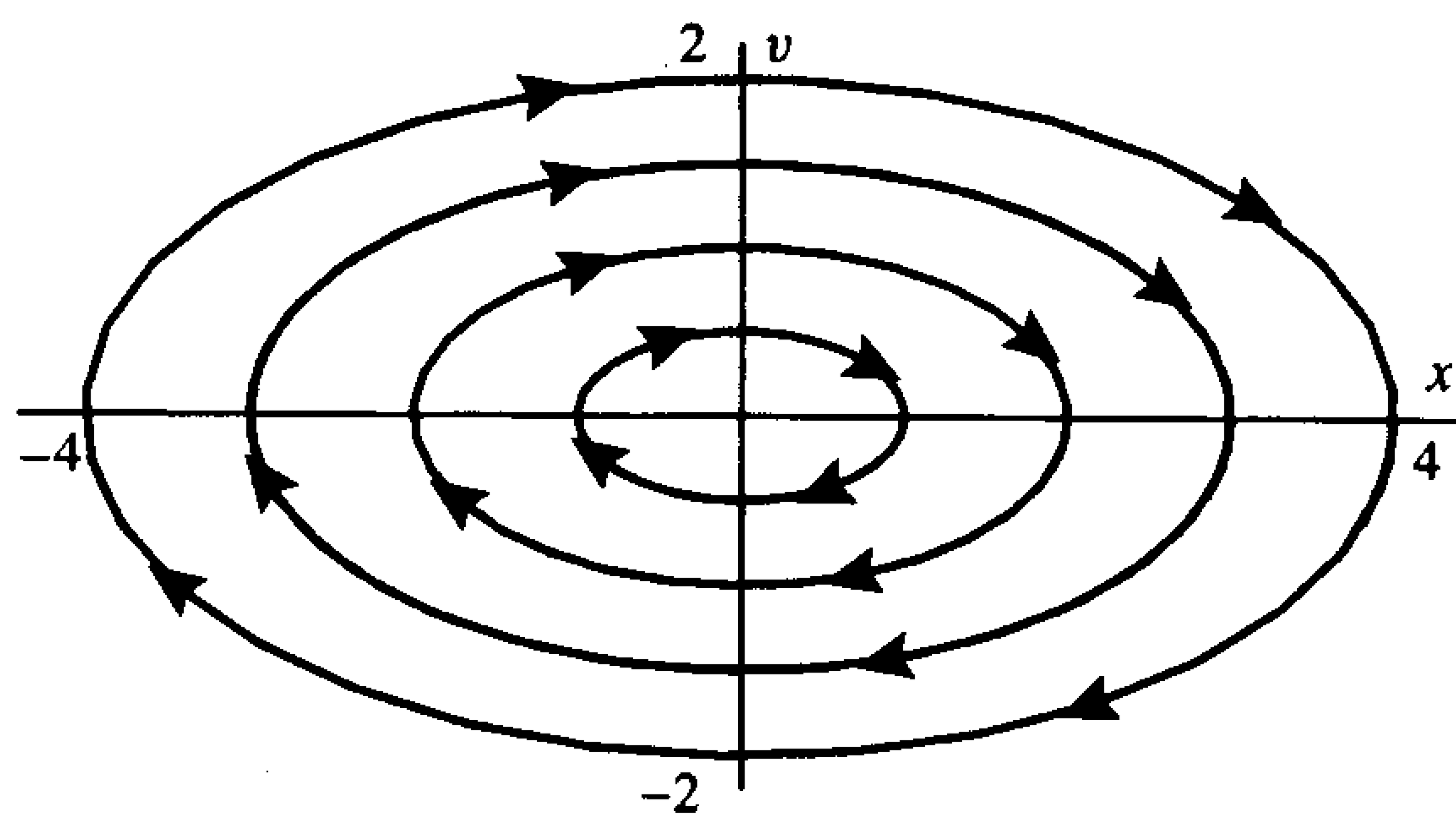


图 1.0.2 $(x,\ v)$平面上线性调和振子的解

为方便今后表述，称点 $\boldsymbol{x}^*$ 为微分方程组$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的不动点当且仅当 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$. 始于一个不动点的解有零速度，所以它保持不动．因此，若 $\boldsymbol{x}(t)$是满足条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^*$ 的解，则对所有的 t，$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$ 恒成立．这种所受外力为平衡力且保持不动的点在习惯上称为平衡点．

设 $\boldsymbol{x}(t)$是微分方程组$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^*$ 的解，若存在 $T>0$ 使得 $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}^*$ 且 $\boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{x}^*$，$0<t<T$，则称点 $\boldsymbol{x}^*$ 关于系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$是周期的，$T$ 称为周期或最小周期．显然对任意 t，$\boldsymbol{x}(t+T) = \boldsymbol{x}(t)$成立(即经过 T 单位的时间后 $x(t)$将自动重复)．点集$\{\boldsymbol{x}(t):\ 0\leq t\leq T\}$称为周期轨道．

由微分方程组的解所决定的$(x,\ v)$平面上的曲线集是相图的一个例子，相图的使用贯穿于全书；相图可帮助我们从图像(或几何)的角度来理解微分方程的解．特别地，对于非线性方程和无法得到解析解的方程而言，利用解的图像这一点非常重要．除了前面讲的使用能量函数来确定非线性方程的相图外，有时我们还利用其他几何方法，例如在 4.3 节介绍的零等倾线法．此外，也用数值方法来画相图．

8

下面我们考虑 $b>0$ 时的情形，令

$$c = \frac{b}{m},\quad \omega^2 = \frac{k}{m},\quad \mu = \sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}},$$

则该微分方程组的矩阵的特征值是

$$\lambda = -\frac{c}{2} \pm \mathrm{i}\mu,$$

从而方程组的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-ct/2}\left[A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)\right] \\ v(t) &= \mathrm{e}^{-ct/2}\left[-\left(A\mu + \frac{Bc}{2}\right)\sin(\mu t) + \left(B\mu - \frac{Ac}{2}\right)\cos(\mu t)\right]. \end{aligned}$$

在这种情形下了解解的性质的另一种方法是用“能量函数”

$$E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2,$$

这个函数在 $b=0$ 时是守恒的．若 $b>0$，则 $c>0$，从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x,v) = v\dot{v} + \omega^2 x\dot{x} = v(-cv-\omega^2 x) + \omega^2 xv = -cv^2 \leqslant 0.$$

这表明该系统的能量是不增加的，利用李雅普诺夫函数一节中的简单讨论可知，系统的所有解都趋向位于坐标原点的不动点．此处实值函数 $E(x,v)$ 的使用更多地是从几何角度来证明原点是吸引的(attracting)．

方程组(1.0.1)是线性的，而我们考虑的大部分方程都是非线性的．单摆

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta)$$

就是一个简单的非线性方程的例子，若令 $x=\theta$，$v=\dot{\theta}$，则得到方程组

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{g}{L}\sin(x).$$

对此非线性微分方程组，很难求出其显式解．而我们可以用刚才使用过的"能量法"来探寻其解的性质．做类似于前面的求导运算，我们发现函数

$$E(x,v) = \frac{v^2}{2} + \left(1 - \frac{g}{L}\cos(x)\right)$$

沿着方程组的解是一个常数．就像对线性情形的讨论一样，可知方程组的解在函数 E 的等位线上运动，因此，这些等位线的集合决定了解的运动路径．我们不加证明地在图 1.0.3 中给出了等位线集的图像，在 5.2 节中我们还会返回来更详细地讨论这个例子．见例 5.2.3.

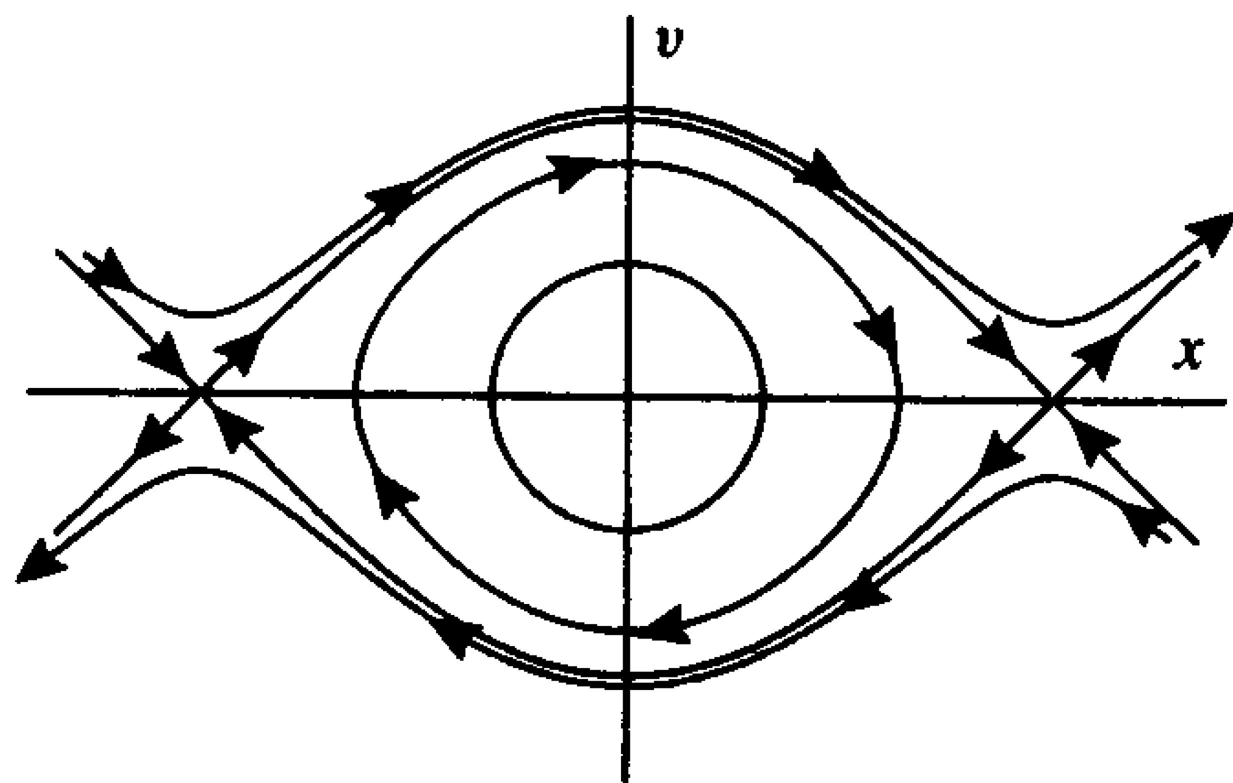


图 1.0.3 单摆的能量等位线集合

方程组有三个不动点 $(x,v)=(0,0)$，$(\pm\pi,0)$，原点附近的解是周期的，但远离原点的解或者关于 x 单调增加，或者关于 x 单调减小(即非周期的)．我们可以利用相平面(即 (x,v) 平面)中的等位线和轨线来获得解的信息．

9

如此简单的非线性方程就演示出线性方程与非线性方程之间的一些差别．首先，对于 $b=0$ 时的线性调和振子来说，不动点附近的局部行为决定了它所有解的行为；而对于单摆而言，在原点附近有周期轨道，在远离原点的地方也同时存在非周期轨道．其次，线性系统若有周期轨道，则它们的周期必相同；而单摆轨道的周期可以不同，图 1.0.4 给出了它的三个周期解的时距曲线图，依图可知，周期是随振幅而变化的．最后，在 2.2 节我们给出了求线性微分方程组显式解的方法；另一方面，我们不能用一个简单方法来解单摆方程，能量法只是给出解的几何信息，而不能给出显式解．

我们还讨论其他典型例子，研究既是竞争关系又是捕食与被捕食关系的两个物种的数量变化的模型就是其中之一，此外还有范德波尔振子，它有唯一的周期轨道，且其他解都趋于这个

周期轨道，参见图 1.0.5 和 6.3 节．基本上可以认为含有两个未知量的非线性微分方程组解的结构不会比上面提及的例子更复杂，详见庞加莱-本迪克松定理 6.2.2 的讨论．

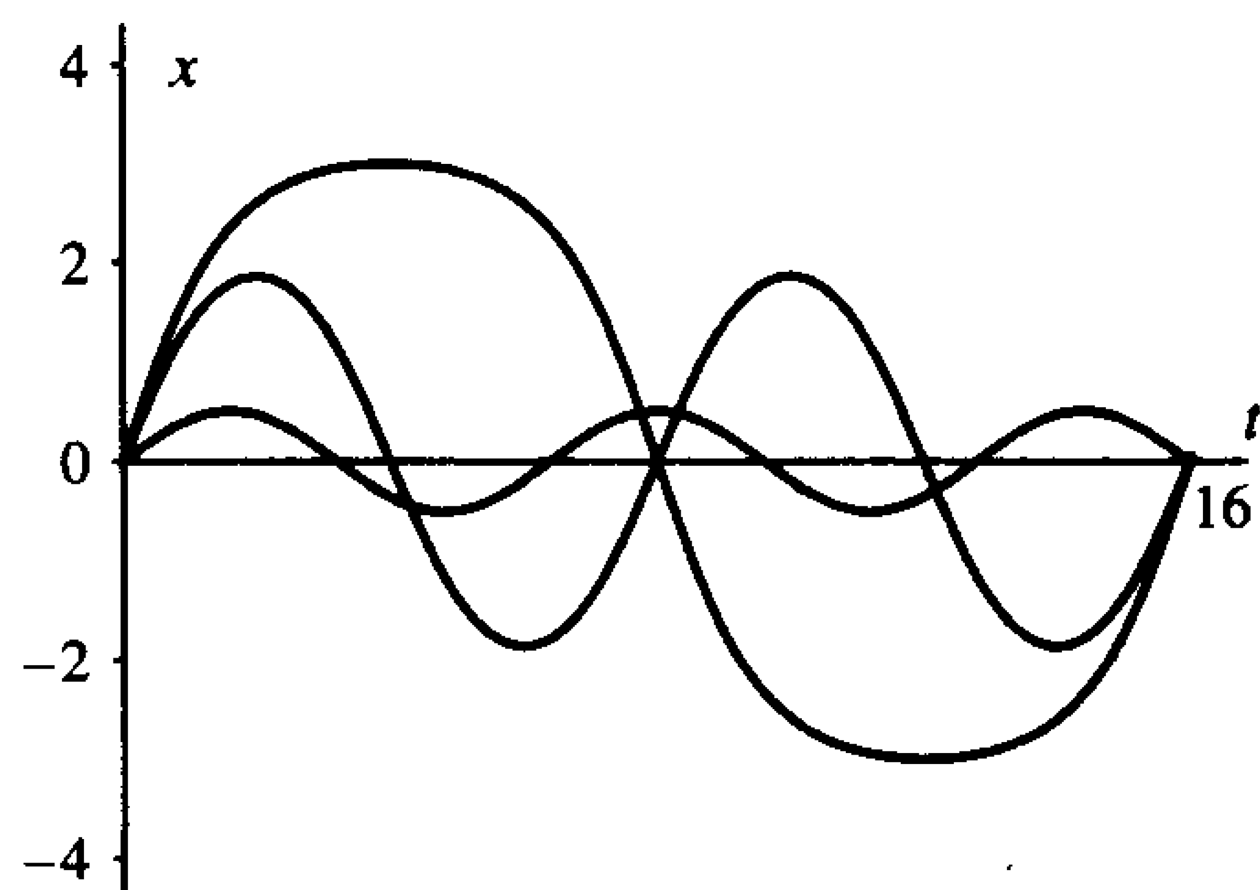


图 1.0.4 单摆解的时距曲线图表明振幅不同周期就不同

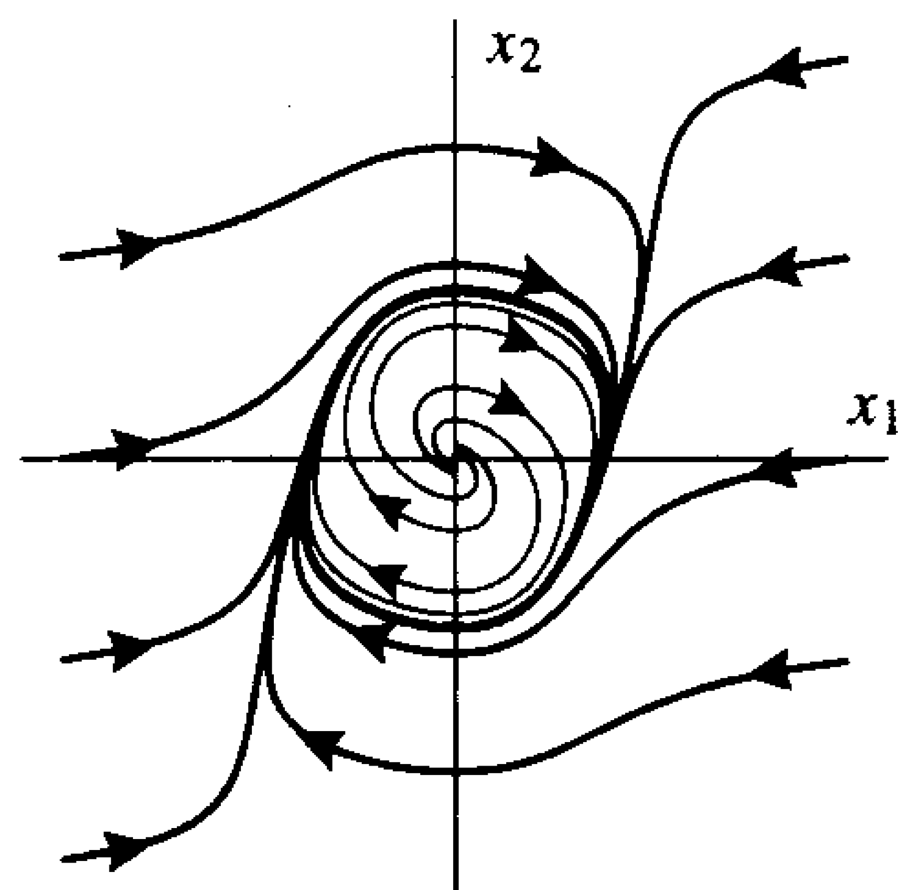


图 1.0.5 范德波尔振子的相图

在三维或更高维情形中，存在更复杂的带有明显“混沌”行为的系统，这些行为看似随机，但实际上是由某个显式形式的非线性方程所决定的．

不管从哪个方面讲，这些行为显然既不是周期的也不是拟周期的，它是非周期的（aperiodic）．这样的一个例子就是洛伦兹方程组

$$\dot{x} = -10x + 10y$$
$$\dot{y} = 28x - y - xz$$
$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy.$$

它的具相近初始条件的两条轨线会分得很开．这个方程组被称为是对初始条件有敏感依赖性．在图 1.0.6 中两个从原点附近出发的解交织在一起，经过较长一段时间后，这些解的运动轨迹将会填满一个三维空间中的模糊曲面（像堆叠的非常紧密的一摞床单）．尽管方程是确定性的，但结果却出现明显的随机性和混沌现象，该类型的方程将在第 7 章加以讨论．非线性方程可能会出现混沌现象这一点是它与线性方程更重要的一个区别．

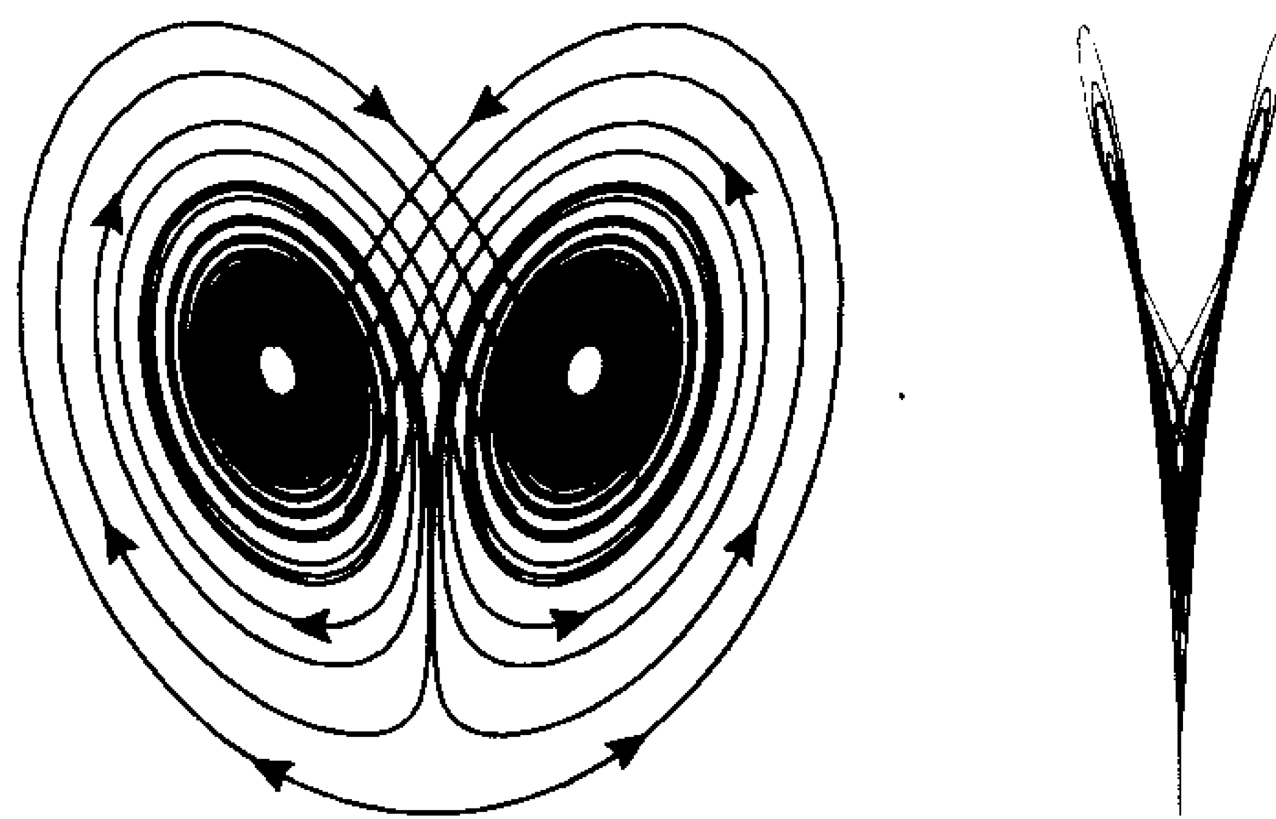


图 1.0.6 洛伦兹吸引子的两个不同视角的图像

最后，我们特别指出几种可能出现的微分方程解的时距曲线图的不同之处．图 1.0.7a 中的轨道趋向于一个常数（即趋向于不动点）；图 1.0.7b 中的周期轨道在经过一段固定长度的时间后自动重复；图 1.0.7c 中的轨道是我们所说的拟周期轨道，它是不同周期的两个函数相加而得到的，因此，永远不会完全重复（详见 2.2.3 节）；图 1.0.7d 包含一条混沌轨道，在 7.2 节有它的精确定义，可以从图中看出，不同类型振动的时间跨度没有明显的规律可循．

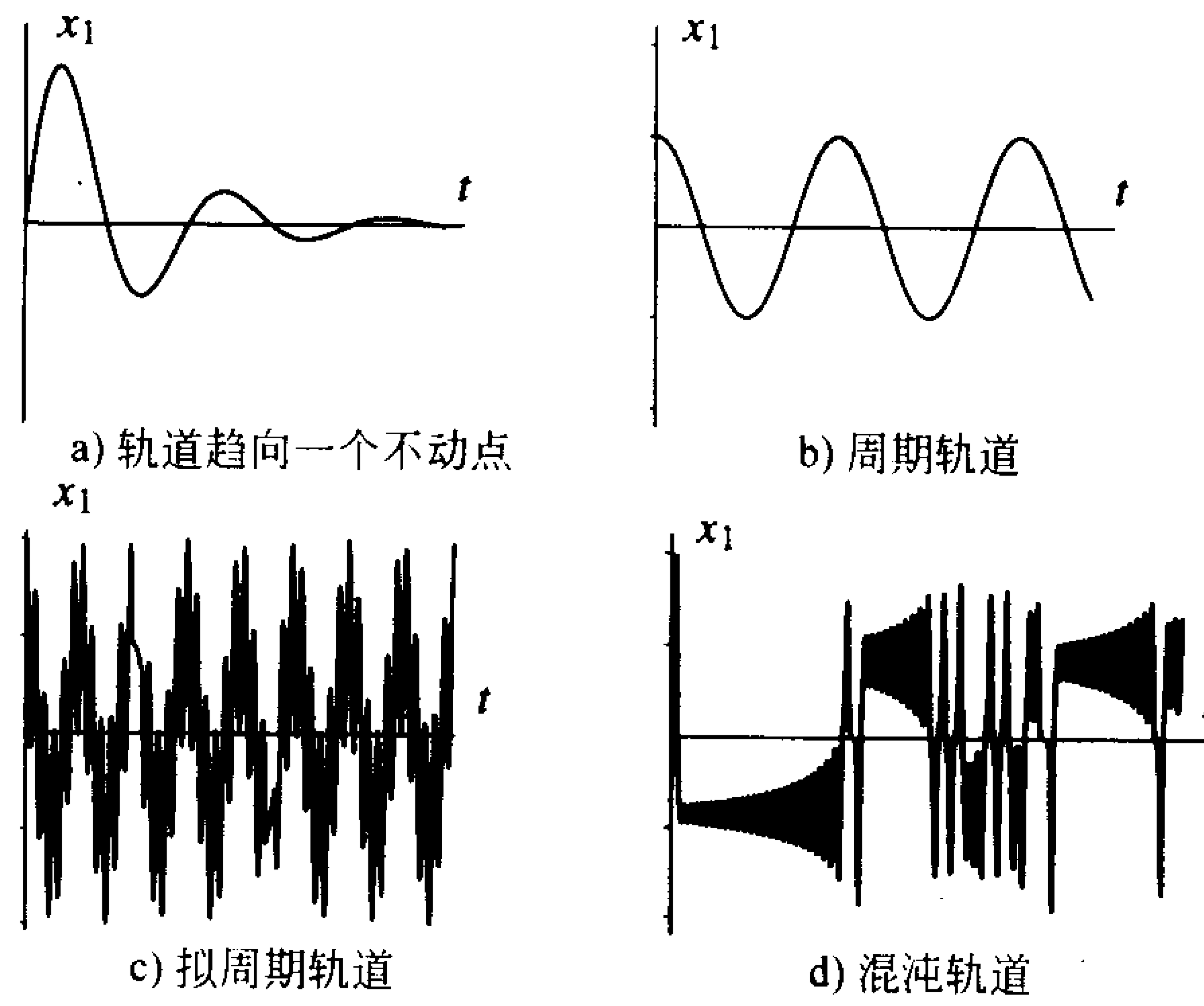


图 1.0.7　一个位置变量的时距曲线图

12

第2章 线性系统

在微分方程基础课程中，二阶线性微分方程

$$\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

经常作为考虑带摩擦力的线性弹簧模型出现，此处$\dot{x}$表示$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\ddot{x}$表示$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，这种记法将贯穿全书.要研究该模型的运动情况，必须知道即时位置x和即时速度$\dot{x}$，考虑到这两个量决定了整个运动过程，所以我们选取它们为坐标轴来建立坐标系；记$x_1 = x$，$x_2 = \dot{x}$，这样，方程就可以改写为一阶微分方程组表示的线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -kx_1 - bx_2,\end{aligned}$$

其矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -k & -b\end{bmatrix}\boldsymbol{x},$$

其中$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}$表示一个向量.

在这一章中，我们将讨论含有n个未知量的常系数线性微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n\\ \dot{x}_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n,\end{aligned} \tag{2.0.1}$$

其中，$a_{i,j}$是实数. 用矩阵表示，就是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{2.0.2}$$

这里$\boldsymbol{A}$是以上述实数$a_{i,j}$为元素的$n\times n$阶矩阵，$\boldsymbol{x}$是$\mathbb{R}^n$中的(列)向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

其中，$(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$表示行向量的转置，它产生一个列向量.

有时我们还研究系数为$a_{i,j}(t)$的线性系统，此时$\boldsymbol{A}(t)$是时间t的函数，这样便得到依赖于时间的线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{2.0.3}$$

这种形式的方程是可能出现的，事实上，如果弹簧的弹性系数被某种形式的外部因素所控制，则会导出如下形式的方程：

$$\ddot{x} + k(t)x = 0, \tag{2.0.4}$$

其中 $k(t)$ 是关于 t 的已知函数. 在本书中，这类方程主要出现于沿非线性系统的某一解的"线性化". 见第一变分方程定理 3.1.10.

在微分方程课程刚开始讨论二阶标量方程时，只要找到它的两个线性无关的解就足够了，因为所有解都可写成这两个解的线性组合. 例如，对方程(2.0.4)来说，它的两个线性无关解是 $e^{-bt/2}\cos(\omega t)$ 和 $e^{-bt/2}\sin(\omega t)$，其中 $\omega^2 = k - b^2/4$. 在 2.1 节，我们将证明对于 n 个未知量的线性系统需要找到 n 个线性无关的解，且其他解都可以经过这 n 个解进行线性组合而得到，从而它们构成一个基本解集. 在 2.2 节，我们将讨论如何求出系数不依赖于时间的线性系统(即**常系数线性系统**(linear systems with constant coefficients)的显式解的办法，同时，我们还将引入微分方程的相图概念；在 2.2.3 节，我们将给出由 4 个未知函数组成的线性方程组的例子，这个例子中的用正弦和余弦函数表示的解有两个不同的频率，从而引出了拟周期解的概念. 在 7.2 节将定义混沌集，我们需要一个绕行整个集合的轨线，这个轨线既不是周期的也不是拟周期的. (原因在于，即使拟周期运动很复杂，但它看来也不是随机的.)最后，2.3 节将考虑带有"强迫向量"的线性方程组，即非齐次线性系统，这类系统在后面还会多次提及：(1)在4.7 节将证明在该系统不动点附近，线性项控制了高阶项；(2)给出庞加莱映射一例(详见 6.7 节)；(3)给出李雅普诺夫指数的计算之例(详见 7.6 节).

2.1 基本解集

在 2.2 节，我们将给出求解常系数线性微分方程组的方法. 这一小节主要证明对于含有 n 个未知量的线性系统，我们需要找到它的 n 个线性无关的解，而且这些解的线性组合仍是方程的解，在本小节的最后我们还将指出对于常系数线性微分系统可用矩阵指数给出它的一个解析的但不是很容易计算的解. 2.2 节还将说明矩阵指数可用以求解有重特征值的常系数线性微分系统.

14

我们先给出依赖时间的线性微分系统的一些定义，而不依赖时间的情形——方程(2.0.2)的相关定义与依赖时间的情形在本质上是相同的.

方程的解

若函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 在某个开区间($\boldsymbol{A}(t)$ 的定义区间)上有定义且满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),$$

则称它为方程(2.0.3)的解，又若它满足 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$，则称它满足**初始条件** $\boldsymbol{x}_0$.

解的线性组合

设 $\boldsymbol{x}^j(t)$ 是方程(2.0.3)的解(定义在相同区间上)，c_j 属于实数或复数，其中 $j = 1, \cdots, k$. 利用微分和矩阵乘法的定义可知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k(t)) &= c_1\dot{\boldsymbol{x}}^1(t) + \cdots + c_k\dot{\boldsymbol{x}}^k(t)\\ &= c_1\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}^k(t)\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{A}(t)(c_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k(t)),$$

从而线性组合 $c_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{x}^k(t)$ 仍是解，因此，解的线性组合仍是解.

矩阵解

对于含有 n 个未知量的线性系统，只要找到它的 n 个线性无关的解就足够了，为说明这一点，我们引入解矩阵和朗斯基行列式(Wronskian)的概念. 如果 $\boldsymbol{x}^j(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 都是方程组(2.0.2)或(2.0.3)的解，那么以它们为列向量构造如下矩阵

$$\boldsymbol{M}(t) = (\boldsymbol{x}^1(t), \cdots, \boldsymbol{x}^n(t)).$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t) = (\dot{\boldsymbol{x}}^1(t), \cdots, \dot{\boldsymbol{x}}^n(t)) = (\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}^1(t), \cdots, \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}^n(t))$$

$$= \boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{x}^1(t), \cdots, \boldsymbol{x}^n(t)) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{M}(t),$$

其中第三个等号用到了矩阵的乘法(即矩阵各列的公因子可以提出来). 因此，矩阵 $\boldsymbol{M}(t)$ 满足该方程.

设 $\boldsymbol{M}(t)$ 是任意一个 $n \times n$ 阶矩阵，若它满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{M}(t),$$

则称之为方程的*矩阵解*. 令 $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_n)^{\top}$ 为一列向量，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c},$$

$\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n(t)$ 是方程的向量解. 当 $t = 0$ 时，则有

$$\boldsymbol{M}(0)\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{x}^1(0) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n(0).$$

特别地，若取 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}^j$，这里 $\boldsymbol{u}^j$ 表示第 j 个分量取 1 其他分量取 0 的 n 维列向量，则 $\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{u}^j =$ 15 $\boldsymbol{x}^j(t)$ 正是 $\boldsymbol{M}(t)$ 的第 j 列，从而是方程的一个解. 我们用一个定理来概括上述讨论.

定理 2.1.1　*设 $\boldsymbol{x}^j(t)$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 是方程(2.0.3)的解.*

(a) 若 c_j $(j = 1, \cdots, k)$ 是实数或复数，则 $\sum_{j=1}^{k} c_j\boldsymbol{x}^j(t)$ 也是(向量)解.

(b) $\boldsymbol{M}(t) = (\boldsymbol{x}^1(t), \cdots, \boldsymbol{x}^k(t))$ 是矩阵解.

(c) 若 $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_k)^{\top}$ 是一个常向量，$\boldsymbol{M}(t)$ 是一个 $n \times k$ 矩阵解，则 $\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c}$ 是(向量)解.

(d) 若 $\boldsymbol{M}(t)$ 方程(2.0.3)的矩阵解，则它的每一个列向量都是方程的解.

朗斯基行列式与解的线性无关性

设 $\{\boldsymbol{v}^j\}_{j=1}^{n}$ 是一组向量，当它们的线性组合等于零向量时，即

$$c_1\boldsymbol{v}^1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{0},$$

必有 $c_j = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$，则称这组向量是线性无关的. 又若 $\{\boldsymbol{v}^j\}_{j=1}^{n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一组向量，则它们线性无关当且仅当

$$\det(\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^n) \neq 0.$$

若 $\{\boldsymbol{v}^j\}_{j=1}^{n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组线性无关的向量，则对 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{x}^0$ 都存在一组数 $y_1, \cdots, y_n$ 使得

$$\boldsymbol{x}^0 = y_1\boldsymbol{v}^1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}^n.$$

正因如此，任何一组线性无关的 n 维向量 $\{\boldsymbol{v}^j\}_{j=1}^n$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基(basis).

设 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{M}(t)$ 是(2.0.2)或(2.0.3)矩阵解，则行列式

$$W(t) = \det(\boldsymbol{M}(t))$$

称为是线性系统的朗斯基行列式. 设 $\boldsymbol{M}(t)$ 是满足条件 $W(0)=\det(\boldsymbol{M}(0))\neq 0$ 的 $n\times n$ 矩阵解，则对任一向量 x_0，以 $\boldsymbol{c}$ 为未知量的方程 $\boldsymbol{M}(0)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}_0$ 必有解，不妨设为 $\boldsymbol{c}$，这样便得到(2.0.2)或(2.0.3)的满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c}$. 由线性代数的知识可知对任一初始值 $\boldsymbol{x}_0$，要使得方程 $\boldsymbol{M}(0)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}_0$ 有解，就必须知道(2.0.2)或(2.0.3)的 n 个解. 结合以上分析，我们给出如下定义，方程的 n 个解 $x^1(t)$，…，$x^n(t)$ 称为是线性无关，如果与它们对应的矩阵解满足 $\det(\boldsymbol{M}(0))\neq 0$；如果这 n 个解是线性无关的则称对应的矩阵 $\boldsymbol{M}(t)$ 为**基本矩阵解**(fundamental matrix solution)，解集 $\{\boldsymbol{x}^1(t),\cdots,\boldsymbol{x}^n(t)\}$ 称为是**基本解集**.

在本小节的最后一部分，我们将给出 $W(t)$ 随时间 t 变化的公式，并将证明如果 $W(t)$ 在某一点处不为零，则它恒不等于零.

解的存在性

在 2.2 节，我们将构造常系数线性方程组的解，结合对其基矩阵解的讨论可知，对任意的初始值 $\boldsymbol{x}_0$，方程都存在一个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$. 对于依赖时间的线性系统的解，不能通过上述构造法得到，但可以由非线性微分方程解的存在与唯一性定理 3.1.6 推出来. 还有其他较简单的方法来证明依赖时间的线性系统的解的存在性问题，详略.

解的唯一性

解的唯一性可直接由非线性微分方程解的存在与唯一性定理 3.1.6 得到，我们在 2.5 节给出了一个基本的证明.

定理 2.1.2 *设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，它的元素都是 t 的连续函数，则对任意的 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，(2.0.3)存在唯一解 $\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 满足 $\boldsymbol{x}(0;\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$.*

16

指数形式的基矩阵解

对于常系数线性系统——方程(2.0.2)来说，通常用矩阵指数给出它的一个矩阵解(当 $t=0$ 时，这个矩阵指数等于单位矩阵). 矩阵指数很难计算，但作为一个概念上的解它的用处很大，还可以用它来推导特征值是重根时解的形式. 在下一节，我们将利用特征值和特征向量的方法来求方程的解.

对标量方程 $\dot{x}=ax$，它的解是 $x(t)=x_0e^{at}$，其中 x_0 是任意常数. 受此启发，对于常系数方程(2.0.2)，考虑它形如 e^{At} 的矩阵解，这将牵涉到求一个矩阵的指数的问题，该如何定义矩阵的指数呢? 我们知道指数函数可表示成一个幂级数，我们就定义

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + t\boldsymbol{A} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}\boldsymbol{A}^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\boldsymbol{A}^n.$$

其中 $\boldsymbol{A}^n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂，不必担心该矩阵级数的收敛性问题，实际上，考虑到 $n!$ 位于通项的分母上，则该级数是收敛的. 可以证明在上式中关于 t 逐项求导，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t} = 0 + \boldsymbol{A} + \frac{t}{1!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^n + \cdots$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \cdots\right) = A(e^{At}).$$

因为 $e^{A0} = I$，所以 e^{At}是方程(2.0.2)满足条件 $x(0) = I$ 的基矩阵解.

若 $\boldsymbol{v}$ 是任一向量，则 $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{v}$ 是满足 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{v}$ 的解.

另一方面，假设$\{\boldsymbol{x}^{(j)}(t)\}_{j=1}^{n}$是方程的一个基本解集(参见下一节)，令 $\boldsymbol{M}(t)$是对应的基矩阵解，定义

$$\tilde{\boldsymbol{M}}(t) = \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(0)^{-1}.$$

则当 $t = 0$ 时，则有$\tilde{\boldsymbol{M}}(0) = \boldsymbol{M}(0)\boldsymbol{M}(0)^{-1} = \boldsymbol{I}$. 因为是用 $\boldsymbol{M}(0)$的逆矩阵右乘 $\boldsymbol{M}(t)$，所以乘积仍是矩阵解. 又

$$\tilde{\boldsymbol{M}}'(t) = \boldsymbol{M}'(t)\boldsymbol{M}(0)^{-1} = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}(t)]\boldsymbol{M}(0)^{-1} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{M}}(t).$$

结合解的唯一性，可知$\tilde{\boldsymbol{M}}(t) = e^{At}$. 因此，可以通过任何一基本解集计算出矩阵指数 e^{At}.

特殊情况下，可直接计算 e^{At}. 首先考虑对角矩阵

17

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix},$$

且有

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} at & 0 \\ 0 & bt \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} a^2t^2 & 0 \\ 0 & b^2t^2 \end{bmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} a^nt^n & 0 \\ 0 & b^nt^n \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix}.$$

一般地，对任意的对角矩阵，矩阵的指数是对角矩阵且对角线上的元素都是指数函数.

另一个可直接计算的简单例子是反对角矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^3 = \begin{bmatrix} 0 & \omega^3 \\ -\omega^3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^4 = \begin{bmatrix} \omega^4 & 0 \\ 0 & \omega^4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^5 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^5 \\ \omega^5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{2n} = \begin{bmatrix} (-1)^n\omega^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n\omega^{2n} \end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{B}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n+1}\omega^{2n+1} \\ (-1)^n\omega^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

写出级数，合并偶数项和奇数项，可得

$$
\begin{aligned}
e^{Bt} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} -\omega^2 t^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix} \omega^4 t^4 & 0 \\ 0 & \omega^4 t^4 \end{bmatrix} + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(2n)!}\begin{bmatrix} (-1)^n \omega^{2n} t^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n \omega^{2n} t^{2n} \end{bmatrix} + \cdots \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & -\omega t \\ \omega t & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & \omega^3 t^3 \\ -\omega^3 t^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{bmatrix} 0 & -\omega^5 t^5 \\ \omega^5 t^5 & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(2n+1)!}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n+1} \omega^{2n+1} t^{2n+1} \\ (-1)^n \omega^{2n+1} t^{2n+1} & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

再讨论系数矩阵是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与反对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和的情形，显然 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 关于乘法是可交换的，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，在此条件下可证明 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$，详见定理2.5.6（若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是不可交换的，则上面公式不成立）．因此 [18]

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{bmatrix} a & -\omega \\ \omega & a \end{bmatrix}t} = e^{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}t} e^{\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}t} &= \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \\
&= e^{at}\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

只有对非常特殊的"标准型"矩阵，例如上面讨论的 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，矩阵指数才能直接计算出来．对于一般形式的矩阵，下一节中将给出计算其矩阵指数的另一种方法——利用特征值与特征向量求常系数线性方程组的解．

依赖于时间的朗斯基行列式的变分公式

下面的定理表明，如果在某一点 t_0 处 $W(t_0)\neq 0$，则 $W(t)$ 处处不等于零，其中关于 $W(t)$ 的表达式称为刘维尔公式(Liouville formula)，该公式中朗斯基行列式表示成(2.0.2)右端矩阵的迹——$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(s))$的积分的指数函数．该定理的证明放在本章的最后一节，在后面还将用微积分的散度定理给出另一种证法．

定理 2.1.3(刘维尔公式)　*设 $\boldsymbol{M}(t)$ 是线性系统(2.0.2)或(2.0.3)的基矩阵解，$W(t)=\det(\boldsymbol{M}(t))$是朗斯基行列式，则*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(t))W(t)$$

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(s))\,\mathrm{d}s\right),$$

其中 $\exp(z)=e^z$ 是指数函数．特别地，如果在某一点 t_0 处 $W(t_0)\neq 0$，则 $W(t)$ 处处不等于零．

对于常系数线性微分方程(2.0.2)，e^{At}是满足$e^{A0}=\boldsymbol{I}$的基矩阵解，并且$\det(e^{A0})=\det(\boldsymbol{I})=1$. 因此，上面公式变为

$$\det(e^{At}) = e^{\mathrm{tr}(A)t}.$$

例 2.1.4　以下面欧拉方程为例来说明定理：

$$t^2\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 0,$$

这是个二阶标量方程，有形如t^r的解，其中r满足

$$0 = r^2 + (-2-1)r + 2 = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2).$$

因此它的两个解分别为$y^1(t)=t$和$y^2(t)=t^2$. 该方程对应的一阶微分方程组为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

19

$$\dot{x}_2 = \frac{2}{t^2}x_1 + \frac{2}{t}x_2.$$

前面的两个解对应于我们方程组的解

$$\boldsymbol{x}^1(t) = (t,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{x}^2(t) = (t^2,2t)^{\mathrm{T}},$$

其朗斯基行列式为

$$\det\begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} = t^2.$$

另一方面，方程组右端系数矩阵的迹等于$2/t$，因此

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{2}{s}\mathrm{d}s\right) = W(t_0)\exp(2\ln(t) - 2\ln(t_0))$$

$$= W(t_0)(e^{\ln(t^2)}/e^{\ln(t_0^2)}) = (W(t_0)/t_0^2)t^2.$$

又因为$W(t_0)=t_0^2$，从而利用定理和直接用解所得到的朗斯基行列式是一致的. ■

2.2　常系数线性方程组：解与相图

一阶线性标量方程$\dot{x}=ax$的解是$x(t)=x_0e^{at}$，其中x_0是任意常数. 受此启发，我们得到线性微分方程组解的形式. 如果把两个一阶线性方程$\dot{x}_1=a_1x_1$，$\dot{x}_2=a_2x_2$合在一起构成一个方程组，显然它有形如$x_1(t)=c_1e^{a_1t}$，$x_2(t)=c_2e^{a_2t}$的解，其中c_1，c_2是任意常数，令

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1e^{a_1t}\boldsymbol{u}^1 + c_2e^{a_2t}\boldsymbol{u}^2,$$

其$\boldsymbol{u}^j$表示第j个分量为1，其他分量为0的二维向量，则$\boldsymbol{x}(t)$是向量形式的解，这个解是指数函数与向量乘积$e^{a_jt}\boldsymbol{u}^j$的线性组合. 因为$e^{a_jt}\boldsymbol{u}^j$是一个标量与一个向量的乘积，从而它的方向由$\boldsymbol{u}^j$决定.

受此启发，我们寻找常系数线性微分方程组(2.0.2)的形如一个标量与一个向量的乘积的解. 若已知(2.0.2)有形如

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}$$

的解，则它属于由向量$\boldsymbol{v}$确定的一维线性空间，又因为它是解，所以

20

$$\boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\lambda t}\boldsymbol{v}) = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{v}.$$

考虑到$e^{\lambda t}\neq 0$，上面的等式等价于

$$Av = \lambda v \quad \text{或}$$
$$(A - \lambda I)v = 0.$$

因此，$x(t) = e^{\lambda t}v$ 是非零解当且仅当 v 是特征值 λ 对应的特征向量. 要寻找这种形式的解分以下两步：(i)解特征方程

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

得到特征值；(ii)解下面的线性方程组

$$(A - \lambda_j I)v = 0,$$

其中 I 是单位矩阵——主对角线上的元素是 1，其他位置上的元素是 0. 如果特征方程有 n 个互不相同的实特征值 λ_1，…，λ_n，设它们对应的特征向量分别是 v^1，…，v^n，则可得到方程的 n 个线性无关的解 $e^{\lambda_1 t}v^1$，…，$e^{\lambda_n t}v^n$，它们构成方程(2.0.2)的基本解集，从而它的通解为

$$c_1 e^{\lambda_1 t}v^1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}v^n.$$

对于二维线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

它的特征方程为

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta, \end{aligned}$$

其中 $\tau = a + d = \mathrm{tr}(A)$ 是矩阵的迹，$\Delta = ad - bc = \det(A)$ 是矩阵的行列式，因此在这种情况下，特征方程非常容易确定.

下面继续求一些特殊例子的基本解集，同时在相平面中绘出代表性解的图像.

例 2.2.1(鞍点) 考虑方程组

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}x.$$

它的特征方程是 $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$，特征值为 $\lambda = -2$，4，可以直接计算出第一个特征值 $\lambda_1 = -2$ 有特征向量 $v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，因此

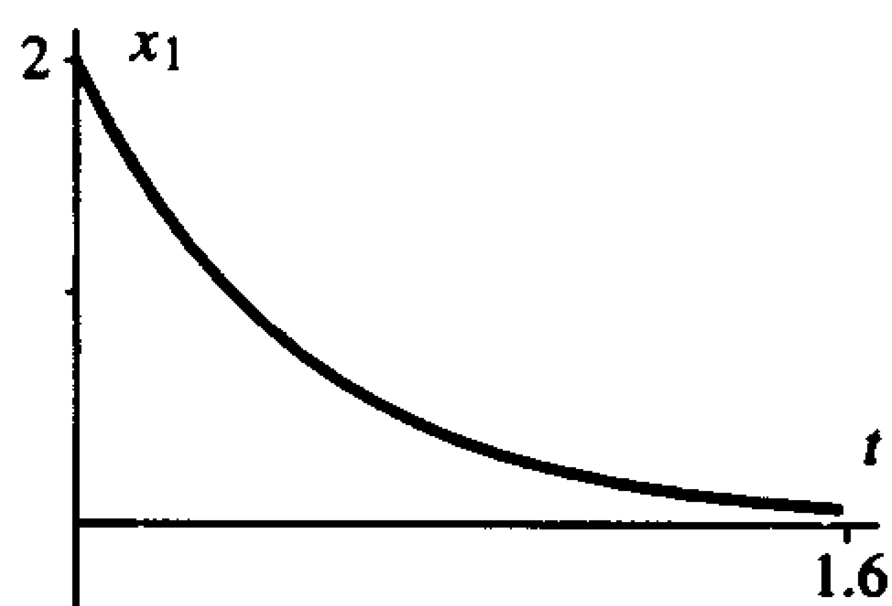
$$x^1(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

可作为方程的第一个解. 这个解的各分量以速率 e^{-2t} 趋向于 0. 图 2.2.1a 描述了这个解的第一个分量 $x_1^1(t)$ 作为 t 的函数在 (t, x_1) 坐标平面中的图像.

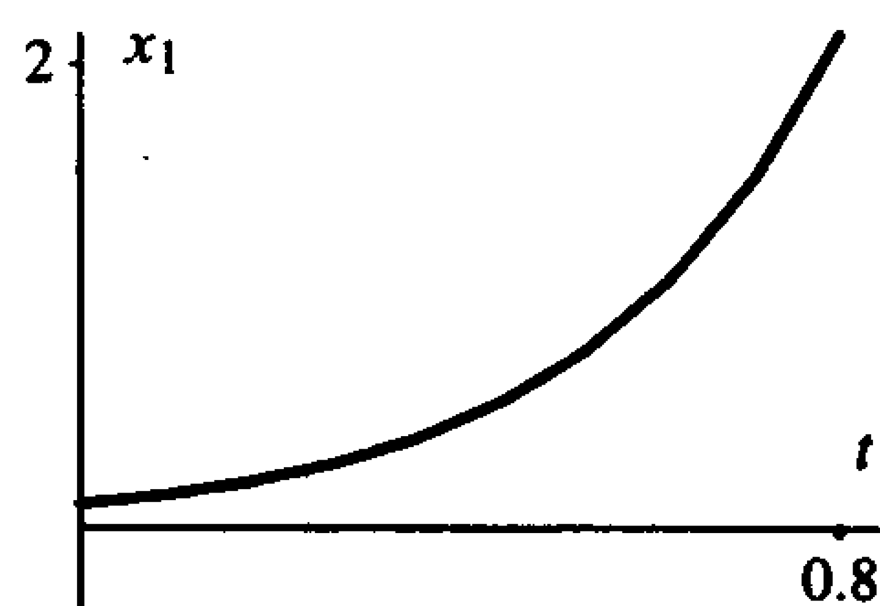
同理，第二个特征值为 $\lambda_2 = 4$，它有特征向量 $v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，从而

$$x^2(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

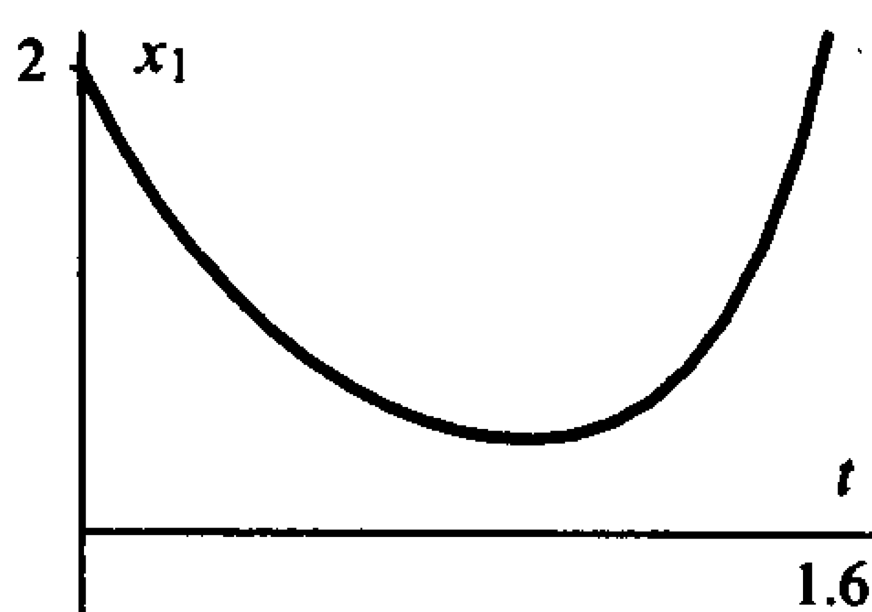
可作为方程的第二个解.



a) 当$(x_1^1(0), x_2^1(0))=(2, -2)$时$(t, x_1^1(t))$的图像



b) 当$(x_1^2(0), x_2^2(0))=(0.1, 0.1)$时$(t, x_1^2(t))$的图像



c) 当$(x_1^3(0), x_2^3(0))=(2, -1.995)$时$(t, x_1^3(t))$的图像

图 2.2.1　鞍点型微分方程——例 2.2.1 解的时距曲线图

这个解的各分量以速率 e^{4t}增长. 图 2.2.1b 描述了这个解的第一个分量 $x_1^2(t)$作为 t 的函数在(t, x_1)坐标平面中的图像.

由这两个解构成的矩阵解为

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{bmatrix}.$$

它的朗斯基行列式为

$$W(t) = \det\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{bmatrix} = 2e^{2t}.$$

在上式中令 $t=0$，则

$$W(0) = \det(v^1, v^2) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0.$$

由线性代数的知识可知这两个特征向量是线性无关的，从而方程的通解可写为

$$c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

图 2.2.1c 描述了通解第一个分量 $x_1^3(t)$作为 t 的函数在(t, x_1)坐标平面中的图像.

此外，在(x_1, x_2)坐标平面中画出解的图像也是非常有指导性的，其中没有时间轴，仅用箭头表示时间运动的方向. 这种 x 空间中的图像称为是解的相图，二维情形下的空间称为相平面，高维情形下称为相空间.

在例 2.2.1 的通解中取 $c_1=1$，$c_2=0$，则得到解 $e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，因为这是数与向量的乘积，所以它沿着方向 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$运动. 注意到当 t 趋于正无穷时 e^{-2t} 趋于零但不等于零，所以当 t 趋于正无穷时轨线 $e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$无限逼近但永远达不到坐标原点，这一点，也容易从时距曲线图——图 2.2.1a中看出. 下面我们在 (x_1, x_2) 坐标平面中画出这条轨线的图像并用箭头在上面注明时间运动的方向，参见图 2.2.2 中从右下方的箭头指向坐标原点的直线. 若取 $c_1=-1$，$c_2=0$，则得到解 $e^{-2t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，它是左上方的箭头指向坐标原点的直线.

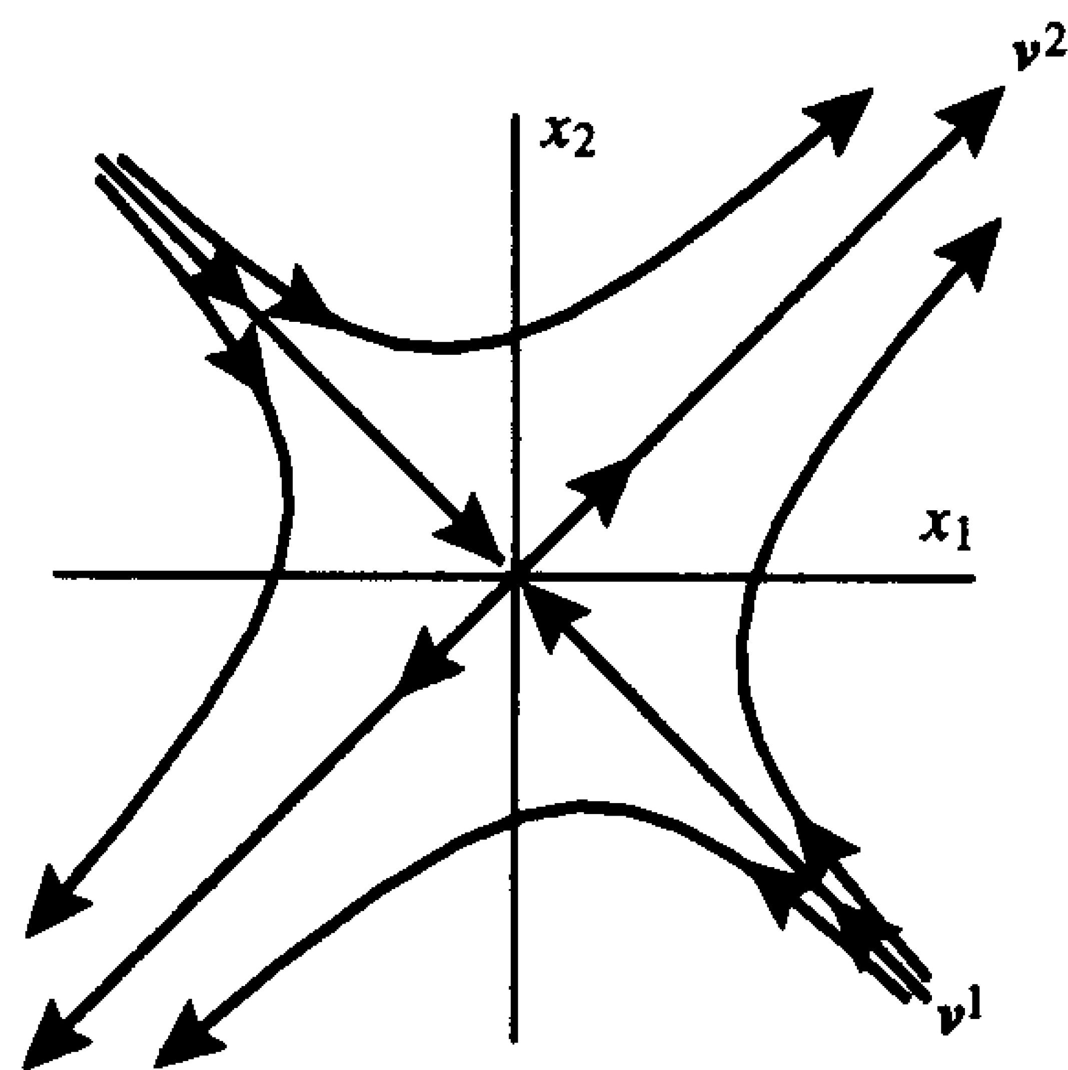


图 2.2.2 例 2.2.1——鞍点的相图

若在例 2.2.1 的通解中取 $c_1=0$，$c_2=1$，则得到解 $e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，因为这是数与向量的乘积，所以它沿着方向$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$运动. 而且随着 t 的增加而增加：当 t 趋于正无穷时这个解趋于无穷，当 t 趋于负无穷时这个解趋于零但不等于零，这条轨线是沿图 2.2.2 中右上侧的箭头远离坐标原点的半条直线. 若取 $c_1=0$，$c_2=-1$，则得到解 $e^{4t}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$，它是图 2.2.2 中左下侧的箭头远离坐标原点的半条直线.

若在例 2.2.1 的通解中取 $c_1\neq0$ 且 $c_2\neq0$，则有

$$c_1e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=e^{4t}\left[c_1e^{-6t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right],$$

当 t 趋于正无穷时中括号中的项趋于向量 $c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，因此轨线在 t 趋于正无穷时以特征向量$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$所确定的直线为渐近线. 同理，这条轨线在 t 趋于负无穷时还以特征向量$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$所确定的直线为渐近线. 若 c_1，c_2 都取正值，轨线类似于图 2.2.2 右侧带箭头的双曲线. 对于

$$\boldsymbol{x}^3(t)=1.9975\boldsymbol{x}^1(t)+0.0025\boldsymbol{x}^2(t),$$

当 $\boldsymbol{x}^3(0)=(2, -1.995)$时，$(t, x_1^3(t))$的图像如图 2.2.1c 所示.

若 $c_1<0$ 且 $c_2>0$，轨线类似于图 2.2.2 上端带箭头的双曲线.

有两个异号实特征值的线性系统的零解——即相平面中的坐标原点称之为鞍点，有时我们也称这种线性系统为鞍点. ■

表 2.2.1 总结了绘二维鞍点线性系统的相图的步骤.

表 2.2.1　二维鞍点线性系统的相图的画法

1. 通过分析特征向量首先画出所有沿直线运动(包括远离或靠近原点)的轨线，并在每条半直线上用箭头注明运动的方向.
2. 在直线解间的四个区域中，各画一条由两基本解线性组合而成的有代表性的解的线图.

当我们用计算机程序(如 Maple、Mathematica 或 Matlab)画相图时，可用如下步骤. 设 $\lambda_1<0<\lambda_2$ 是两个特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{v}^1$，$\boldsymbol{v}^2$.

1. 取两个分别是 $\pm\boldsymbol{v}^1$ 的较小倍数的点为初始条件，并沿着时间前进的方向画出轨线(例如 $\pm0.01\boldsymbol{v}^1$).
2. 另外取 $\pm\boldsymbol{v}^2$ 较大倍数的两个点 $\pm C\boldsymbol{v}^2$ 为两个初始条件，这些初始点很可能位于所选取的画相图的区域的边界上，然后沿着时间前进的方向画出轨线(或取 $\pm\boldsymbol{v}^2$ 较小倍数的点为两个初始条件，沿着时间后退的方向画出轨线).
3. 在 $\pm\boldsymbol{v}^2$ 倍数的附近至少取四个初始条件(例如 $\pm C\boldsymbol{v}^2\pm0.1\boldsymbol{v}^1$).

设有一个二维线性系统，它有两个不同的负的实特征值，$0>\lambda_1>\lambda_2$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{v}^1$，$\boldsymbol{v}^2$，那么它的通解为

$$c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^1+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^2.$$

当(i) $c_1\neq0$ 且 $c_2=0$ 或(ii) $c_1=0$ 且 $c_2\neq0$ 时，方程的解沿着直线趋向于坐标原点，如果 $c_1\neq0$ 且 $c_2\neq0$，方程的解可写为

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}(c_1\boldsymbol{v}^1+c_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\boldsymbol{v}^2).$$

因为 $\lambda_2<\lambda_1$，$\lambda_2-\lambda_1<0$，所以括号中的第二项当 t 趋于正无穷时趋向于 0，这表明 $c_1\neq0$ 时方程的解沿特征向量 $\boldsymbol{v}^1$ 所确定的直线渐近地趋向于原点(也就是说以较大特征值对应的特征向量确定的直线为渐近线)；当 t 趋于负无穷时，含 $\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ 的项以更快的速度趋向于 0，并且这个解越来越平行于特征向量 $\boldsymbol{v}^2$ 所确定的直线. 图 2.2.3 给出了上述情形相图的一个略图，图中有四条轨线沿直线趋向于零，c_1，$c_2\neq0$ 对应的轨线也趋向于零，从时距曲线图上分析，解的各分量都是以 t 的指数函数的速度趋向于零，而第二个解趋向于零的速度更快.

24

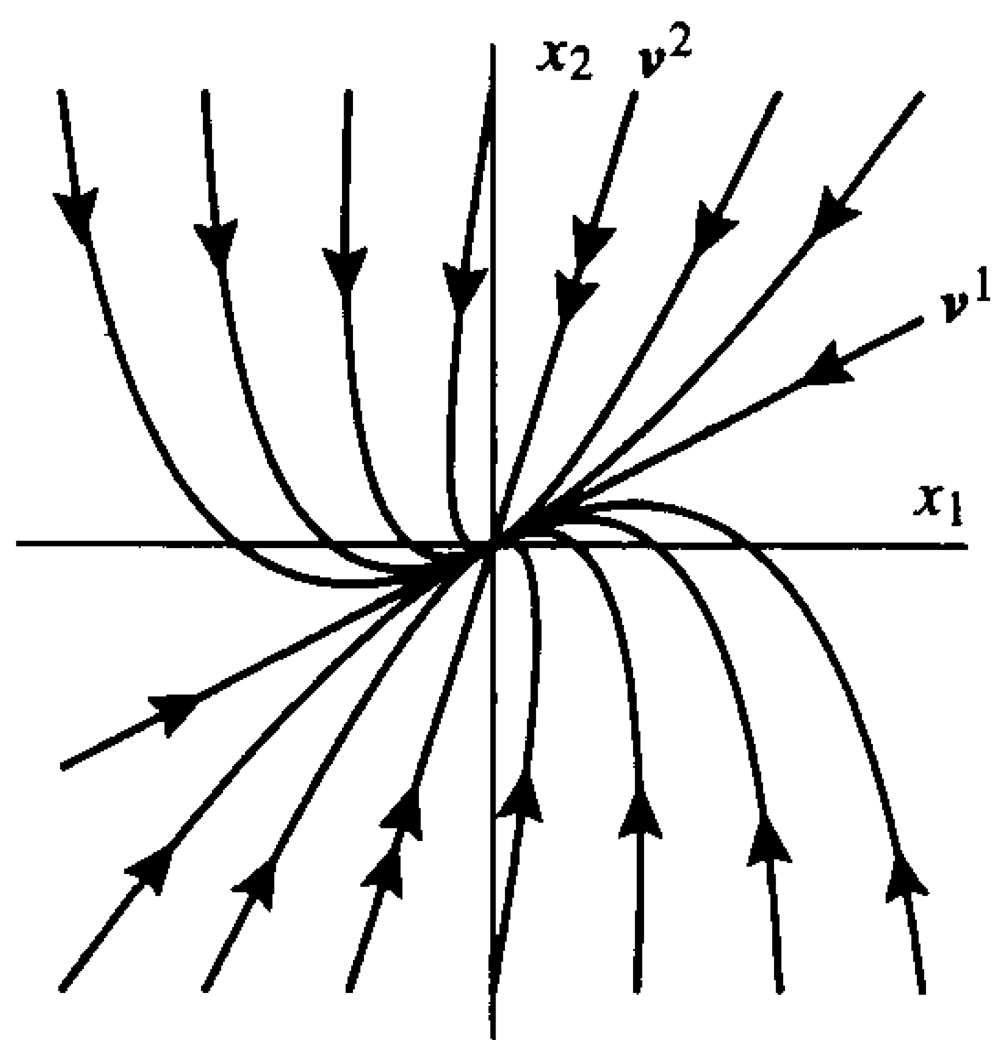


图 2.2.3　例 2.2.3——稳定结点的相图

若一个线性系统对应的特征值互不相同且都是负实数，则称这个系统的原点为稳定结点.

注 2.2.2　*结点(node)本义是一个群枝分出的点，在生物学上用来表示枝干上长出叶子的点，在电路上表示不同支路汇集的点，在前面的相平面中，许多解从原点分支，由此得名.*

此处使用稳定(stable)这个形容词是因为当 t 趋向于无穷时所有的解都趋向于原点.

例 2.2.3(稳定结点)　系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 3 & -11\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

是有稳定结点的一个例子. 系数矩阵有特征值 $\lambda_1=-5$，$\lambda_2=-10$，对应的特征向量分别为

$\boldsymbol{v}^1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}^2=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，从而通解是

$$c_1\mathrm{e}^{-5t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+c_2\mathrm{e}^{-10t}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},$$

图 2.2.3 是它的相图．当 $t=0$ 时解的朗斯基行列式是

$$W(0)=\det\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}=5\neq 0;$$

因此，这两个特征向量是线性无关的，所以它们对应的两个解也是线性无关的．■

表 2.2.2 总结了画二维稳定结点附近的相图的步骤．

表 2.2.2　稳定结点相图的画法

设两个不同的特征值为 $0>\lambda_1>\lambda_2$．

1. 画出所有沿直线运动的轨线，并在每条半直线上用箭头注明当 t 增加时解的运动方向．在以更快速度趋向 0 的轨线（与负值较大的特征值 λ_2 相对应）上注双箭头．
2. 在直线解之间的四个区域中，各画一条由两个基本解线性组合而成的有代表性的解的相图．它们趋向原点时，与负值较小的特征值对应的特征向量确定的直线相切；它们远离原点而趋向无穷远时（当 t 趋向负无穷），越来越平行于负值较大的特征值对应的特征向量所确定的直线．

当我们用计算机程序如 Maple、Mathematica 或 Matlab 去画相图时，可用如下步骤．设 $0>\lambda_1>\lambda_2$．是两个特征值，对应特征向量分别为 $\boldsymbol{v}^1$，$\boldsymbol{v}^2$．

1. 取 $\pm\boldsymbol{v}^1$ 的较大倍数 $\pm c_1\boldsymbol{v}^1$ 为初始条件，所以这些初始点很可能位于所选取的画相图的区域的边界上，然后沿着解上时间前进的方向画相图．
2. 另外取 $\pm\boldsymbol{v}^2$、$\pm c_2\boldsymbol{v}^2$ 中较大倍数 $\pm c_2\boldsymbol{v}^2$ 为两个初始条件，所以这些初始点很可能位于所选取的绘相图的区域的边界上，然后沿着解上时间前进的方向绘相图．
3. 在 $\pm\boldsymbol{v}^1\pm\boldsymbol{v}^2$ 分割的四个区域中的至少取一个点为初始条件的初始条件，然后沿着解上时间前进的方向画相图．

例 2.2.4（不稳定结点）　若一个二维线性系统，它有两个不同的正的实特征值，则该系统的原点称为*不稳定结点*．它的相图类似于上一个例子，只不过是箭头的方向相反，参见图 2.2.4．

不稳定结点相图的画法和稳定结点相图的画法很相似，只不过箭头的方向相反，当 t 趋向于负无穷时，轨线趋向于原点．■

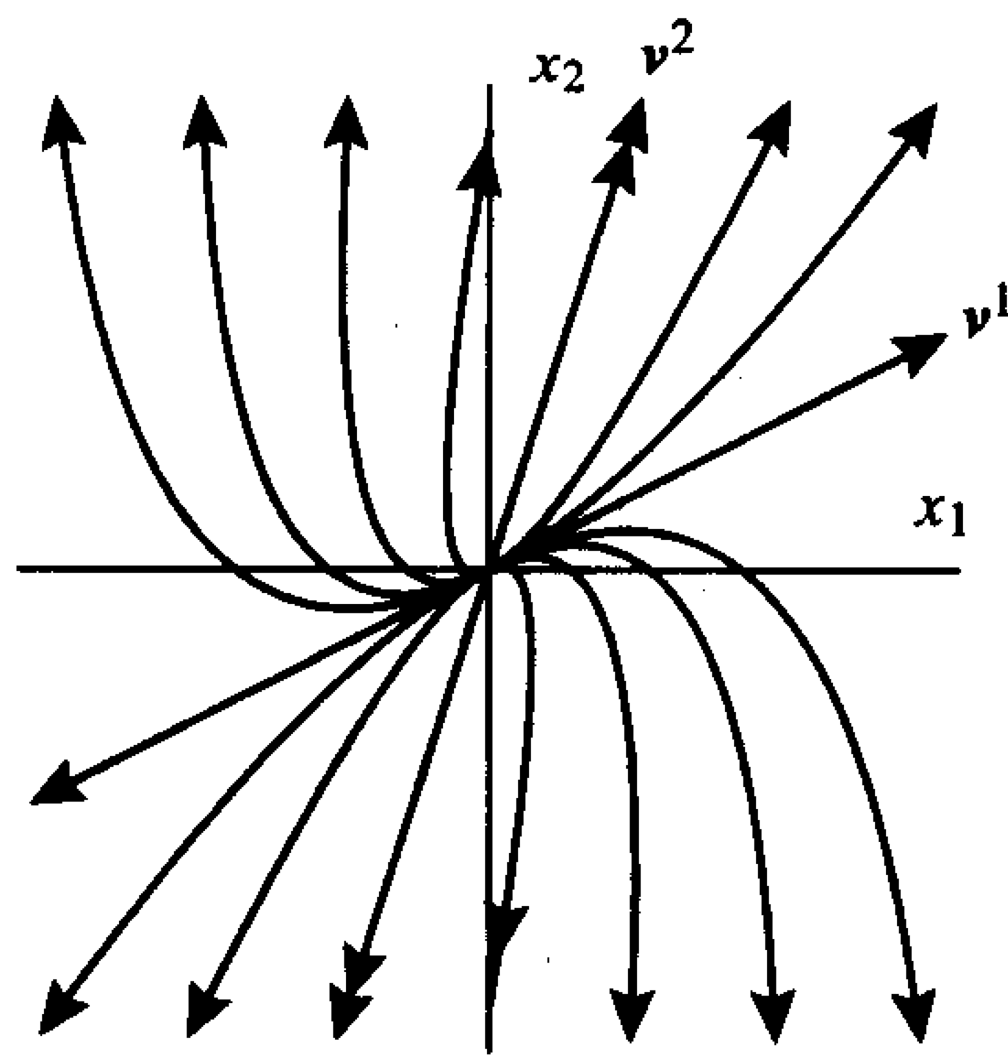


图 2.2.4　不稳定结点的相图

25 ~ 26

例 2.2.5（零特征值情形）　微分方程

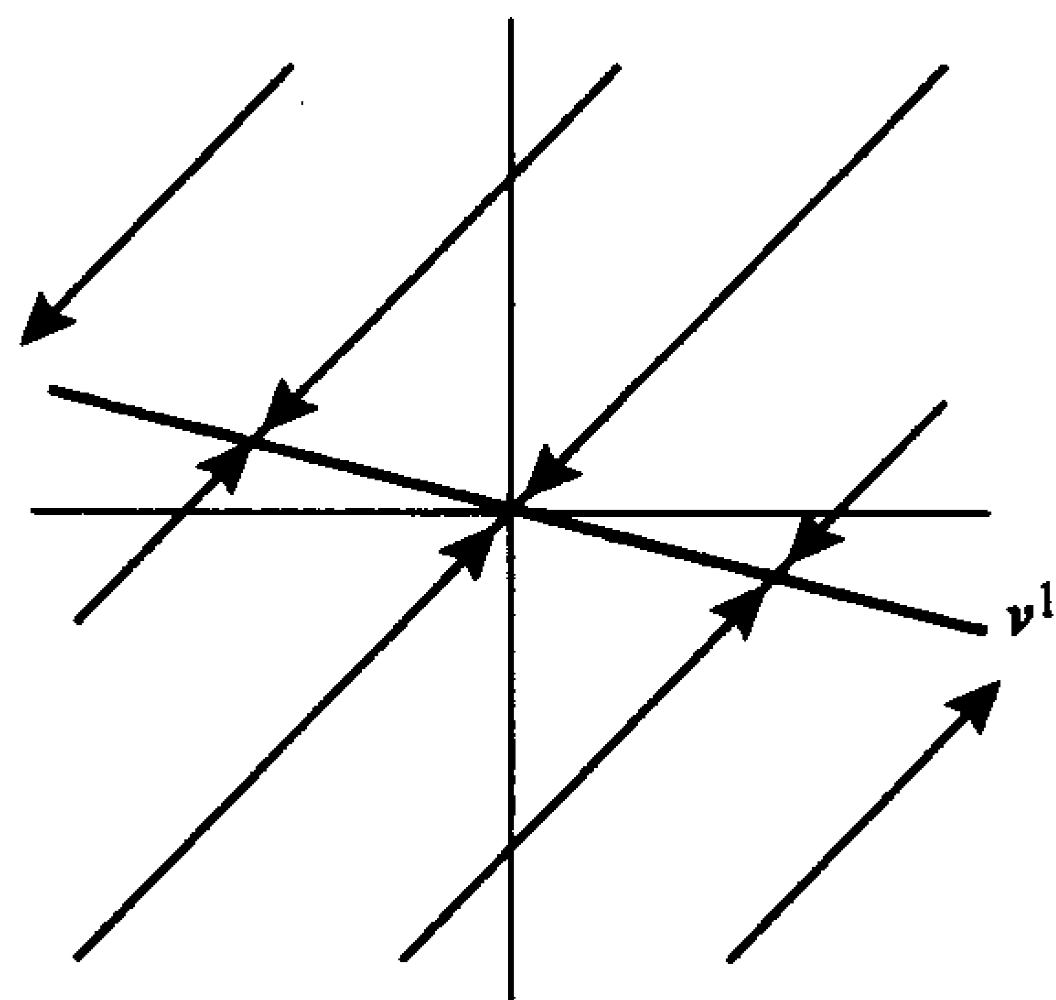
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1&-3\\-1&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

有特征值 0 和 -4，对应的特征向量分别为$\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$．因为 $\mathrm{e}^{0t}=1$，从而通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}+c_2\mathrm{e}^{-4t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

注意到$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$倍数的点都是不动点（图像是一条直线）（因为若在通解中令 $c_2=0$，则这些点不随时间而改变，始终保持为初始状态）. 因为当 t 趋向正无穷时 e^{-4t} 趋向于0，其他所有解都是趋向于直线上的不动点. 参见图 2.2.5.

对于线性方程 $\dot{x}=Ax$，考虑到 $A0=0$，所以原点总是不动点. 若存在一个非零点 x_0 使得 $Ax_0=0$，即 x_0 是 0 对应的特征向量，此时方程 $\dot{x}=Ax$ 才有非零不动点.



■

图 2.2.5　零特征值对应的相图

2.2.1　复特征值

为了能进一步讨论特征值为复数时线性系统解的情况，需要先来了解指数为复数的指数函数，通过比较正弦函数、余弦函数和指数函数的幂级数展开式，可知

$$e^{i\beta t}=\cos(\beta t)+i\sin(\beta t)\quad 和$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}e^{i\beta t}=e^{\alpha t}(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t)).$$

因此，若令 $\lambda=\alpha+i\beta$（α，β 是实数）是复值特征值，$v=u+iw$ 是对应特征向量（u，w 是实向量），则复值函数

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t}(u+iw) &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t))(u+iw) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)u-\sin(\beta t)w)+ie^{\alpha t}(\sin(\beta t)u+\cos(\beta t)w) \end{aligned}$$

[27] 可表示成一个实值函数与一个虚值函数的和，下面的定理表明这两部分都是方程的解.

定理 2.2.6　设 A 是 $n\times n$ 阶实矩阵.

(a) 若 $z(t)=x(t)+iy(t)$ 是方程组 $\dot{z}=Az$ 的解，其中 $x(t)$，$y(t)$ 是实值函数. 则 $x(t)$，$y(t)$ 都是方程的解.

(b) 特别地，若 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是复值特征值，$v=u+iw$ 是其对应的特征向量，则

$$e^{\alpha t}(\cos(\beta t)u-\sin(\beta t)w)\quad 和$$

$$e^{\alpha t}(\sin(\beta t)u+\cos(\beta t)w)$$

都是方程 $\dot{x}=Ax$ 的解.

证明　由求导法则及矩阵的乘法可得

$$\dot{x}(t)+i\dot{y}(t)=\dot{z}(t)=Az(t)=A(x(t)+iy(t))=Ax(t)+iAy(t).$$

再利用复数相等的条件，则有 $\dot{x}(t)=Ax(t)$，$\dot{y}(t)=Ay(t)$，定理的第一部分得证.

用复值函数

$$e^{(\alpha+i\beta)t}(u+iw)$$

的实部与纯虚部之和的表达式，并利用定理第一部分的结论，则定理的第二部分得证. ■

例 2.2.7（椭圆形中心）　考虑以下微分方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x.$$

其特征方程为 $\lambda^2+4=0$，从而 $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$ 是两个特征值，首先，当 $\lambda=2\mathrm{i}$ 时，我们有

$$A-(2\mathrm{i})I=\begin{bmatrix}-2\mathrm{i} & 4\\ -1 & -2\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

考虑到矩阵的两行互为(复)倍数，从而特征向量满足方程

$$-2\mathrm{i}v_1+4v_2=0,$$

取 $v=\begin{bmatrix}2\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$，由该特征向量可得方程的两个实值解：

$$x^1(t)=\cos(2t)\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}-\sin(2t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad 和$$

$$x^2(t)=\sin(2t)\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\cos(2t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

当 $t=0$ 时它们分别满足初始条件 $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，考虑到

$$\det\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2\neq 0,$$

可知这两个解线性无关，而且容易看出它们都以 $T=2\pi/2=\pi$ 为周期，这说明经过时间 π 以后解又回到同一个点. 若以二维向量 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 的分量 x_1，x_2 为坐标轴建立坐标系，可知方程的解沿焦点在 x_1 轴(即长轴在 x_1 轴上)且长轴是短轴的两倍的椭圆上运动. 又当 $x_1=0$，$x_2>0$ 时，$\dot{x}_1=4x_2>0$，从而解沿着顺时针方向运动，这种具有两个纯虚特征值的微分系统称之为**椭圆形中心**，参见图 2.2.6. 图 2.2.7 是 $x^1(t)$ 第一个分量 $(t, x_1^1(t))$ 的时距曲线图，可以看出 $x_1^1(t)$ 是 t 的周期函数，而且该周期不依赖于振幅.

28

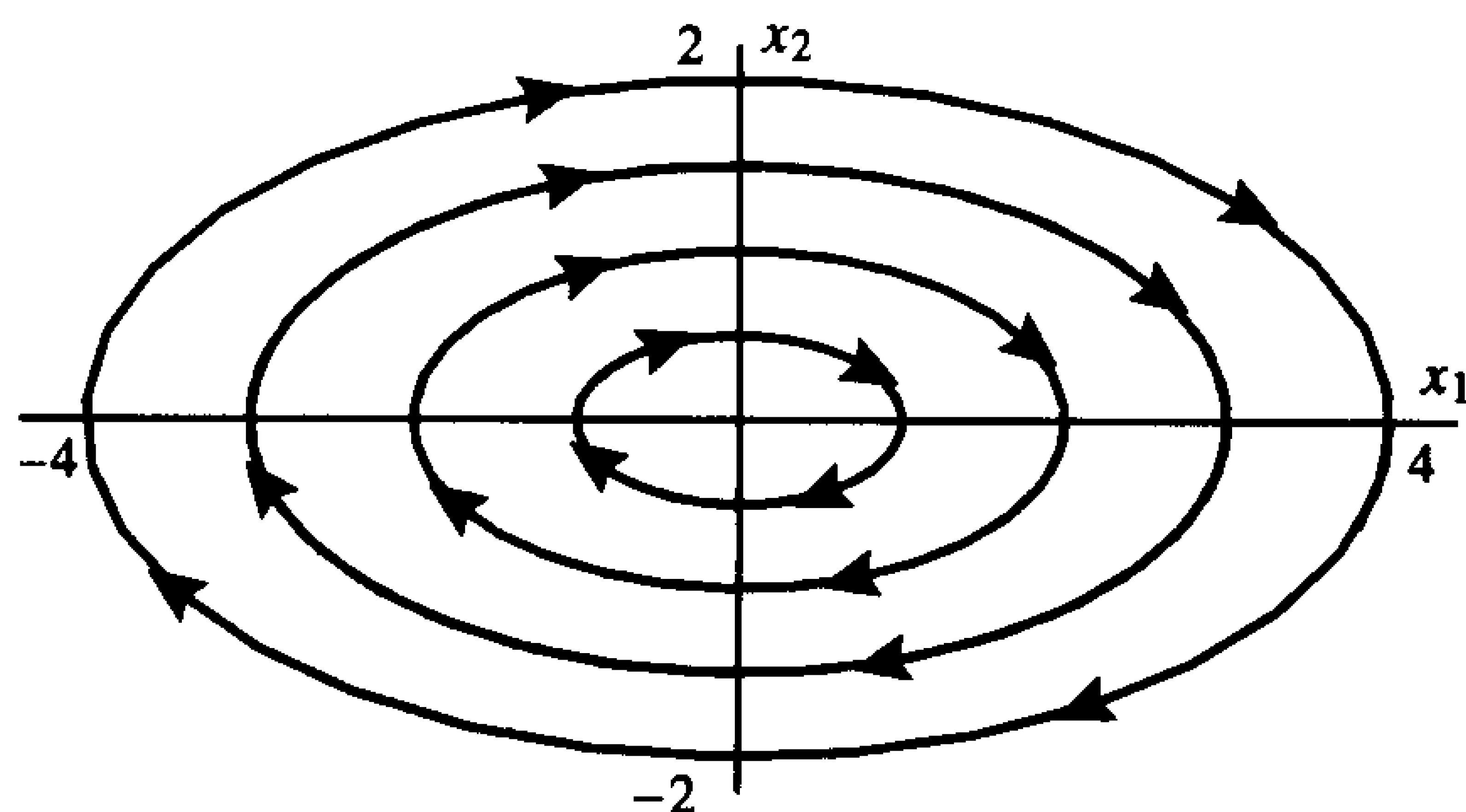


图 2.2.6　椭圆形中心——例 2.2.7 的相图

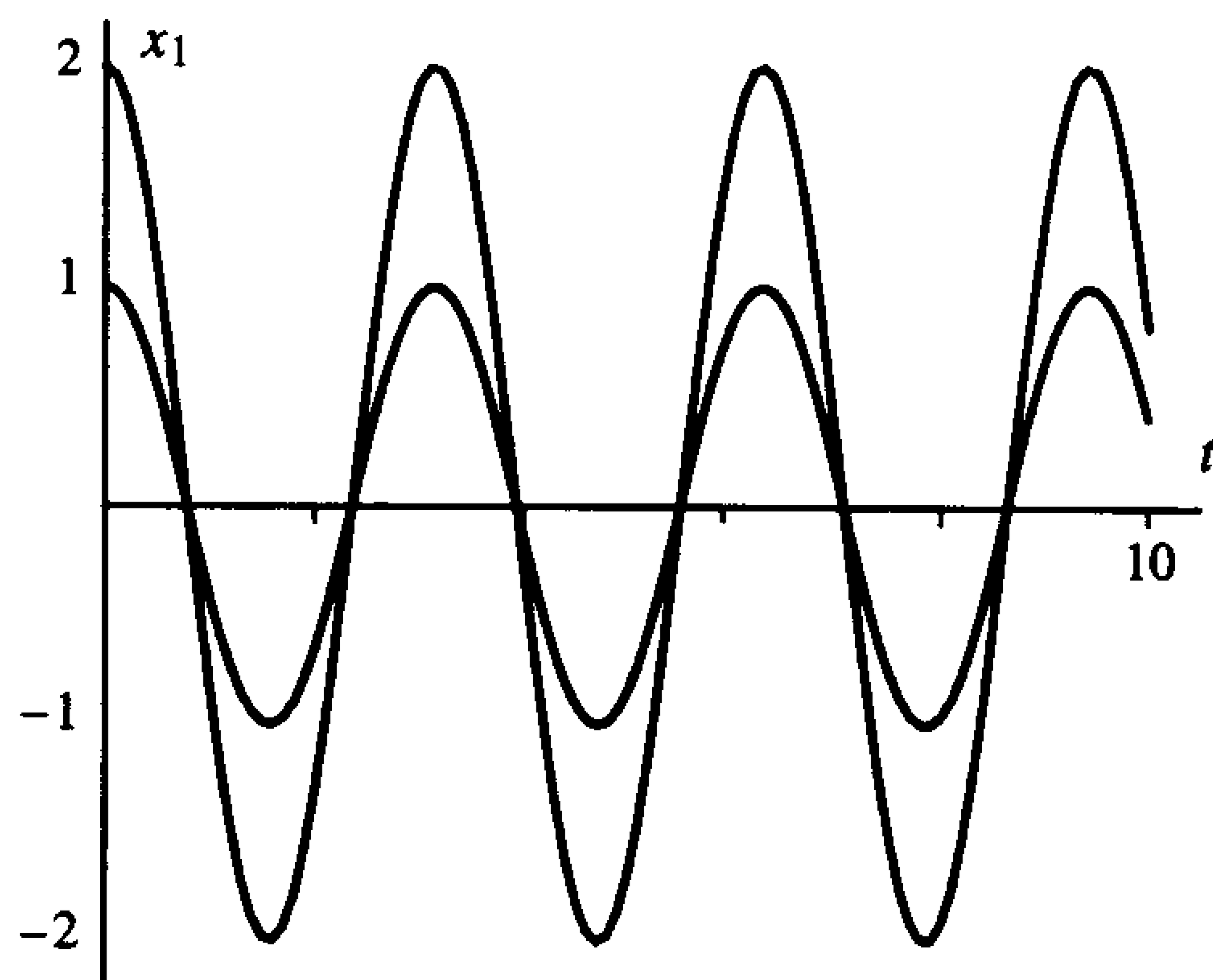


图 2.2.7　例 2.2.7 解的第一个分量 x_1 满足初始条件(1, 0)，(2, 0)的时距曲线图 ■

29

例 2.2.8(稳定焦点)　该例子有一对实部为负的共轭复根，考虑微分系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}.$$

其特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$，从而 $\lambda = -1 \pm 4\mathrm{i}$ 是两个特征值，首先，当 $\lambda = -1 + 4\mathrm{i}$ 时，我们有

$$\boldsymbol{A} - (-1 + 4\mathrm{i})\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -3-4\mathrm{i} & 5 \\ -5 & 3-4\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

矩阵的第一行乘以 $-3-4\mathrm{i}$ 的共轭 $-3+4\mathrm{i}$ 后变为 $(25,\ -15+20\mathrm{i})$，恰好是第二行的倍数，从而特征向量满足方程

$$5v_1 + (-3 + 4\mathrm{i})v_2 = 0,$$

取特征向量

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3-4\mathrm{i} \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \mathrm{i}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

方程的复数解为

$$\mathrm{e}^{-t}(\cos(4t) + \mathrm{i}\sin(4t))\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \mathrm{i}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-t}\left[\cos(4t)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \sin(4t)\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}\right] + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-t}\left[\sin(4t)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \cos(4t)\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}\right].$$

取它的实部和虚部便得到方程的两个实值解

$$\boldsymbol{x}^1(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(4t)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \sin(4t)\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

和

$$\boldsymbol{x}^2(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\sin(4t)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \cos(4t)\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

它们分别满足初始条件

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

而且

$$\det\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = 20 \neq 0,$$

从而这两个解是线性无关的．容易看出含正弦及余弦的项都以 $T = 2\pi/4 = \pi/2$ 为周期，括号前的指数函数项随着 t 的增加而减小且绕原点每旋转一周后收缩为原来的 $\mathrm{e}^{-\pi/2}$；这说明当 t 趋向于无穷时，方程的解渐进地趋向于原点．当 $x_1 = 0$，$x_2 > 0$ 时，$\dot{x}_1 = 5x_2 > 0$，从而解沿着顺时针方向运动，这种特征值是一对负实部共轭复数的微分系统称之为*稳定焦点*，称它是稳定的是因为当 t 趋向于无穷时，方程的解都趋于原点，称它是焦点是因为解都是螺旋形，参见图 2.2.8；图 2.2.9 是 $\boldsymbol{x}^1(t)$ 的第一个分量 $(t,\ x_1^1(t))$ 的时距曲线图，可以看出当 t 趋向于无穷时 $x_1^1(t)$ 作为 t 的函数振荡地趋于零．

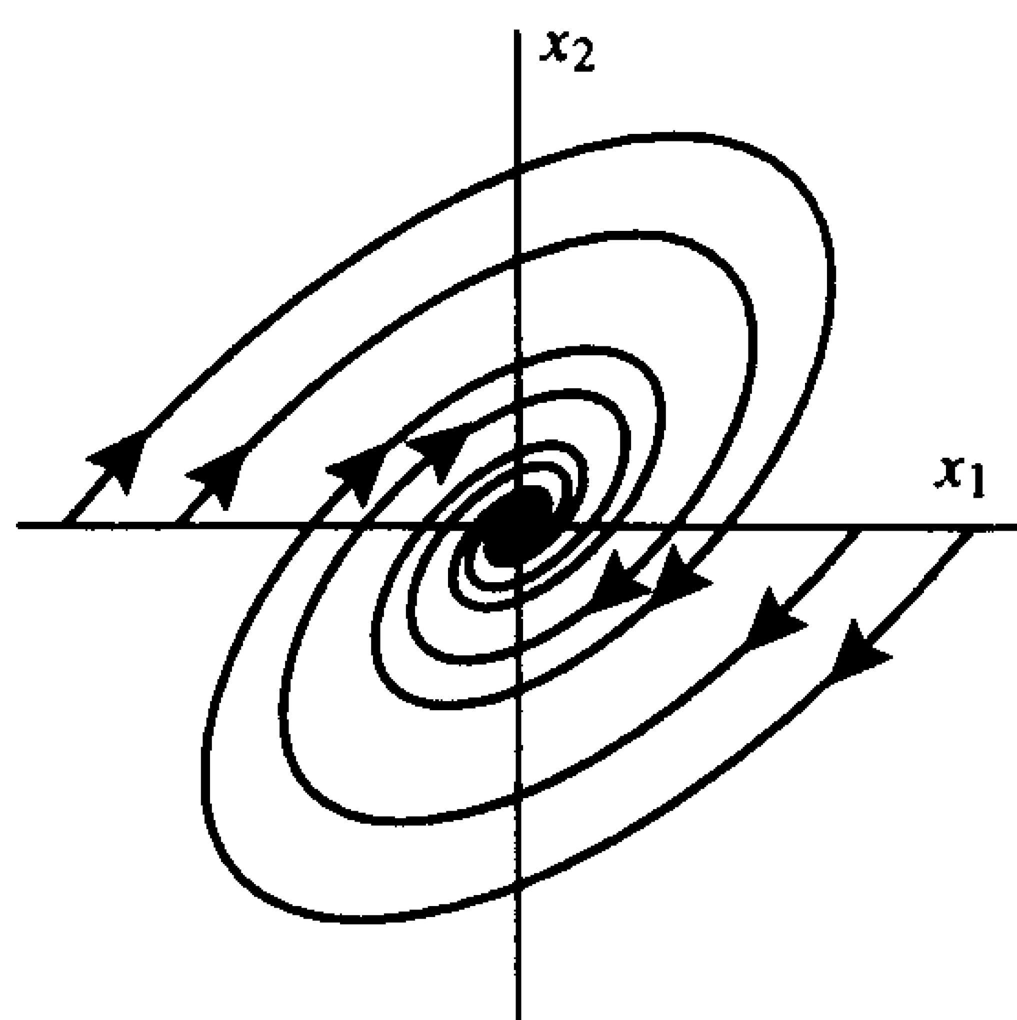


图2.2.8　稳定焦点——例 2.2.8 的相图

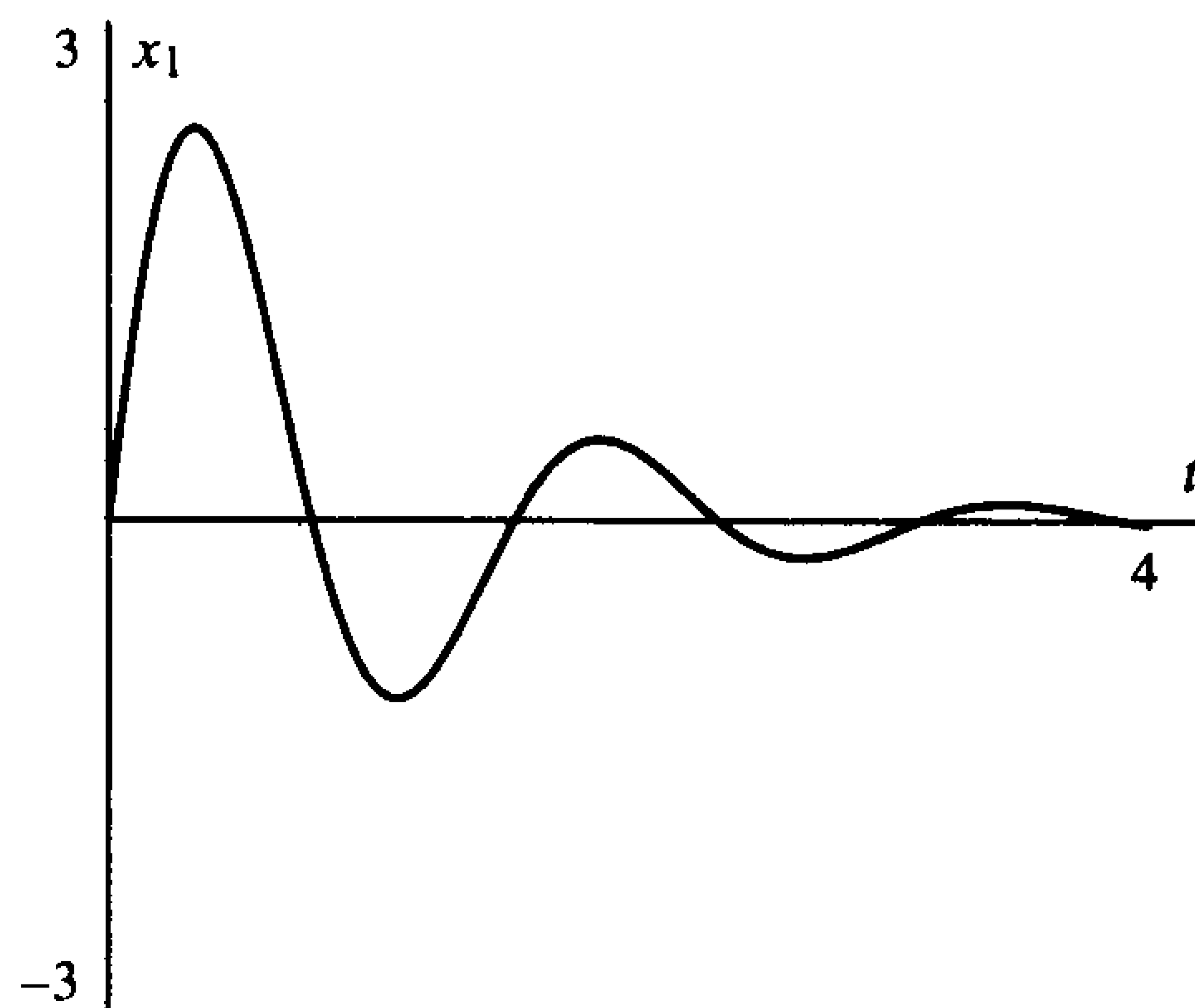


图 2.2.9　例 2.2.8 解的第一个分量 x_1 满足初始条件 $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 3)$ 的时距曲线图 ■

表 2.2.3 总结了画有复值特征值的二维线性系统相图的步骤.

表 2.2.3　有一对共轭复根的线性系统相图的画法

设特征值 $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.
1. 当 $\alpha = 0$ 时，原点是椭圆形中心，所有的解都是周期解，解的运动方向要么是顺时针要么是逆时针.
2. $\alpha < 0$ 时，原点是稳定焦点，螺旋曲线的方向要么是顺时针要么是逆时针.
3. $\alpha > 0$ 时，解螺旋向外旋转，此时原点是不稳定焦点，螺旋曲线的方向要么是顺时针要么是逆时针.
4. 在上述任一情况下，解绕原点的运动方向可以通过讨论 $x_1 = 0$ 时 $\dot{x}$ 的符号来确定，取正号时，沿顺时针方向运动；取负号时，沿逆时针方向运动.

例 2.2.9　考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的微分系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

其特征方程为

$$0 = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5),$$

特征值为 $\lambda = 1$, $-1 \pm 2i$.

当 $\lambda = 1$ 时，用行初等变换化简矩阵

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

从而对应的特征向量取为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda = -1+2\mathrm{i}$ 时，我们有

$$\boldsymbol{A}-(-1+2\mathrm{i})\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1-2\mathrm{i} & 0 & 1\\ 1 & 2-2\mathrm{i} & -1\\ -1 & 4 & -1-2\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

交换矩阵的第一行和第三行，并以 $1-2\mathrm{i}$ 的共轭复数(即 $1+2\mathrm{i}$)乘以新的第三行，使该行的第一个元素变为实数，可得

$$\boldsymbol{A}-(-4+2\mathrm{i})\boldsymbol{I}\sim\begin{bmatrix}-1 & 4 & -1-2\mathrm{i}\\ 1 & 2-2\mathrm{i} & -1\\ 5 & 0 & 1+2\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

利用行初等变换，把第一列除最上端元素以外都变为 0，

$$\begin{bmatrix}-1 & 4 & -1-2\mathrm{i}\\ 0 & 6-2\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i}\\ 0 & 20 & -4-8\mathrm{i}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -4 & 1+2\mathrm{i}\\ 0 & 3-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i}\\ 0 & 5 & -1-2\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

第二步，给第一行乘以 -1，第二行乘以 $\frac{1}{2}$，第三行乘以 $\frac{1}{4}$，为了把第二行的第一个非零元素变成实数，我们用 $3+\mathrm{i}$ 去乘第二行，则有

$$\begin{bmatrix}1 & -4 & 1+2\mathrm{i}\\ 0 & 10 & -2-4\mathrm{i}\\ 0 & 5 & -1-2\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

对上述矩阵继续进行行初等变换，便得到下面一系列矩阵，

$$\begin{bmatrix}1 & -4 & 1+2\mathrm{i}\\ 0 & 5 & -1-2\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -1-2\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

从而 $-1+2\mathrm{i}$ 对应的特征向量可取为

30
~
32

$$\begin{bmatrix}1+2\mathrm{i}\\ -1-2\mathrm{i}\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -5\end{bmatrix}+\mathrm{i}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 0\end{bmatrix}.$$

进行合并便得到方程的三个线性无关解

$$\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -5\end{bmatrix}-\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$$

和

$$\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -5\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 0\end{bmatrix}.$$

这些解的三个初始条件是

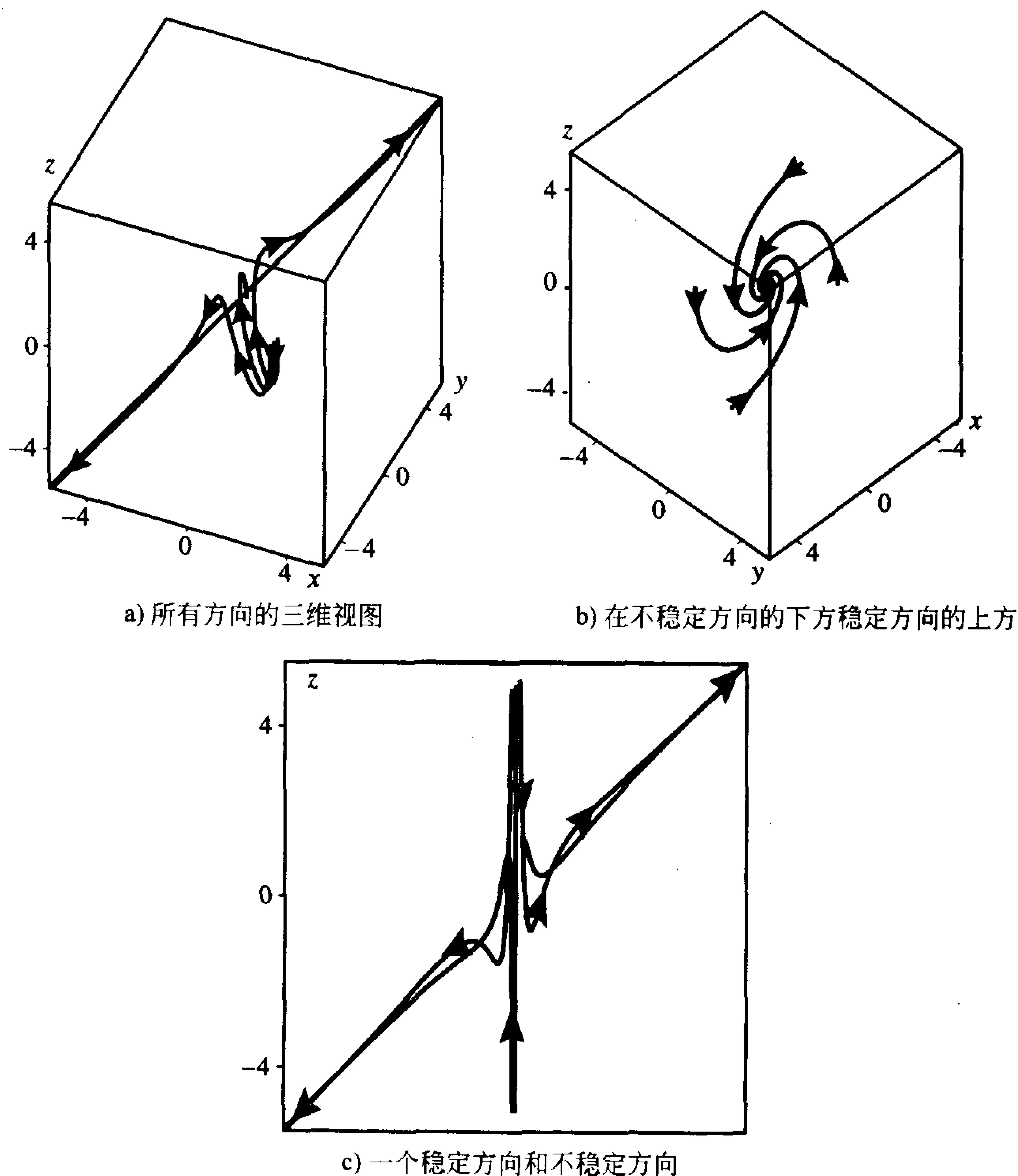
$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\-1\\-5\end{bmatrix}\quad 和\quad \begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}.$$

因为

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & -1 & -2\\1 & -5 & 0\end{bmatrix}=-20\neq 0,$$

所以这些解是线性无关的.

三个不同视角的相图参见图 2.2.10.



a) 所有方向的三维视图

b) 在不稳定方向的下方稳定方向的上方

c) 一个稳定方向和不稳定方向

图 2.2.10 例 2.2.9 的三个不同视角的相图．初始条件包括由向量(1, 1, 1)扩张成的直线上的点，向量(1, −1, 5)和(2, −2, 0)张成的平面上的点，以及这个平面附近的点 ■

2.2.2　重实特征值

例 2.2.10(有足够多特征向量的重特征值)　考虑有重特征值的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}.$$

它的特征方程是 $0=\lambda^3-12\lambda-16=(\lambda-4)(\lambda+2)^2$，因此 -2 是一个二重实特征值，矩阵

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

可通过行初等变换化简为

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

这个矩阵的秩是 1，因此有 $3-1=2$ 个线性无关的特征向量：分量 v_1 任意取，分量 $v_2=-2v_3$，因此两个线性无关的特征向量可取为

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad 和 \quad\begin{bmatrix}0\\ -2\\ 1\end{bmatrix}.$$

所以，$\lambda=-2$ 所对应的线性无关的特征向量的个数与特征方程的重数相同.

与 $\lambda=4$ 对应的特征向量为$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$，因此通解是

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c_2\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}0\\ -2\\ 1\end{bmatrix}+c_3\mathrm{e}^{4t}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}.$$

可以看出这与有互异特征值时的情形很相似.　■

例 2.2.11(特征向量不足的情况)　考虑系统

33 ~ 34

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}.$$

特征方程是 $0=(\lambda+1)^2(\lambda+2)$，因此 $\lambda=-1$ 是一个二重特征值.

当 $\lambda=-2$ 时，

$$A+2I=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

因此对应的特征向量为$\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

当 $\lambda=-1$ 时,

$$A-(-1)I=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

此矩阵的秩为 2, 因此它只有一个线性无关的特征向量$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$. ■

下面将讨论如何求一般情形下第三个无关解的方法, 然后回来讨论上一个例子.

由前面的讨论可知, 对任意的向量 w, $e^{At}w$ 是方程的一个解. 我们将选取特殊的 w 来重写这个解, 若矩阵 A, B 可交换($AB=BA$), 则

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}.$$

这一点可通过进行级数乘法并对乘积的项重新排序得到, 见本章结尾的定理 2.5.6. 由于 $(A-\lambda I)(\lambda I)=(\lambda I)(A-\lambda I)$, 考虑到 λI 是一个标量与单位矩阵的乘积, 从而

$$e^{At}w=e^{((\lambda I)+(A-\lambda I))t}w=e^{(\lambda I)t}e^{(A-\lambda I)t}w=e^{\lambda t}Ie^{(A-\lambda I)t}w$$

$$=e^{\lambda t}\left(Iw+t(A-\lambda I)w+\frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2w+\cdots\right).$$

若 w 满足 $(A-\lambda I)w=v$, 其中 v 是特征值 λ 对应的特征向量, 则

$$(A-\lambda I)^2w=(A-\lambda I)v=0,\quad \text{因此}$$

$$(A-\lambda I)^nw=(A-\lambda I)^{n-1}v=0\quad \text{对于 } n\geqslant 2.$$

因此, 前面的无穷级数 $e^{At}w$ 实际上只有有限项, 这样便得到第二个解

$$x^2(t)=e^{\lambda t}(w+tv).$$

可以看出, 这与二阶标量方程对应的特征方程有重根时的情形相似, 我们知道此时它的第二个解是 $te^{\lambda t}$.

事实上, 可直接检验 $x^2(t)$ 也是解, 考虑到 $\lambda v=Av$, $\lambda w+v=Aw$ 可得

$$\dot{x}^2(t)=\lambda e^{\lambda t}(w+tv)+e^{\lambda t}v=e^{\lambda t}(\lambda w+v)+e^{\lambda t}t\lambda v=e^{\lambda t}(Aw+Atv)=Ax^2(t).$$

35

因此, 若 λ 是一个二重特征值且只有一个线性无关特征向量 v, 此时首先通过解 $(A-\lambda I)v=0$ 得到 v, 然后通过解 $(A-\lambda I)w=v$ 得到 w, 这样便得到两个线性无关解 $e^{\lambda t}v$ 和 $e^{\lambda t}(w+tv)$, 对于重数大于 2 的特征值, 基本思想是一样的, 只不过是更复杂一点而已.

回到例 2.2.11　与特征值 $\lambda=-1$ 对应的特征向量是 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

我们还要解非齐次方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$，用直线把向量 $\boldsymbol{v}$ 从矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 中隔开，增广矩阵写为

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\2&-2&1&1\\1&-1&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

它的一个解是 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，因此另一个解是

$$\boldsymbol{x}^3(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=e^{-t}\begin{bmatrix}t\\t\\1\end{bmatrix},$$

且通解是

$$c_1\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}t\\t\\1\end{bmatrix}.$$

这样我们就得到三个解，以这三个解在 $t=0$ 时对应的值为列构成的矩阵的行列式不等于零，即

$$\det\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=-1\neq 0,$$

从而这三个解是线性无关的.　■

例 2.2.12（退化的稳定结点）　考虑有重特征值的二维系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2&1\\-1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}.$$

其特征方程是 $0=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$，它有二重根 $\lambda=-1$，矩阵

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

的秩是 1，所以它只有一个线性无关的特征向量 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，为解方程

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v},$$

考虑增广矩阵

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

则有 $-w_1+w_2=1$，从而方程有解 $w_1=0$，$w_2=1$，即 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，因此方程的第二个解为

$$\boldsymbol{x}^2(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}t\\1+t\end{bmatrix},$$

从而方程的通解为

$$c_1\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}t\\1+t\end{bmatrix}.$$

因为当 t 趋于无穷时，指数函数 e^{-t}趋向于零的速度比 t 趋于无穷的速度更快，所以第二个解的第一个分量 $x_1^2(t)=t\mathrm{e}^{-t}$在 t 趋于无穷时趋向于零；同理，它的第二个分量 $x_2^2(t)=\mathrm{e}^{-t}+t\mathrm{e}^{-t}$在 t 趋于无穷时也趋向于零. 总之，当 t 趋于无穷时，这个解趋向于原点，而且当 t 趋于无穷时

$$\boldsymbol{x}^2(t) = t\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$

趋向于

$$t\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

因此第二个解以渐近于特征向量所确定的直线的某方向而趋向于原点.

显然，当 t 趋于无穷时 $\boldsymbol{x}^1(t)$也趋向于零，因此该方程的任意一个解，即 $\boldsymbol{x}^1(t)$和 $\boldsymbol{x}^2(t)$的一个线性组合，在 t 趋于无穷时趋向于原点. 然而在这种情形下，只有一个解是沿直线趋向于原点，其他解都以渐近于特征向量所确定的直线的某方向而趋向于原点，这类系统称为退化稳定结点(degenerate stable node)，参见图 2.2.11. 图 2.2.12 给出了当 $c_1=2$，$c_2=-2$ 时$(t, x_1(t))$的时距曲线图，这个解满足初始条件 $x_1(0)=2$，$x_2(0)=0$.

37

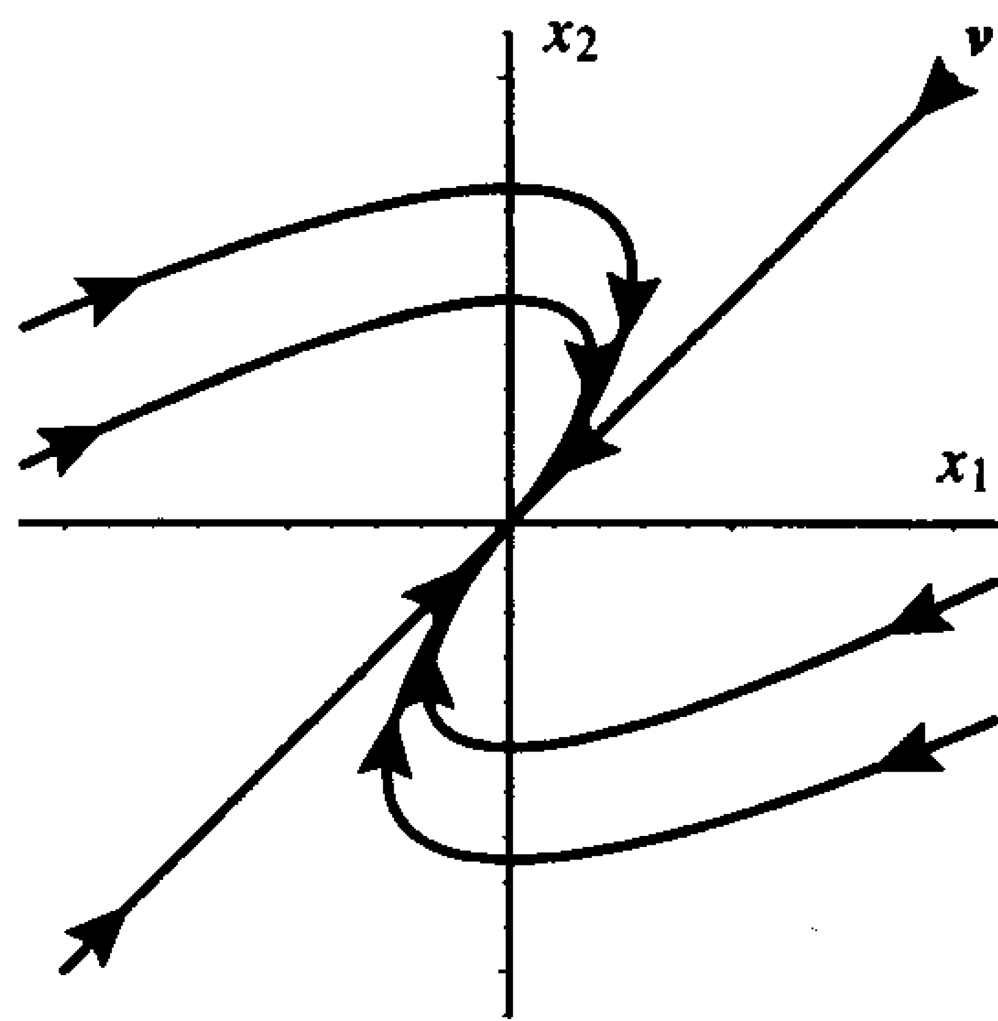


图 2.2.11 退化的稳定结点——例 2.2.12 的相图

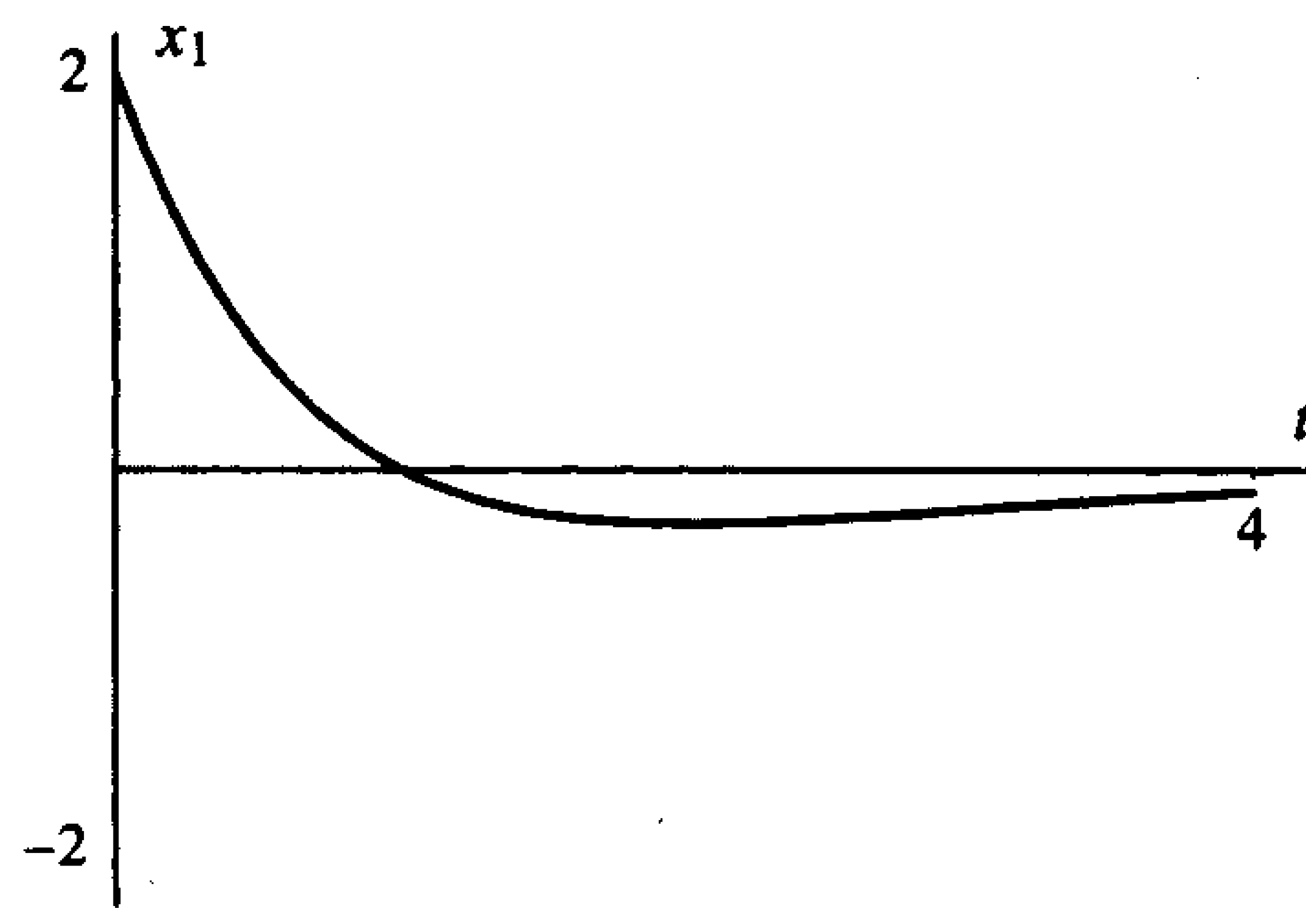


图 2.2.12 退化的稳定结点——例 2.2.12 解的第一个分量 x_1 在 $c_1=2$，$c_2=-2$ 时的时距曲线图

可以看出，解的各个分量可以改变一次符号，且它趋向于零时并不振荡(即解等于零的点只能是有限个)，这是退化的稳定结点与稳定结点的一个最重要的区别. ■

表 2.2.4 总结了有二重特征实根的稳定的二维线性系统相图的绘法，表 2.2.5 总结了任意二维线性系统相图的绘法.

表 2.2.4 二重特征实根相图的画法

我们只给出稳定情形，因为只要把 t 趋向于正无穷改为 t 趋向负无穷，就得到不稳定的情况.

首先，设有两个线性无关的特征向量(以它们为列的矩阵是对角矩阵).

1. 若存在两个线性无关的特征向量，则所有的解沿直线趋向原点，这个系统的原点叫做稳定星，参见图 2.2.13.

其次，设只存在一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}$，第二个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{w}$ 由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ 给出.

1. 绘出两条沿着由特征向量 $\boldsymbol{v}$ 确定的直线趋向于原点的轨线，在每条半直线上注明当 t 减小时解的运动方向.
2. 然后，画出有初始条件 $\boldsymbol{w}$ 的轨线，它沿着由向量 $\boldsymbol{v}$ 的正倍数确定的半直线趋向于原点(即轨线 $e^{\lambda t}\boldsymbol{w}+te^{\lambda t}\boldsymbol{v}$ 与曲线 $te^{\lambda t}\boldsymbol{v}$ 几乎重叠).
3. 绘出有初始条件 $-\boldsymbol{w}$ 的轨线，和前面的轨线关于原点对称.

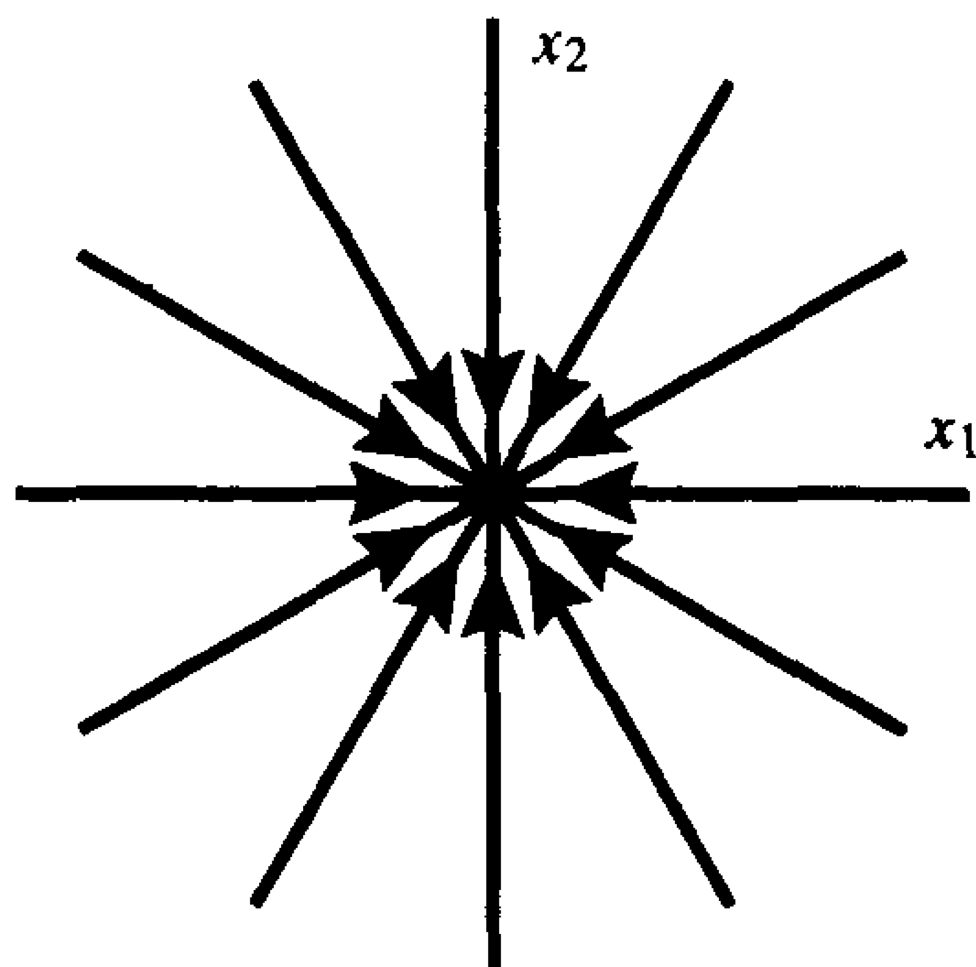


图 2.2.13 稳定星的相图

表 2.2.5 二维线性系统相图的画法

1. 根据特征方程 $\lambda^2-\tau\lambda+\Delta=0$ 确定特征值，其中 τ 表示系数矩阵的迹，Δ 是系数矩阵的行列式.
2. 把原点分为稳定结点、不稳定结点、稳定焦点、不稳定焦点、中心、重特征实根和零特征值等情况. 对于重特征实根，若以两个线性无关的特征向量为列的矩阵是对角矩阵，则原点是一个星系统，否则原点是退化结点.
3. 继续画出上述每一种情况的相图.

当使用计算机程序比如 Maple、Mathmatica 或者 Matlab 画相图时，有些步骤是有用的.

1. 因为相空间的边界大小对线性系统的相图没有影响，所以选取以原点为中心的任意大小的一块区域(即 $-5\leqslant x_1\leqslant 5$ 且 $-5\leqslant x_2\leqslant 5$). (这个绘图区域有时叫做绘图窗口.)
2. 若知道线性系统的类型，选取显示方程类型的初始条件，不然就利用初始条件试着决定线性系统的画法.
3. 对于实特征值系统，在表示特征向量倍数的每一条半直线的两侧附近取一点作为初始条件，对于不稳定的方向，或者沿着负倍数解的方向，或者从非常接近原点的初始条件开始. 对于稳定的方向，或者沿着正倍数解的方向，或者从接近原点的初始条件开始沿着正倍数的轨线运动.
4. 对于振动系统(有复特征值)，使用足够的初始条件显示相图.

例 2.2.13(三重特征值) 高维空间中重数更高的特征值的情况可分为很多类，这里仅举一例，考虑线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}.$$

其特征方程是 $0=(\lambda+2)^3$，它有三重根 $\lambda=-2$，向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$是特征向量，它满足$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=$

$\mathbf{0}$；$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$满足$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$，从而$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$；$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$满足$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{w}$，从而$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^3\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$，因此，方程的三个线性无关解是

$$\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathrm{e}^{-2t}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\quad 和\quad \mathrm{e}^{-2t}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right).$$

最后一个解也可以看成由如下方法得到的：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{z}&=\mathrm{e}^{-2t}\left(\boldsymbol{I}\boldsymbol{z}+t(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}+\frac{t^2}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{z}+\frac{t^3}{3!}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^3\boldsymbol{z}+\cdots\right)\\&=\mathrm{e}^{-2t}\left(\boldsymbol{z}+t\boldsymbol{w}+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{v}+\mathbf{0}\right).\end{aligned}$$

■

2.2.3　拟周期系统

本节通过讨论高维空间中的线性系统引出拟周期性的概念，一个有两个或两个以上不可公度周期的函数称为是拟周期函数．例 1 是非耦合调和振子(即任一振子的方程不含其他振子方程的变元)；例 2 虽然同样有两个不同的频率，但反映第一个变元运动的方程与两个变元的位置都有关(即它是耦合的调和振子)．

38 ~ 40

例 2.2.14(非耦合调和振子)　考虑非耦合调和振子

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1&=-\omega_1^2x_1\\\ddot{x}_2&=-\omega_2^2x_2.\end{aligned}$$

令$\dot{x}_1=x_3$，$\dot{x}_2=x_4$，则上面系统可化为一阶微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_3\\\dot{x}_2&=x_4\\\dot{x}_3&=-\omega_1^2x_1\\\dot{x}_4&=-\omega_2^2x_2.\end{aligned}$$

经简单计算可得它的特征值$\pm\mathrm{i}\omega_1$和$\pm\mathrm{i}\omega_2$，易知其通解中前两个分量x_1，x_2满足

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}&=c_1\cos(\omega_1t)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\sin(\omega_1t)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\&\quad+c_3\cos(\omega_2t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_4\sin(\omega_2t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=R_1\cos(\omega_1(t-\delta_1))\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+R_2\cos(\omega_2(t-\delta_2))\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$c_1=R_1\cos(\omega_1\delta_1),\qquad c_2=R_1\sin(\omega_1\delta_1),$$

$$c_3 = R_2\cos(\omega_2\delta_2) \quad 和 \quad c_4 = R_2\sin(\omega_2\delta_2).$$

因此通解中的四个任意常数用 R_1, R_2, δ_1, δ_2 比用 c_1, c_2, c_3, c_4 要好. 若 R_1, R_2 都不等于零，则这个解是以 T 为周期的周期解当且仅当存在整数 k, m 使得

$$T\omega_1 = k2\pi \quad 和 \quad T\omega_2 = m2\pi,$$

$$T = \frac{k2\pi}{\omega_1} = \frac{m2\pi}{\omega_2},$$

即

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{k}.$$

因此，要使它为周期解，两个频率的比值必须是有理数，若这个比值是无理数，则此解不可能是周期解，且它由两个不同频率产生，这种类型的解称为拟周期的(quasiperiodic). 图 2.2.14 中给出了 $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{2}$, $R_1 = R_2 = 1$, 且 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ 时方程的解在 (x_1, x_2) 平面上的时距曲线图.

可以看出解趋向于填满整矩形区域 $-1 \leqslant x_1$, $x_2 \leqslant 1$, $x_1 + x_2$ 的时距曲线图由图 2.2.15 中给出.

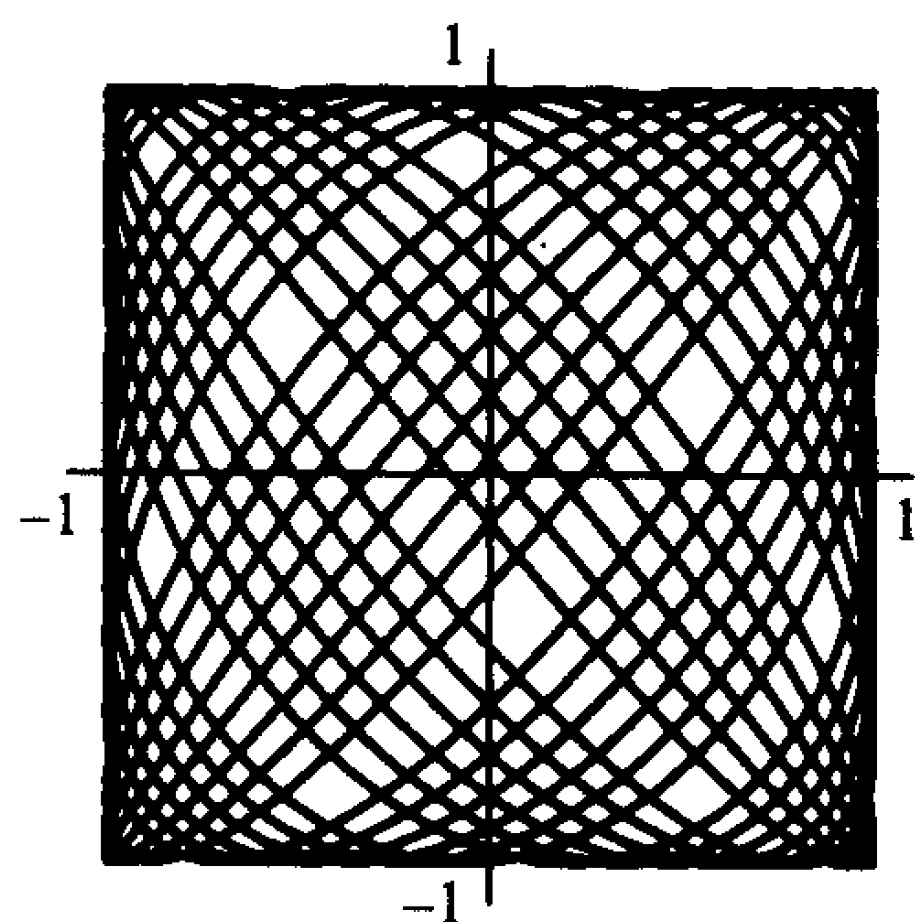


图 2.2.14　例 2.2.14 的拟周期解 $(x_1(t), x_2(t))$ 的图像

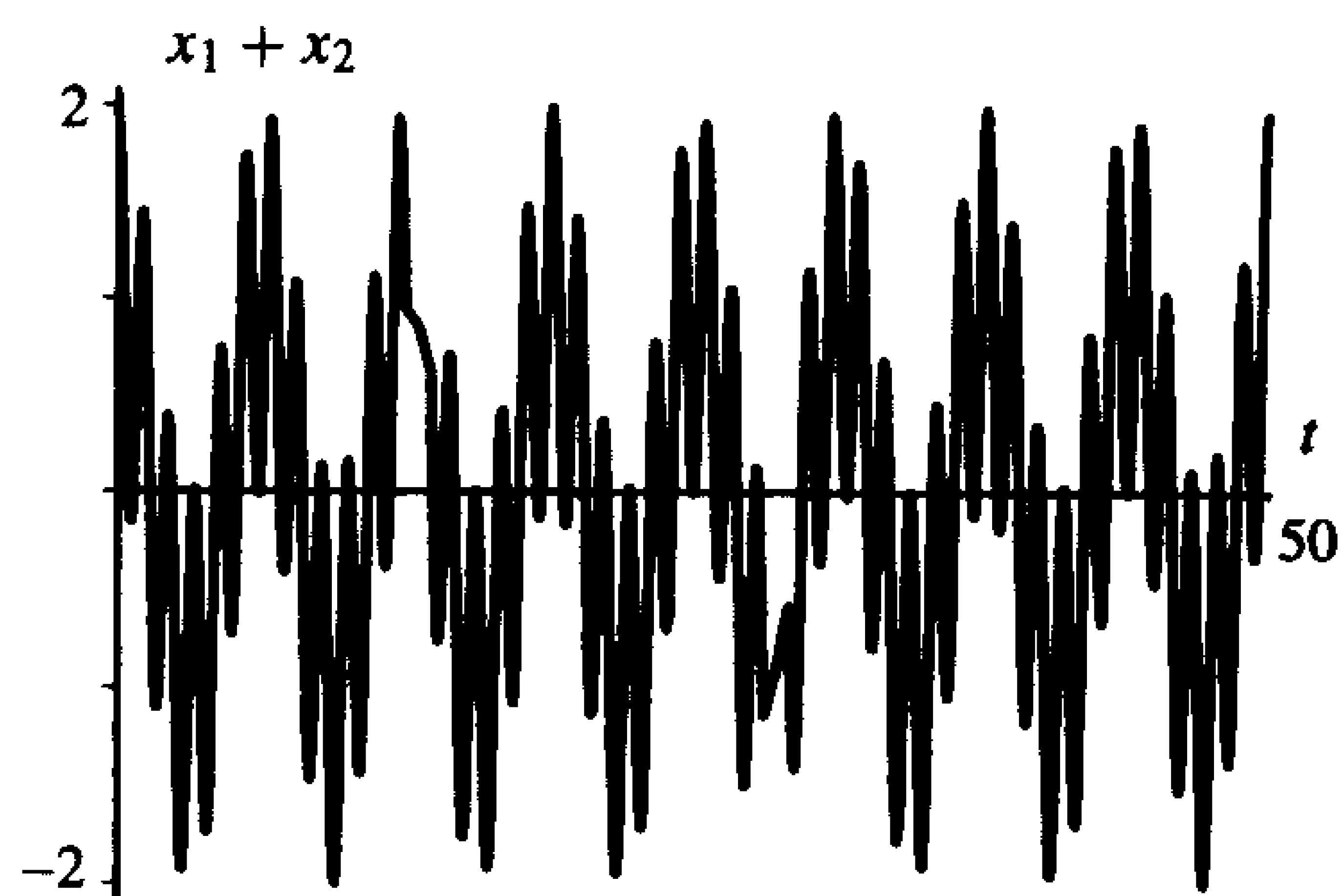


图 2.2.15　例 2.2.14 的拟周期解 $(x_1(t), x_2(t))$ 的时距曲线图 ■

例 2.2.15(耦合调和振子)　设在水平面上有两个用弹簧连接的质量都是 m 的物体，在两端也用弹簧与固定墙面连接，从而重力与水平面的支持力相互抵消，如图 2.2.16 所示，进一步假设没有摩擦力，物体只受弹簧弹力作用. 左边的物体称为是第一个物体，它与左侧墙面相连的第一个弹簧的弹性系数设为 k_1，第二个物体与右侧墙面相连的第二个弹簧的弹性系数也是 k_1，连接两物体的第三个弹簧的弹性系数是 k_2，令 x_1 表示第一个物体离开平衡位置点的位移，x_2 表示第二个物体离开平衡位置点的位移，若第一个物体向右移动(x_1 取正值)，第一个弹簧因被拉伸而产生恢复力 $-k_1x_1$，中间的弹簧因被压缩而产生恢复力 $-k_2x_1$，如果此时第二个物体向右运动，中间的弹簧因被压缩而对第一个物体施加力 k_2x_2，总之第一个物体所受合力为 $-k_1x_1 - k_2x_1 + k_2x_2 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2$，这个力等于第一个物体的质量与它的加速度的乘积，从而物体的运动方程为

$$m\ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2.$$

41 ~ 42

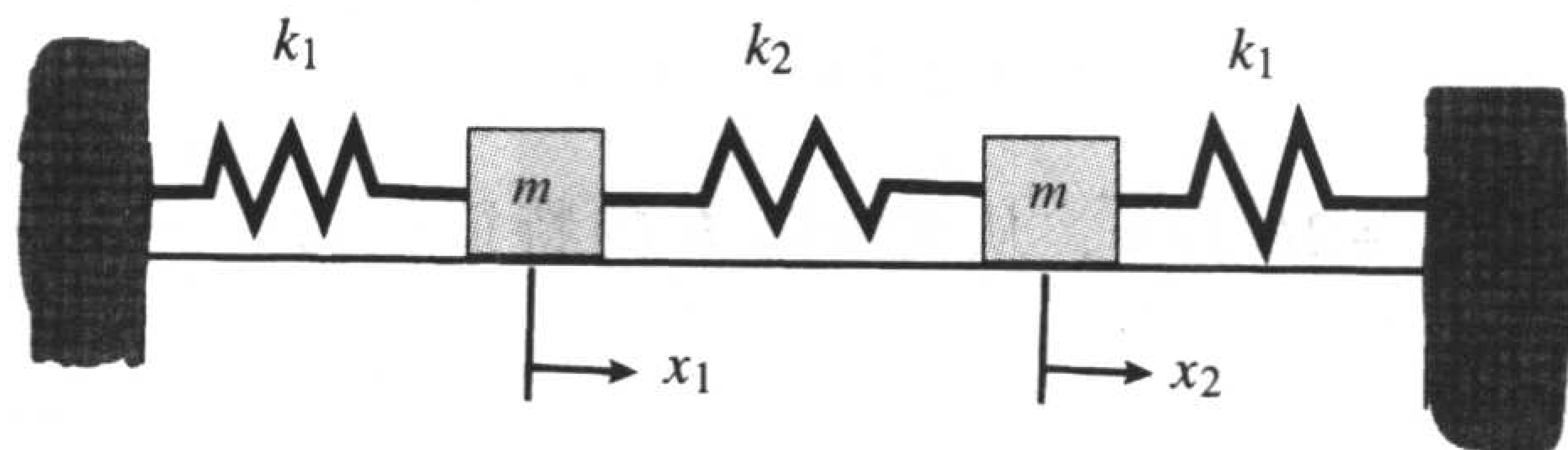


图 2.2.16　两个耦合振子

第二个物体上的受力情况完全一样，所以只要在以上方程中交换两个指标 x_1，x_2 便得到第二个物体的运动方程. 从而该混合系统的方程为

$$m\ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2,$$

$$m\ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_1 + k_2)x_2.$$

若令 $\dot{x}_1 = x_3$，$\dot{x}_2 = x_4$，则以上系统可化为一阶微分方程组

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m} & \dfrac{k_2}{m} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_2}{m} & -\dfrac{k_1 + k_2}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_1 + k_2}{m} & \dfrac{k_2}{m} \\ \dfrac{k_2}{m} & -\dfrac{k_1 + k_2}{m} \end{bmatrix}$$

表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左下角的 2×2 矩阵块，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量设为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 都是二维列向量，则

$$\lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{v} \end{bmatrix};$$

令等式两边对应的元素相等，则有

$$\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{v} \quad 和 \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{w} = \lambda^2 \boldsymbol{v}.$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的平方是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的特征值. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程是

$$\lambda^4 + \frac{2(k_1 + k_2)}{m}\lambda^2 + \frac{(k_1 + k_2)^2 - k_2^2}{m^2} = 0.$$

它的根为

$$\lambda^2 = \frac{-(k_1 + k_2) \pm k_2}{m} = -\frac{k_1}{m}, \quad -\left(\frac{k_1 + 2k_2}{m}\right),$$

即

$$\lambda = \pm i\omega_1, \quad \pm i\omega_2$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$，$\omega_2 = \sqrt{(k_1+2k_2)/m}$，从而矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的特征值为 $-\frac{k_1}{m}$，$-\left(\frac{k_1+2k_2}{m}\right)$，易知它们对应的特征向量分别是

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

这两个向量恰是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的前两个分量，因此方程组通解的前两个分量可表示为

43

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = R_1\cos(\omega_1(t-\delta_1))\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + R_2\cos(\omega_2(t-\delta_2))\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},$$

其中 R_1，R_2，δ_1，δ_2 是任意常数，上面和式的第一部分表示的解对应于两物体沿同一方向运动且中间的弹簧保持自由状态时的情况. 此时运动的频率仅由两端弹簧的弹性系数 k_1 决定. 和式的第二部分表示的解对应于两物体关于中心位置做有规律对称运动——靠近、远离、再靠近、再远离……，在这种情况下，三个弹簧既拉伸又压缩，所以运动的频率与 k_1、k_2 都有关.

如果 R_1，R_2 均不等于零，则方程的解是周期解当且仅当 ω_2/ω_1 是有理数；若这个比值是无理数，则方程的解永远不会重复，但它是由两个频率 ω_1，ω_2 所决定的. 在后一种情况中解是拟周期的，这与例 2.2.14 的耦合振子是一样的. ■

一般地，拟周期函数包含两个以上频率，有限个频率 ω_1，…，ω_n 的集合称为*有理相关的*(rationally dependent)，如果存在不全为 0 的整数 k_1，…，k_n，使得

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0.$$

有限个频率 ω_1，…，ω_n 的集合称为*有理无关的*(rationally independent)，如果它不是有理相关的；也就是说，若存在整数 k_1，…，k_n，使得

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0$$

则 k_1，…，k_n 全为 0. 若一组频率是有理相关的，则其中一个频率一定能写成其他频率的有理系数线性组合；例如，若 $k_n \neq 0$，则

$$\omega_n = -\frac{k_1}{k_n}\omega_1 - \cdots - \frac{k_{n-1}}{k_n}\omega_{n-1}.$$

若频率组是有理无关的，则这组频率中的任何一个都不能写成其他频率的有理系数线性组合；一个*拟周期函数*(quasiperiodic function) $h(t)$ 是由有限个有理无关的频率组 ω_1，…，ω_n 生成的，并可以写成 $h(t) = g(\omega_1 t, \cdots, \omega_n t)$，其中 g 关于每一个变量都以 1 为周期，例如，$h(t)$ 可写成 $\cos(\omega_j t)$ 与 $\sin(\omega_j t)$ 的线性组合，其中 $j = 1$，…，n.

2.3　含时变强迫项的非齐次线性系统

本章最后要讨论的是常系数和含有一个时变强迫项的线性系统.

考虑一般的*非齐次线性微分方程*(nonhomogeneous linear system of differential equation)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t). \tag{2.3.1}$$

其相应的*齐次线性微分方程*(homogeneous linear system of differential equation)

$$\dot{x} = Ax. \tag{2.3.2}$$

下面的定理给出了方程(2.3.1)和(2.3.2)的解之间的关系.

定理 2.3.1 (a)设 $x^1(t)$ 和 $x^2(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的两个解，则 $x^1(t)-x^2(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个解.

(b)设 $x^{(p)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解，$x^{(h)}(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个解，则 $x^{(p)}(t)+x^{(h)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解.

44

(c)设 $x^{(p)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解，$M(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个基矩阵解，则非齐次线性微分方程(2.3.1)的任一解可表示为 $x^{(p)}(t)+M(t)c$，其中 c 为常向量.

定理 2.3.1 表明只要求出非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个特解并加上齐次线性微分方程(2.3.2)的通解就可以得到非其线性微分方程的解. 正如二阶标量微分方程那种情况，有时是可能猜到一个解的(这一方法常被称为待定系数法). 更一般的方法是参数变易法，这一方法虽然计算比较复杂，但非常有效. 下面的定理利用矩阵的指数形式来介绍用常系数非齐次微分方程研究的参数变易法(method of variation of parameters). 对于形式更一般的基矩阵解，由于其表示起来比较杂乱，这里不再介绍，但在举例时，矩阵的指数形式通常是利用基矩阵解计算的.

定理 2.3.2(参数变易) 满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的非齐次线性微分方程的解 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-As}g(s)\,ds\right).$$

定理的证明见本章末. 可见第一项是齐次线性微分方程的解. 在积分中，被积函数(integrand)可看作是利用齐次线性方程的基本矩阵把非齐次项的扰动(perturbation)拉回到 $t=0$，积分又把这些扰动加起来，然后通过基本矩阵把它们转化到时间 t 的形式.

因为通过幂级数(power series)直接计算 e^{At} 是比较困难的. 若利用这里介绍的求解方法可求得任意基本矩阵 $M(t)$，则 $e^{At}=M(t)M(0)^{-1}$. 一旦得到 e^{At}，在求 e^{At} 的公式中用 $-s$ 代替 t，则 $(e^{As})^{-1}=e^{-As}$ 的计算就比较简单了. 需要注意的是，对于利用该求解方法得到的基矩阵解，通常有 $M(t)^{-1}\neq M(-t)$.

这些计算一般都比较复杂，下面给出一个容易操作的简单例子：

例 2.3.3 考虑

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \omega_0\\ -\omega_0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}0\\ \sin(\omega t)\end{bmatrix},$$

其中 $\omega\neq\omega_0$. 齐次微分方程的解为

$$e^{At} = \begin{bmatrix}\cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t)\\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t)\end{bmatrix} \quad 和 \quad e^{-As} = \begin{bmatrix}\cos(\omega_0 s) & -\sin(\omega_0 s)\\ \sin(\omega_0 s) & \cos(\omega_0 s)\end{bmatrix}.$$

45

定理中的积分项是

$$x^p(t) = Be^{At}\int_0^t e^{-As}\begin{bmatrix}0\\ \sin(\omega s)\end{bmatrix}ds$$

$$= Be^{At}\int_0^t \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 s)\sin(\omega s) \\ \cos(\omega_0 s)\sin(\omega s) \end{bmatrix} ds$$

$$= \frac{B}{2}e^{At}\int_0^t \begin{bmatrix} \cos((\omega_0+\omega)s) - \cos((\omega_0-\omega)s) \\ \sin((\omega_0+\omega)s) + \sin((-\omega_0+\omega)s) \end{bmatrix} ds$$

$$= \frac{B}{2}e^{At}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_0+\omega}\sin((\omega_0+\omega)t) - \frac{1}{\omega_0-\omega}\sin((\omega_0-\omega)t) \\ \frac{-1}{\omega_0+\omega}\cos((\omega_0+\omega)t) - \frac{1}{\omega-\omega_0}\cos((\omega-\omega_0)t) \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{B}{2}e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega_0+\omega} + \frac{1}{\omega-\omega_0} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{B}{\omega_0^2-\omega^2}\begin{bmatrix} \omega_0\sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{bmatrix} + \frac{B}{2}e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{\omega-\omega_0} \end{bmatrix}.$$

（最后一个等式需要代数和三角法中的一些恒等式.）通解(general solution)是

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}^p(t)$$

$$= e^{At}\left(\boldsymbol{x}_0 + \frac{B}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega_0+\omega} + \frac{1}{\omega-\omega_0} \end{bmatrix}\right) + \frac{B}{\omega_0^2-\omega^2}\begin{bmatrix} \omega_0\sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

上式中的第一项有周期$\frac{2\pi}{\omega_0}$，第二项有周期$\frac{2\pi}{\omega}$，若这两项的和有周期，则必存在时间 T 使 $T\omega_0 = k2\pi$，$T\omega = m2\pi$，因此$\frac{\omega}{\omega_0}$必为有理数. 因此当且仅当这两个频数的比率是有理数时其特解为周期解；若该比率不是有理数，这个解有两个没有共同周期的频数，这两个频数是有理独立的. 正如前面已讨论过的耦合和非耦合振子，这种相互独立的有理频数的组合被称为拟周期的(quasiperiodic)，参见图 2.3.1.

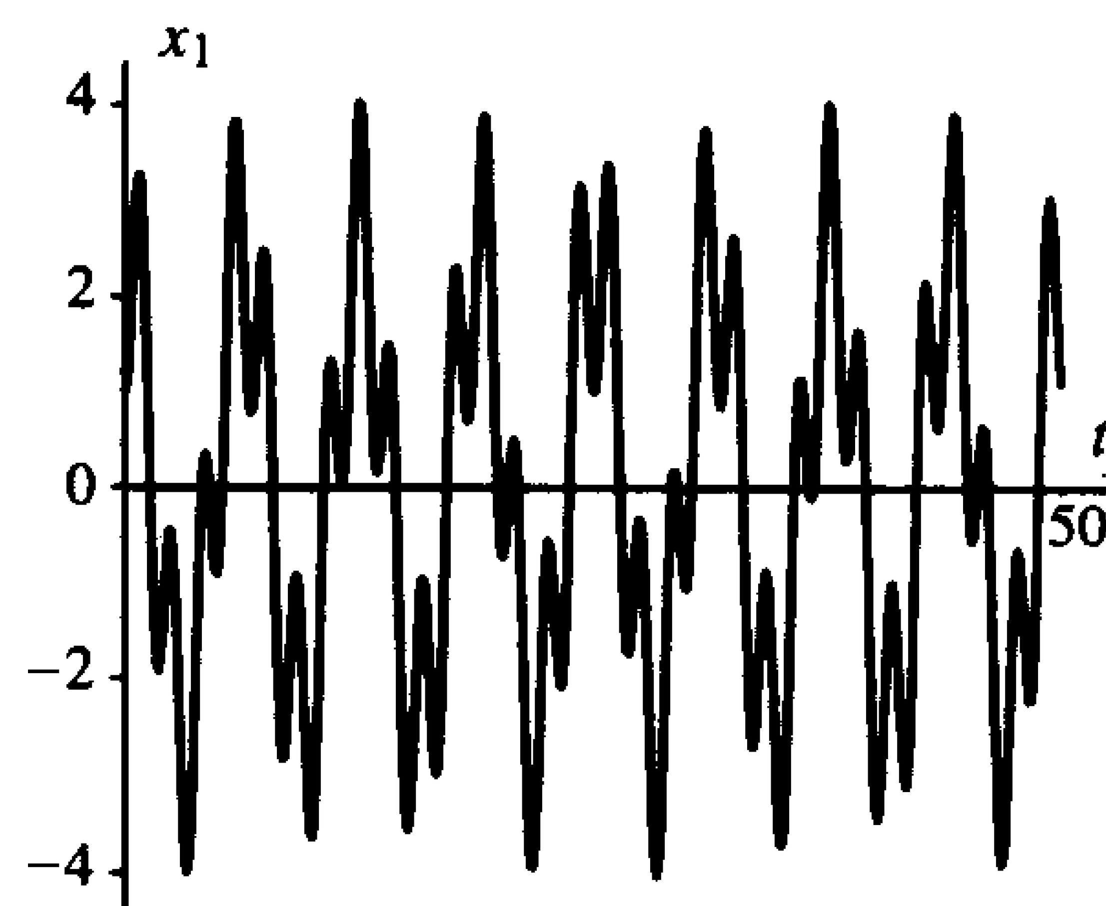


图 2.3.1　例 2.3.3 的拟周期解　■

2.4　应用

2.4.1　混合流

封闭系统：连通容器中液体的浓度问题

下面考虑三个不同容器中盐溶液的混合问题，三个容器的连接如图 2.4.1 所示. 设每个容器的容积都是 V，每个容器内的物质一样多(快速扩散和混合的结果)，因此在给定的 t 时刻，

第 j 个容器中盐溶液的浓度是 $C_j(t)$，所以该容器中的盐溶液在 t 时刻的量是 $C_j(t)V$. 46

设盐溶液每分钟从第一个容器流向第二个容器的速度恒为 K_1，每分钟从第二个容器流向第三个容器和第三个容器流向第一个容器的速度均恒为 K_2，最后设每分钟从第二个容器流回第一个容器的速度恒为 K_3，假设 $K_1=K_2+K_3$，那么对每一个容器而言流入和流出的量是相等的，参见图 2.4.1.

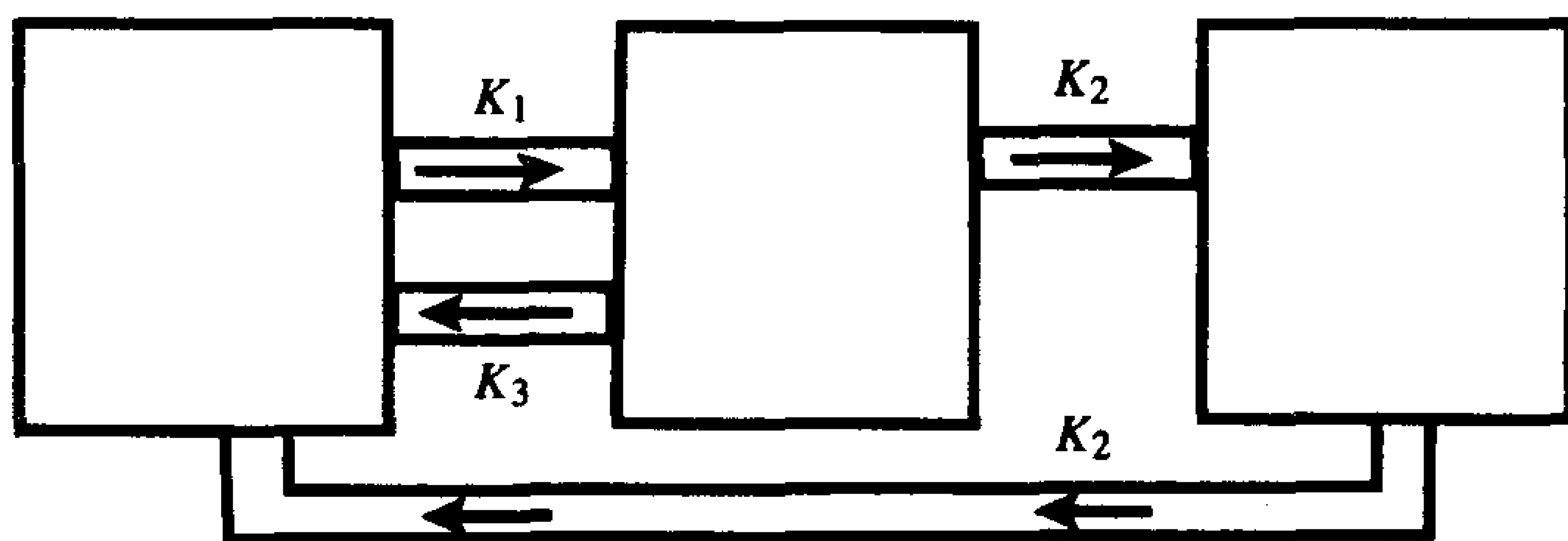


图 2.4.1 封闭系统内容器间液体流动方向

从第一个容器流到第二个容器的盐溶液的量是 $K_1C_1(t)$，从第二个容器流到第三个容器的盐溶液的量是 $K_2C_2(t)$，从第三个容器流到第一个容器盐溶液的量是 $K_2C_3(t)$，而从第二个容器流回第一个容器的盐溶液的量是 $K_3C_2(t)=(K_1-K_2)C_2(t)$，因此从第二个容器流出的盐溶液的总量为 $K_3C_2(t)+K_2C_2(t)=K_1C_2(t)$，那么每个容器内物质的总量可分别用微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}VC_1 = -K_1C_1+(K_1-K_2)C_2+K_2C_3$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}VC_2 = K_1C_1-K_1C_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}VC_1 = K_2C_2-K_2C_3.$$

方程的两端除以 V，设 $k=K_2/V$，$bk=K_3/V$，且 $K_1/V=k(1+b)$，可得方程

$$\begin{bmatrix}\dot{C}_1\\ \dot{C}_2\\ \dot{C}_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-(1+b) & b & 1\\ (1+b) & -(1+b) & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{bmatrix}.$$

47

经过直接但较冗长的计算可得特征方程

$$0=-\lambda[\lambda^2+(3+2b)k\lambda+(3+3b)k^2].$$

该方程有特征值 0 和

$$\frac{-(3+2b)k\pm k\sqrt{4b^2-3}}{2}.$$

$\lambda=0$ 对应的特征向量是

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

这与

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1 + C_2 + C_3) = 0,$$

以及流的总量是一个常数的事实吻合.

当 $b>0$ 时，$(3+2b)^2=4b^2+12b+9>4b^2-3$，因此这两个特征值总有非负实部. 当 $b\geqslant\sqrt{3}/2$ 时，它们是两个实根；当 $0<b<\sqrt{3}/2$ 时，它们是两个复根. 不管在哪种情况下，当 t 趋于无穷时，这两特征值相对应的解都趋于0，因此任何解都可以表示为一个具有相等分量的恒定解与另外两个当 t 趋于无穷时趋于0的解的和；也就是说，任何解都趋向于一种极限状态即三个容器中盐溶液的浓度相同.

连通容器中液体的浓度问题：输入和输出

这一节要考虑在容积均为 V 的两个不同容器中，不同浓度盐溶液的混合问题，两容器的连接如图2.4.2所示. 盐溶液从系统外部流入容器一的速度是 kV；从容器二流到系统外部的速度也是 kV；盐溶液从容器二流向容器一的速度是 bkV；而盐溶液从容器一流向容器二的速度是 $(1+b)kV$. 假设给定一时间函数，从系统外部流入容器一的盐溶液的浓度是 $C_0(t)$，则两容器内盐溶液浓度的变化可用微分方程表示为

$$\dot{C}_1 = -k(1+b)C_1 + kbC_2 + kC_0(t)$$

$$\dot{C}_2 = kC_1 - k(1+b)C_2,$$

或者

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -(1+b) & b \\ (1+b) & -(1+b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} C_0(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

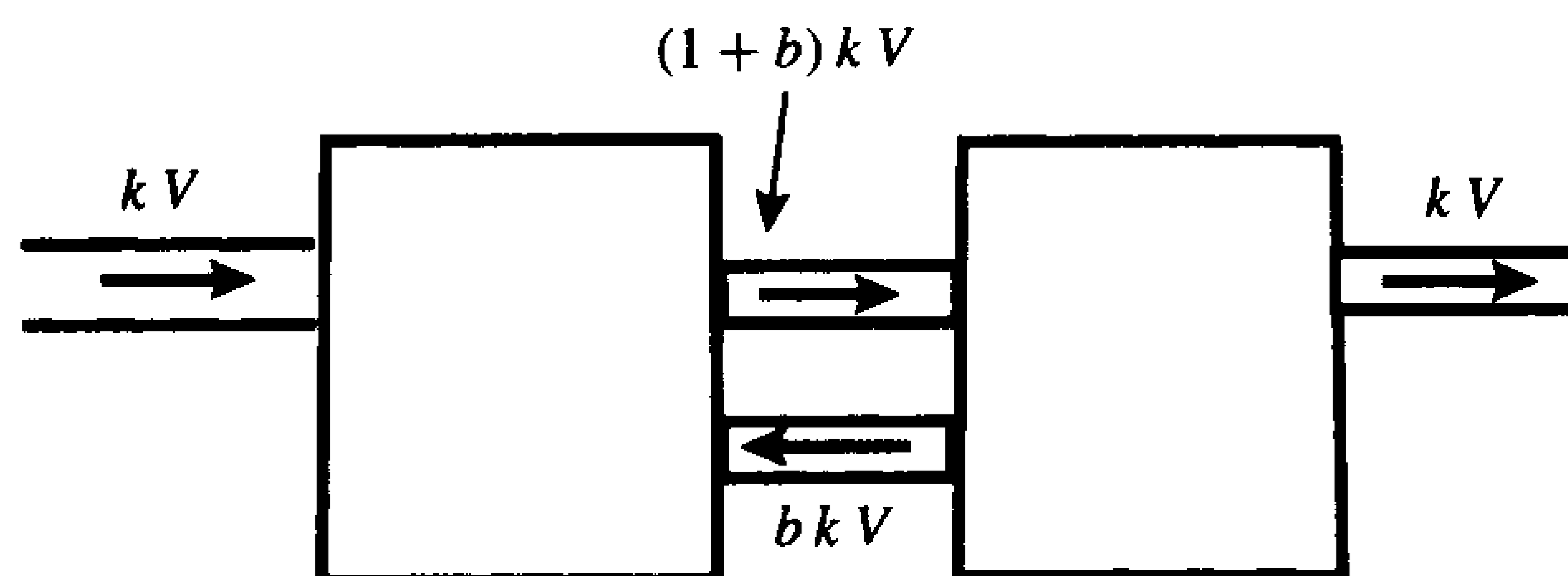


图2.4.2　两容器间流动液体的输入和输出

该矩阵的特征值是 $\lambda=-k(1+b)\pm k\sqrt{b+b^2}$，因为当 b 为正数时 $(1+b)^2=1+2b+b^2>b+b^2$，故该特征值总是负实数，所以该系统会依据盐溶液流入的速度而收敛于一个唯一的特解.

2.4.2 恶性肿瘤模型

基于 Liotta 和 DeLisi 的研究结果，Kaplan 和 Glass [**56**] 提出了恶性肿瘤转移模型. 在 Liotta 和 DeLisi 的实验中，他们将瘤细胞注入实验鼠的血液中，血液携带这些细胞到达肺部毛细血管，其中一些进入肺组织. 通过放射线透视可测量到癌细胞数量随时间变化的情况，它们的衰变速度并不遵循癌细胞单纯转移时的简单指数衰变模型，因此他们建议将这个模型分成两个独立的部分：肺组织模型和毛细血管模型. 第一个变量 x_1 表示毛细血管中癌细胞的数量；第二个变量 x_2 表示肺组织中癌细胞的数量；假设癌细胞从毛细血管到肺组织的转移速度是 x_1 和 $\beta_2 x_1$ 的线性函数；被毛细血管排斥及由血液携带走的癌细胞的损失速度设定为 $-\beta_1 x_1$；最后，肺组织中癌细胞的损失量设定为 $-\beta_3 x_2$，那么该系统是线性微分方程，可表示为

$$\dot{x}_1 = -(\beta_1 + \beta_2)x_1$$
$$\dot{x}_2 = \beta_2 x_1 - \beta_3 x_2.$$

该系统的矩阵是

$$\begin{bmatrix} -(\beta_1+\beta_2) & 0 \\ \beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix},$$

它有特征值 $-(\beta_1+\beta_2)$ 和 $-\beta_3$，以及特征向量

$$\begin{bmatrix} \beta_3 - (\beta_1+\beta_2) \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

若初始条件为 $x_1(0)=N$ 和 $x_2(0)=0$，则方程的解为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \left(\frac{N}{\beta_3-(\beta_1+\beta_2)}\right)\begin{bmatrix} \beta_3-(\beta_1+\beta_2) \\ \beta_2 \end{bmatrix} e^{-(\beta_1+\beta_2)t}$$
$$- \left(\frac{\beta_2 N}{\beta_3-(\beta_1+\beta_2)}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\beta_2 t}.$$

在实验中，毛细血管和肺组织中放射线的总量是可测的或者可表示为：

$$x_1(t)+x_2(t) = \left(\frac{(\beta_3-\beta_1)N}{\beta_3-(\beta_1+\beta_2)}\right)e^{-(\beta_1+\beta_2)t} - \left(\frac{\beta_2 N}{\beta_3-(\beta_1+\beta_2)}\right)e^{-\beta_2 t}.$$

该模型分为两部分，所以衰变速度共有两个而不是一个. 通过比较从实验中得到的数据，他们发现单位小时内 $\beta_1=0.32$，$\beta_2=0.072$ 和 $\beta_3=0.02$ 时治疗效果最佳.

利用该模型，选用不同的癌症治疗方案就有可能从中选出符合以上参数的最有效的治疗方案.

49

2.4.3 糖尿病检测

基于[**1**]的工作，M. Braun 在论著[**22**]中提出了糖尿病检测模型，其中 g 和 h 是患者经过几个小时空腹后身体内葡萄糖和激素的浓度水平相对于基础水平的偏差. 当病人住进医院葡萄糖水平增加到 $g(0)$ 时，在某一确定的时刻身体的反应是可测的. 设激素水平 $h(0)=0$，在对

葡萄糖水平进行控制后从 $t=0$ 时起身体的反应是可测的，假定这些反应是线性的(或者如4.4节中的方程(4.4.1)，系统在接近平衡点时是线性的)，可得微分方程：

$$\dot{g} = -m_1 g - m_2 h$$

$$\dot{h} = m_4 g - m_3 h,$$

其中 m_j 是参数. 齐次方程部分的特征方程是：$\lambda^2+\tau\lambda+\Delta=0$，其中 $\tau=m_1+m_3$，$\Delta=m_1m_3+m_2m_4$. 设 $\tau^2-4\Delta=-\omega^2<0$，则其特征值是 $\frac{-\tau\pm i\omega}{2}$.

所有的解都有一个因子 $e^{-\tau t/2}$，或是 $\cos(\omega t)$ 或是 $\sin(\omega t)$，正如二阶标量微分方程的解一样，任一解的 g 分量都可以表示为

$$g(t) = Ae^{-\tau t/2}\cos(\omega(t-\delta)),$$

其中 A 和 δ 是常数. 对一指定的病人，常数 m_j、幅角(amplitude)A 和相移(phase shift)δ 都是未知数，而常数 m_j 的值无需确定，只需确定 A，δ 和变量 τ，ω 即可.

当病人达到基础水平时测定其葡萄糖水平，并且以后不断测量，这样就有可能确定 t_j 时刻的 g_j. 因为有4个未知常数，所以在 t_j 时刻至少要观测4次葡萄糖水平才可根据这些常数来解方程

$$g_j = Ae^{-\tau t_j/2}\cos(\omega(t_j-\delta)),$$

并不是只读取4次数据就可以了，最好多次读取数据并运用最小二乘法(least square)以便使下式的数量最小化：

$$E = \sum_{j=1}^{n}\left[g_j - Ae^{-\tau t_j/2}\cos(\omega(t_j-\delta))\right]^2.$$

(关于最小二乘法可见文献[**64**].) 文献[**1**]的一份医疗研究报告中提到，采用这种方法读取时的微小误差会导致常数 τ 出现很大的误差，而常数 ω 的可信度较高一些，因此 ω 是用来确定病人是否患有糖尿病的比较好的数据. ω 也是血液中葡萄糖和激素水平摆动周期的必要常数：未得糖尿病的人的摆动周期 $T_0=2\pi/\omega$ 小于四小时；糖尿病患者的周期 T_0 大于四小时.

2.4.4 电路

这一节的研究对象是包含电阻器(resistor)(R)、感应器(inductor)(L)和电容器(capacitor)(C)的电路(electric circuit). 最简单的电路只有一个相互连接形成回路(loop)的元件. 电路中包含一个元件的部分叫支路(branch). 支路的连接点称为节点(node). 图2.4.3是最简单的一个例子，其中包括三条支路和三个节点. 设 i_R、i_L 和 i_C 分别为电阻器、感应器和电容器中的电流强度(current)；相似地，设 v_R、v_L 和 v_C 分别为流经电路的三条支路时所产生的电压(voltage). 如同水流过管道，电流强度就像是水流动的速度，而电压则像是水压. 基尔霍夫(Kirchhoff)电流论认为流入一个节点的总电流强度必须等于流出该节点的总电流强度. 这就意味着在现正讨论的电路中利用刚才所设符号有 $|i_R|=|i_L|=|i_C|$，假定支

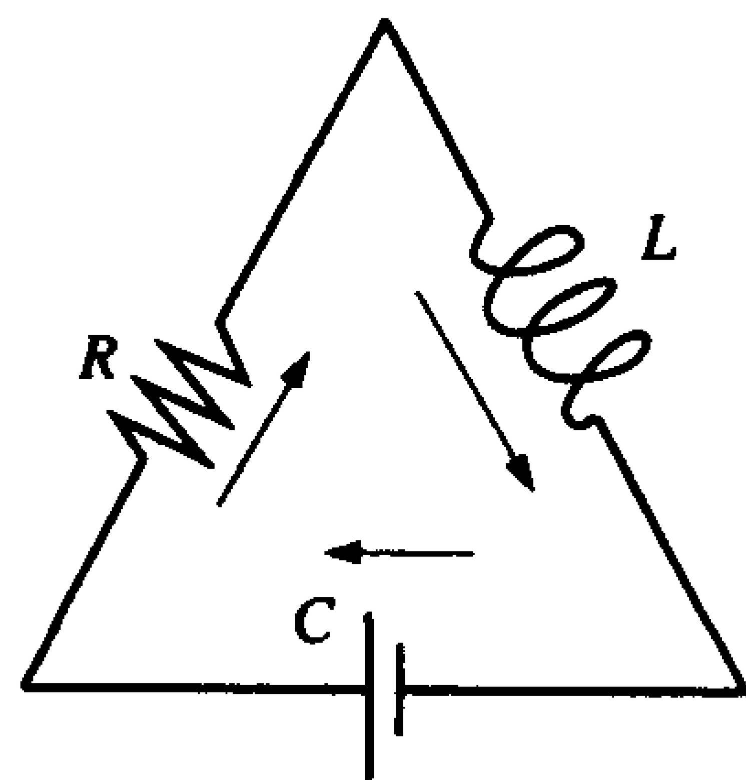


图2.4.3 RLC电路

路中电流的流动方向如图 2.4.3 所示，则有

$$i = i_R = i_L = i_C.$$

由基尔霍夫的电压论知任何回路中的电压总和都为 0. 在现在的例子中正好说明：

$$v_R + v_L + v_C = 0.$$

下面描述一下这些元件的性能以及确定变量变化所需遵循的法则. 电阻由电流强度 i_R 和电压 v_R 之间的关系所确定. 这一节只考虑满足

$$v_R = Ri_R$$

的线性电阻器，其中 $R>0$ 是常数，这就是欧姆定律. 后面会讨论 v_R 作为 i_R 的非线性函数或是讨论 i_R 作为 v_R 的非线性函数的情况.

感应器的特性是利用电压 v_C 给出电流对时间的导数 $\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$，根据法拉第定律有

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = v_L,$$

其中常数 $L>0$ 称作感应系数(inductance). 一般来说，感应器是由一个线圈构成的，改变线圈中电流感应产生的磁场可以使线圈中产生电压差.

电容器的特性是可利用电流 i_C 给出电压对时间的导数 $\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$：

$$C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = i_C,$$

其中常数 $C>0$ 称作电容(capacitance). 一般来说，电容器是由被绝缘物质隔开的两块平行金属板构成的.

设两个变量 $x = i_R = i_L = i_C$，$y = v_C$，则 $v_R = Rx$，而且 $v_L = -v_C - v_R = -y - Rx$，那么微分方程系统为

$$L\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Rx - y$$

$$C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

它的特征方程是

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0,$$

该方程有特征值

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}.$$

这一系统总有负实部的特征值. 若 $R^2 \geqslant 4L/C$, 则该系统有实根; 若 $R^2 < 4L/C$, 则该系统有复根. 对两种情形中的任一种, 电路中无电流和电压的变化时系统的解都趋于(0, 0).

2.5 理论与证明

基本解集

主要研究常系数线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{2.5.1}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素都为常数. 然而有时也需要考虑 $\boldsymbol{A}$ 中的元素随时间 t 变化的情形, 即 $\boldsymbol{A}(t)$(一般总是假设 $\boldsymbol{A}(t)$ 中的元素对于所有时间都是有界的). 由矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 构成的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{2.5.2}$$

称为依赖于时间的线性微分方程(time-dependent linear differential equation). 此类方程解的线性组合仍是该类方程的解. 2.2 节中给出的求解方法不适用于这类系统, 尽管这类系统的基矩阵解很难求得, 但还是存在的.

解的唯一性

如 2.1 节中提到的, 解的唯一性可由定理 3.1.6 处理非线性方程的一般方法得到. 然而对于线性方程这种情况, 可以给出一个更简单的证明.

现在需要用一引理来求逆矩阵的导数, 引理内容如下:

引理 2.5.1 设方阵 $\boldsymbol{M}(t)$ 中的元素是 t 的可微函数, 且设 $\boldsymbol{M}(t)$ 是可逆的(即 $\det(\boldsymbol{M}(t) \neq 0)$, 则 $\boldsymbol{M}(t)$ 关于时间 t 的逆的导数可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)^{-1} = -\boldsymbol{M}(t)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)\right)\boldsymbol{M}(t)^{-1}.$$

特别地, 若 $\boldsymbol{M}(t)$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基矩阵解, 则

52

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)^{-1} = -\boldsymbol{M}(t)^{-1}\boldsymbol{A}(t).$$

证明 $\boldsymbol{M}(t)$ 与其逆矩阵的乘积是单位矩阵, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{I} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{M}(t)^{-1}\boldsymbol{M}(t)) \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)^{-1}\right)\boldsymbol{M}(t) + \boldsymbol{M}(t)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)\right),\end{aligned}$$

且

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)^{-1}\right)\boldsymbol{M}(t) = -\boldsymbol{M}(t)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)^{-1}\right) = -\boldsymbol{M}(t)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)\right)\boldsymbol{M}(t)^{-1}.$$

在上面第二个等式中用 $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{M}(t)$ 代替 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)^{-1} = -\boldsymbol{M}(t)^{-1}(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{M}(t))\boldsymbol{M}(t)^{-1}$$

$$= -\boldsymbol{M}(t)^{-1}\boldsymbol{A}(t).$$ ■

定理 2.1.2　*设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，它的元素都是 t 的连续函数，则对任意的 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}$，$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 存在唯一解 $\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0;\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$.*

证明　设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是满足该初始条件的任意解，$\boldsymbol{M}(t)$ 是一个基矩阵解，为了明白 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(0)^{-1}\boldsymbol{x}_0$ 是否不同，先引入量 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{M}(t)^{-1}\boldsymbol{x}(t)$，则

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(t)^{-1}\right)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{M}(t)^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$= -\boldsymbol{M}(t)^{-1}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{M}(t)^{-1}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{y}(t)$ 的导数为 0 可知 $\boldsymbol{y}(t)$ 必为常数，而且有 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{M}(0)^{-1}\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(0)^{-1}\boldsymbol{x}_0$. 这就证明了满足该初始条件的任意解必定等于 $\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(0)^{-1}\boldsymbol{x}_0$（实际上，这基本上是参数变易法求非齐次方程解的证明过程，详见 2.5 节）. ■

任意时刻解的存在性

任意时刻线性方程的解都是存在的. 但这一结论对于非线性方程并不总是成立，其证明运用的是矩阵范数的概念. 首先来讲一下范数.

对给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和所有向量 $\boldsymbol{v}$，存在常数 C 使得

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\|\leqslant C\|\boldsymbol{v}\|,$$

把最小的常数 C 记为 $\|\boldsymbol{A}\|$，因此

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\|\leqslant \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|.$$

53

这一最小的常数被称作矩阵的范数(norm)(见附录 C). 通常不需要明确地计算出 $\|\boldsymbol{A}\|$，只需要知道其存在性即可，然而从定义可知其遵循

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{v}\|\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \max_{\|\boldsymbol{w}\|=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\|.$$

由上式可知 $\boldsymbol{A}$ 的范数并不容易求出，但可以通过矩阵考虑单位向量的像的长度的平方：

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\|^2 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}.$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 总为对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 有实特征值和正交向量. 若 $\boldsymbol{w}$ 为单位向量，则 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\|^2$ 的最大值必为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值，因此 $\boldsymbol{A}$ 的范数是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值的平方根. 这个最大特征值至少在理论上是可求的.

下面，看一个微分方程的主要结果.

定理 2.5.2　*设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n\times n$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}(t)$ 中的元素都为 t 的有界实函数. 则对任意的时间 t，方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解都存在.*

这一定理的证明方法比本章中其他结论的证明更先进、更简单，也容易理解，这里只给出简单的证明过程.

证明　先考虑解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的长度的平方：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}(t)\cdot\boldsymbol{x}(t)) = 2\boldsymbol{x}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$= 2\boldsymbol{x}(t)\cdot \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \leqslant 2\|\boldsymbol{x}(t)\|\cdot\|\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant 2\|\boldsymbol{A}(t)\|\cdot\|\boldsymbol{x}(t)\|^2.$$

由假设可知存在常数 C 使得对任意的时间 t，都满足 $\|A(t)\| \leqslant C$(对常系数情形取 $C = \|\boldsymbol{A}\|$)，所以对某常数 C，满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leqslant 2C\|\boldsymbol{x}(t)\|^2.$$

(这是引理 3.3.4 中格朗沃尔(Gronwall)不等式的一种特例.)上式两端除以 $\|\boldsymbol{x}(t)\|^2$ 并积分可得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{x}(0)\|^2 e^{2Ct} \quad 或$$
$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \|\boldsymbol{x}(0)\| e^{Ct}.$$

在有限时间内 $\|A(t)\|$ 不会趋于无穷，因此若解定义在 $t<t_+<\infty$ 上，则极限

$$\lim_{t\to t_+}\boldsymbol{x}(t)$$

必存在. 所以方程的解在 t_+ 时刻有定义并且解是定义在闭区间上. 另一方面，解的存在区间必为开集，因为在任意小的时间区间上都可以找到原方程的解，这与 $t_+<\infty$ 这一假设相矛盾，所以方程的解可以延拓到任意时刻. ■

54

解向量空间

定理 2.5.3　*考虑微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n\times n$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}(t)$ 中的元素都是 t 的有界实函数. 设*

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x}(\cdot):\ \boldsymbol{x}(t)\text{是微分方程的一个解}\},$$

则 $\mathcal{S}$ 是一个 n 维向量空间.

证明　因为 $\mathcal{S}$ 中的每个解在任何时刻 t 都存在，故由定理 2.1.1 可知通过解的线性组合可获得方程的一个解. 因此 $\mathcal{S}$ 是一个向量空间.

设 $\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基(实际上可以取其他任意基)，则存在满足初始条件 $\boldsymbol{u}^j$，$j=1, \cdots, n$ 的解 $\boldsymbol{x}^j(t)$. 令 $\boldsymbol{x}(t)$ 是 $\mathcal{S}$ 中满足初始条件 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意解，可把 $\boldsymbol{x}_0$ 表示为

$$\boldsymbol{x}_0 = a_1\boldsymbol{u}^1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}^n.$$

则

$$a_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + a_n\boldsymbol{x}^n(t)$$

是原方程满足初始条件 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个解. 由解的唯一性可知

$$\boldsymbol{x}(t) = a_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + a_n\boldsymbol{x}^n(t)$$

是解 $\boldsymbol{x}^j(t)$ 的线性组合，这表明这些解张成解向量空间.

若 $a_1\boldsymbol{x}^1(t) + \cdots + a_n\boldsymbol{x}^n(t) = \boldsymbol{0}$，则当 $t=0$ 时，

$$a_1\boldsymbol{u}^1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{0}.$$

因为基向量 $\{\boldsymbol{u}^j\}$ 是线性无关的，所以 $a_j=0$，这表明 $\{\boldsymbol{x}^j(t)\}$ 是线性无关的，因此 $\{\boldsymbol{x}^j(t)\}$ 为一个基解且 $\mathcal{S}$ 为 n 维. ■

指数收敛性

这一部分研究收敛序列. 首先来估计指数矩阵中元素的界，这里用 $(A^k)_{ij}$ 表示幂 A^k 的第

$(i,\ j)$个元素.

引理 2.5.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 阶常数矩阵，且对任意的 $1\leqslant i,\ j\leqslant n$ 都满足 $|\boldsymbol{A}_{ij}|\leqslant C$，则

$$|(\boldsymbol{A}^m)_{ij}|\leqslant n^{m-1}C^m.$$

证明　可通过对 m 进行归纳来证明该引理. 设当 $m=1$ 时公式成立，为清楚起见下面验证 $m=2$ 的情形：

$$|(\boldsymbol{A}^2)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{A}_{kj}\right|\leqslant \sum_{k=1}^{n}|\boldsymbol{A}_{ik}|\cdot|\boldsymbol{A}_{kj}|\leqslant \sum_{k=1}^{n}C\cdot C = nC^2.$$

55

假设该引理对 m 成立，则

$$|(\boldsymbol{A}^{m+1})_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ik}(\boldsymbol{A}^m)_{kj}\right|\leqslant \sum_{k=1}^{n}|\boldsymbol{A}_{ik}|\cdot|(\boldsymbol{A}^m)_{kj}|\leqslant \sum_{k=1}^{n}C\cdot n^{m-1}C^m = n^mC^{m+1}.$$

因此引理对 $m+1$ 也成立，即该引理得证. ■

定理 2.5.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 阶常数矩阵，则对任意的实数对$(i,\ j)$，$(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}})_{ij}$的级数都收敛.

证明　设存在 $C>0$，对任意 $1\leqslant i,\ j\leqslant n$ 都满足 $|\boldsymbol{A}_{ij}|\leqslant C$. 对固定的$(i,\ j)$，可用 $\mathrm{e}^{|t|nC}$来表示 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}$第$(i,\ j)$个元素绝对值的上界.

$$|(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}})_{ij}|\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|t|^m}{m!}|(\boldsymbol{A}^m)_{ij}|\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|t|^m}{m!}\frac{(nC)^m}{n} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{|t|nC}.$$

因此这一序列是绝对收敛的，故对任意的$(i,\ j)$，$(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}})_{ij}$的级数收敛. ■

实指数的一个重要特性是 $\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}^b$. 一般来说，相应的公式对矩阵来说并不成立. 例如，设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

则

$$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -t & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix}1-t^2 & t\\ -t & 1\end{bmatrix}\quad 和\quad \mathrm{e}^{t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})} = \begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix},$$

所以 $\mathrm{e}^{t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}\neq\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{B}}$.

为使 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相同幂的项合并起来，矩阵乘积应无关于顺序(即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$)，这样的矩阵称为可交换矩阵.

定理 2.5.6(加法公式)　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个 $n\times n$ 阶矩阵且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}.$$

56

证明　需要证明 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$的级数与级数的乘积相等.

因矩阵可交换，故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2.$$

类似地，对于高阶指数

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n = \boldsymbol{A}^n + \frac{n!}{(n-1)!1!}\boldsymbol{A}^{n-1}B + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!k!}\boldsymbol{A}^{n-k}\boldsymbol{B}^k + \cdots + \boldsymbol{B}^n.$$

和的指数的幂级数写出后，可得

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} &= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 + \frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n + \cdots \\
&= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2) + \frac{1}{3!}\left(\boldsymbol{A}^3 + \frac{3!}{2!1!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \frac{3!}{1!2!}\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{B}^3\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{A}^n + \frac{n!}{(n-1)!1!}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} + \frac{n!}{(n-2)!2!}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \cdots + \boldsymbol{B}^n\right) + \cdots \\
&= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + \left(\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2\right) + \left(\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{B}^3\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n + \frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} + \frac{1}{(n-2)!}\boldsymbol{A}^{n-2}\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{B}^n\right) + \cdots \\
&= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots\right)\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2 + \cdots\right) = e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}.
\end{aligned}$$

■

量的改变

最后用基矩阵解的积分形式来证明刘维尔(Liouville)公式. 本书后面部分利用这一公式证明非线性系统的李亚普诺夫指数，届时本书用发散定理证明它. 此处的证明很直接，但对 n 维情况的证明却有点杂乱.

57

定理 2.1.3 设 $\boldsymbol{M}(t)$ 是线性微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基矩阵解，$W(t) = \det(\boldsymbol{M}(t))$ 是朗斯基行列式，则

$$\frac{d}{dt}W(t) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}(t))W(t)$$

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}(s))ds\right),$$

其中 $\exp(z) = e^z$ 是指数函数且 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}(s))$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}(s)$ 的迹. 特别地，如果在某一点 t_0 处 $W(t_0) \neq 0$，则 $W(t)$ 处处不等于零.

对于常系数方程，$e^{\boldsymbol{A}t}$ 是满足初始条件 $e^{\boldsymbol{A}0} = \boldsymbol{I}$ 的基矩阵解，并且 $\det(e^{\boldsymbol{A}0}) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$. 因此，上面公式变为

$$\det(e^{\boldsymbol{A}t}) = e^{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})t}.$$

证明 行列式的主要性质是任意一列的倍数加到另一列上并不改变行列式的值，因此如果行列式中有两列相等，则该行列式必为 0.

注意到 $t = t_0$ 时的导数并利用 $\boldsymbol{u}^j$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\det(\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1})\Big|_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}\det(\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^n)\Big|_{t=t_0}
\end{aligned}$$

$$= \sum_j \det(\boldsymbol{M}(t_0)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{M}(t_0)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^{j-1},$$

$$\boldsymbol{M}'(t_0)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^j, \quad \boldsymbol{M}(t_0)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^{j+1}, \cdots, \boldsymbol{M}(t_0)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^n)$$

$$= \sum_j \det(\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^{j-1}, \boldsymbol{A}(t_0)\boldsymbol{M}(t_0)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}\boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{u}^{j+1}, \cdots, \boldsymbol{u}^n)$$

$$= \sum_j \det(\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^{j-1}, \boldsymbol{A}(t_0)\boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{u}^{j+1}, \cdots, \boldsymbol{u}^n)$$

$$= \sum_j \det\Big(\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^{j-1}, \sum_i a_{i,j}(t_0)\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{u}^{j+1}, \cdots, \boldsymbol{u}^n\Big)$$

$$= \sum_j a_{j,j}(t_0) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(t_0)).$$

其中倒数第二个等式成立是因为只有当 $i \neq j$ 时 $\det(\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^{j-1}, \boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{u}^{j+1}, \cdots, \boldsymbol{u}^n) = 0$.

因为

$$\det(\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0)^{-1}) = \det(\boldsymbol{M}(t))\det(\boldsymbol{M}(t_0))^{-1},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\boldsymbol{M}(t)\Big|_{t=t_0} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(t))\det(\boldsymbol{M}(t_0)).$$

这就证明了定理中所给的微分方程，且当 $\det(\boldsymbol{M}(t))$ 满足定理中的条件时，这一标量微分方程有一个解.

定理第二部分的结论成立是因为 $\det(\mathrm{e}^{A0}) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$. ■ [58]

常系数

2.2 节中给出了求解不同类型的特征值的方法，由矩阵理论可知，除了复杂重特征值以外的情况都已考虑到了. 存在一个基将矩阵转换为一个特殊形式，即矩阵的若尔当标准型(Jordan canonical form).

若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则其所有的特征值都是实数且存在特征向量的基，即存在实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(可能有重根)和特征向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j = \lambda_j \boldsymbol{v}^j$. 设 $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\Lambda$ 且 $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \Lambda$ 是对角矩阵的线性共轭，因此，取向量组 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 为基，相应的矩阵是对角矩阵，其解可由下式得到：

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{e}^{\lambda_j t}\boldsymbol{v}^j.$$

只要矩阵线性共轭于一对角矩阵(即有一个特征向量组所组成的基)，即使该矩阵可能不对称，所有解也都是相同的形式.

若特征值 $\lambda_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$ 是复根，则其特征向量 $\boldsymbol{v}^j = \boldsymbol{u}^j + \mathrm{i}\boldsymbol{w}^j$ 也一定是复的，且满足 $\boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{w}^j \neq \boldsymbol{0}$，因为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^j + \mathrm{i}\boldsymbol{w}^j) = (\alpha_j \boldsymbol{u}^j - \beta_j \boldsymbol{w}^j) + \mathrm{i}(\beta_j \boldsymbol{u}^j + \alpha_j \boldsymbol{w}^j),$$

实部和虚部分别为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^j = \alpha_j \boldsymbol{u}^j - \beta_j \boldsymbol{w}^j$$

和

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}^j = \beta_j \boldsymbol{u}^j + \alpha_j \boldsymbol{w}^j.$$

将向量 $\boldsymbol{u}^j$，$\boldsymbol{w}^j$ 用作基的一部分，可得该类型矩阵的子块

$$\boldsymbol{B}_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}.$$

因此若 $\boldsymbol{A}$ 有一个复特征向量组所组成的基，则存在使

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_q)$$

的实向量基$\{\boldsymbol{z}^1, \cdots, \boldsymbol{z}^n\}$，其中每一个 $\boldsymbol{A}_k$ 或是：(i)实元素为 λ_k 的一个 1×1 阶子块；(ii)具有上面定义的 $\boldsymbol{B}_j$ 的形式. 1×1 阶子块给出解

$$\mathrm{e}^{\lambda_k t}\boldsymbol{v}^k,$$

而 2×2 阶子块给出解

$$\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\cos(\beta_k t)\boldsymbol{u}^k - \sin(\beta_k t)\boldsymbol{w}^k)$$

和

$$\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\sin(\beta_k t)\boldsymbol{u}^k + \cos(\beta_k t)\boldsymbol{w}^k).$$

下面考虑重特征值的情形，这一情形的特征向量数少于特征值的重数. 凯莱–哈密顿定理表明如果

$$p(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，则

$$\boldsymbol{0} = (-1)^n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_0\boldsymbol{I}.$$

特别地，如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 有不同的代数重数 $m_1, \cdots, m_q$，即

59

$$p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_q)^{m_q},$$

则

$$S_k = \{\boldsymbol{v} : (\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})^{m_k}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$$

是 m_k 维向量子空间，因此几何重数等于代数重数，其中几何重数是指 S_k 的维数而代数重数是指特征方程根的重数. S_k 中的向量称为广义特征向量.

以重数 $m_k > 1$ 的实数 λ_k 为例，设 $\boldsymbol{v}^{(r)}$ 是一向量，且有

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})^r \boldsymbol{v}^{(r)} = \boldsymbol{0},$$

但是

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})^{r-1} \boldsymbol{v}^{(r)} \neq \boldsymbol{0}.$$

若 S_k 没有特征向量所组成的基，则由一般理论可知存在 r 且 $1 < r \leqslant k$ 使上式是正确的. 设

$$\boldsymbol{v}^{(r-j)} = (\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})^j \boldsymbol{v}^{(r)},$$

可得

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}^{(r)} &= \boldsymbol{v}^{(r-1)}, \\
(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}^{(r-1)} &= \boldsymbol{v}^{(r-2)}, \\
&\vdots \\
(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}^{(2)} &= \boldsymbol{v}^{(1)} \\
(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}^{(1)} &= \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

在此部分基下，就有如下 $r\times r$ 阶子块：

$$C_\ell = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

由一般性理论可知有足够多这种子块，使得相应的部分基与特征向量一起张成整个子空间 S_k，因此，对于实重特征值的情况，基于子空间 S_k 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\boldsymbol{C}_\ell$ 型子块加上一个对角矩阵.

下面，设 $\lambda_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k$ 是重数为 $m_k > 1$ 的一个复特征值. 若特征向量不是足够多，则存在形如

$$\boldsymbol{D}_\ell = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_k & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_k & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{B}_k & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_k \end{bmatrix}$$

的子块，其中 $\boldsymbol{B}_k$ 是 2×2 阶子块，其元素为 α_k 和 $\pm\beta_k$. 如果重数为 2，则该矩阵的指数由下式给出：

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}_\ell t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}_k t} & t\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}_k t} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}_k t} \end{bmatrix}.$$

[60]

故若向量基是 $\boldsymbol{u}^1 + \mathrm{i}\boldsymbol{w}^1$ 和 $\boldsymbol{u}^2 + \mathrm{i}\boldsymbol{w}^2$，则有如下解：

$$\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\cos(\beta_k t)\boldsymbol{u}^1 - \sin(\beta_k t)\boldsymbol{w}^1),$$

$$\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\sin(\beta_k t)\boldsymbol{u}^1 + \cos(\beta_k t)\boldsymbol{w}^1),$$

$$\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\cos(\beta_k t)\boldsymbol{u}^2 - \sin(\beta_k t)\boldsymbol{w}^2) + t\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\cos(\beta_k t)\boldsymbol{u}^1 - \sin(\beta_k t)\boldsymbol{w}^1)$$

和

$$\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\sin(\beta_k t)\boldsymbol{u}^2 + \cos(\beta_k t)\boldsymbol{w}^2) + t\mathrm{e}^{\alpha_k t}(\sin(\beta_k t)\boldsymbol{u}^1 + \cos(\beta_k t)\boldsymbol{w}^1).$$

同样，必有足够多的子块和基，可以张成 $\alpha_k \pm \mathrm{i}\beta_k$ 的整个子空间.

整个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可分解成这样四种型的子块. 由此可知解的形式可由以下定理给出.

定理 2.5.7 设给定 $n\times n$ 阶常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 有满足初始条件 $\boldsymbol{\phi}(0; \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0)$，此外，$\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0)$ 的每一坐标函数是如下函数的线性组合

$$t^k \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad 和 \quad t^k \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

其中 $\alpha + \mathrm{i}\beta$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，k 小于或等于该特征值的代数重数. 特别地，允许 $k=0$，此时方程的解没有 t^k 项；也允许 $\beta = 0$，此时方程的解没有任何包含 $\cos(\beta t)$ 或 $\sin(\beta t)$ 的项.

拟周期方程

为求例 2.2.14 的解，可引入极坐标

$$x_j = \rho_j \sin(2\pi\tau_j) \quad 和 \quad \dot{x}_j = \omega_j \rho_j \cos(2\pi\tau_j) \text{ 或}$$

$$\tan(2\pi\tau_j) = \frac{\omega_j x_j}{\dot{x}_j} \quad 和 \quad \rho_j^2 = x_j^2 + \frac{\dot{x}_j^2}{\omega_j^2}.$$

设变量 τ_1 和 τ_2 按模 1 取值，因此 $2\pi\tau_1$ 和 $2\pi\tau_2$ 按模 2π 取值(即 τ_j 可通过减去整数而得，使变量 τ_j 满足$0 \leqslant \tau_j < 1$)，我们写作"$\tau_j(\bmod 1)$"和"$2\pi\tau_j(\bmod 2\pi)$". 则

61

$$\rho_j\dot{\rho}_j = x_j\dot{x}_j + \frac{\dot{x}_j\ddot{x}_j}{\omega_j^2} = x_j\dot{x}_j + \frac{\dot{x}_j(-\omega_j^2 x_j)}{\omega_j^2} = x_j\dot{x}_j - \dot{x}_j x_j = 0.$$

同样有

$$2\pi\sec^2(2\pi\tau_j)\dot{\tau}_j = \frac{\omega_j\dot{x}_j\dot{x}_j - \omega_j x_j\ddot{x}_j}{\dot{x}_j^2} = \frac{\omega_j\dot{x}_j^2 - \omega_j x_j(-\omega_j^2 x_j)}{\dot{x}_j^2}$$

$$= \frac{\omega_j\dot{x}_j^2 + \omega_j^3 x_j^2}{\dot{x}_j^2} = \frac{\omega_j^3\rho_j^2}{\dot{x}_j^2} = \omega_j\sec^2(2\pi\tau_j),$$

所以

$$\dot{\tau}_j = \frac{\omega_j}{2\pi}.$$

因此这些变量的微分方程是

$$\begin{aligned}
\dot{\tau}_1 &= \frac{\omega_j}{2\pi} = \alpha_1 \quad (\bmod 1)\\
\dot{\tau}_2 &= \frac{\omega_j}{2\pi} = \alpha_2 \quad (\bmod 1)\\
\dot{\rho}_1 &= 0\\
\dot{\rho}_2 &= 0.
\end{aligned}$$

显然该系统的解为

$$\begin{aligned}
\tau_1(t) &= \tau_1(0) + \alpha_1 t \quad (\bmod 1)\\
\tau_2(t) &= \tau_2(0) + \alpha_2 t \quad (\bmod 1)\\
\rho_1(t) &= \rho_1(0)\\
\rho_2(t) &= \rho_2(0).
\end{aligned}$$

下面的定理表明当 $\omega_1/\omega_2 = \alpha_1/\alpha_2$ 为无理数时原方程的轨线在相平面上是稠密的.

定理 2.5.8 设 $\omega_1/\omega_2 = \alpha_1/\alpha_2$ 是无理数，则满足任意初始条件$(\tau_1(0), \tau_2(0))$的解$(\tau_1(t), \tau_2(t))$在相平面

$$\{(\tau_1, \tau_2): 其中\ \tau_j\ 取值于模\ 1\}$$

上是稠密的.

证明 对时间 $T = 1/\alpha_2$ 有

$$\tau_2(T) - \tau_2(0) = 0 \quad (\bmod 1)$$

和

$$\tau_1(T) - \tau_1(0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (\bmod 1).$$

取时间等于 T 的重数，则

$$\tau_2(nT)-\tau_2(0)=0 \pmod 1$$

和

$$\tau_1(nT)-\tau_1(0)=n\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \pmod 1.$$

由于 α_1/α_2 是无理数，则 $n\alpha_1/\alpha_2$ 不会是整数，这些不相同的点在区间[0, 1]上的距离很近，故对任意的 $\varepsilon>0$，必然存在三个整数 $n>m>0$ 和 k 使得

$$|\tau_1(nT)-\tau_1(mT)-k|<\varepsilon.$$

62

因而

$$|\tau_1((n-m)T)-\tau_1(0)-k|=|\tau_1(nT)-\tau_1(mT)-k|<\varepsilon.$$

设 $q=n-m$ 并取 qT 的整数倍，则对所有的 j 有

$$|\tau_1((j+1)qT)-\tau_1(jqT)-k|<\varepsilon.$$

这些点必落入[0, 1]中每一点的 ε 范围内. 由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故轨道 $\{\tau(nT)\}$ 在区间[0, 1]上是稠密的. 对这些点在时间 $0\leqslant t\leqslant T$ 内取流，可见轨道 $(\tau_1(t), \tau_2(t))$ 稠密于

$$\{(\tau_1,\tau_2):\text{其中 } \tau_j\in[0,1)\pmod 1\}.$$

■

非齐次系统

定理 2.3.1 (a) 设 $\boldsymbol{x}^1(t)$ 和 $\boldsymbol{x}^2(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的两个解，则 $\boldsymbol{x}^1(t)-\boldsymbol{x}^2(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个解.

(b) 设 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解，$\boldsymbol{x}^{(h)}(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个解，则 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)+\boldsymbol{x}^{(h)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解.

(c) 设 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解，$\boldsymbol{M}(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个基矩阵解，则非齐次线性微分方程(2.3.1)的任一解可表示为 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)+\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{c}$ 为常向量.

证明 (a) 设 $\boldsymbol{x}^1(t)$ 和 $\boldsymbol{x}^2(t)$ 如定理中所述，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}^1(t)-\boldsymbol{x}^2(t))&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^1(t)+\boldsymbol{g}(t)-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2(t)+\boldsymbol{g}(t))\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1(t)-\boldsymbol{x}^2(t)),\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{x}^1(t)-\boldsymbol{x}^2(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个解.

(b) 设 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解，$\boldsymbol{x}^{(h)}(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个解，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}^{(p)}(t)+\boldsymbol{x}^{(h)}(t))&=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(p)}(t)+\boldsymbol{g}(t))+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(h)}(t)\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{(p)}(t)+\boldsymbol{x}^{(h)}(t))+\boldsymbol{g}(t),\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)+\boldsymbol{x}^{(h)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解.

(c) 设 $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$ 是非齐次线性微分方程(2.3.1)的一个解，$\boldsymbol{M}(t)$ 是齐次线性微分方程(2.3.2)的一个基矩阵解. 令 $\boldsymbol{x}(t)$ 为非齐次线性微分方程(2.3.1)的任意一个解，另由(a)知 $\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$ 是方程(2.3.2)的一个解，但方程(2.3.2)的任一解都可表示为 $\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{c}$

为常向量，故有

$$x(t) - x^{(p)}(t) = M(t)c$$

和

$$x(t) = x^{(p)}(t) + M(t)c.$$

■

定理 2.3.2　满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的非齐次线性微分方程(2.3.1)的解可表示为

63

$$x(t) = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-As}g(s)\,ds\right).$$

证明　下面推导非齐次线性微分方程(2.3.1)的解 $x(t)$ 的形式. 因为齐次线性微分方程(2.3.2)的解可表示为 $e^{At}c$，考虑用齐次方程解的形式表示非齐微分方程(2.3.1)的解，其中 c 是 t 的函数，即令

$$x(t) = e^{At}y(t).$$

求解关于 $y(t)=e^{-At}x(t)$ 的方程可得

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t)\\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) + e^{-At}g(t) = e^{-At}g(t).\end{aligned}$$

对变量 t 从 0 到 t 积分可得

$$y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-As}g(s)\,ds$$

或

$$x(t) = e^{At}y(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}g(s)\,ds.$$

上式第一项是齐次微分方程的通解，积分项则给出了非齐次微分方程的一个特解. 因为 $x(0)=y(0)$，所以 $x_0=y(0)$成立，对上式中的项进行整理就可以得到定理中的结论. ■

练习

2.1　基本解集

2.1.1　证明下列函数是线性无关的：

$$e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad e^{2t}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\quad 和\quad e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

2.1.2　考虑微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -q(t)x_1 - p(t)x_2,\end{aligned}$$

其中 $p(t)$，$q(t)$是$\mathbb{R}$上的连续函数. 请给出该方程基解集的朗斯基表达式.

2.1.3　设 $M(t)$是微分方程$\dot{x}=A(t)x$ 的基矩阵解，C 是满足 $\det(C)\neq 0$ 的常数矩阵，证明 $M(t)C$ 也是微分方程的基矩阵解.

2.1.4　设 $M(t)$和 $N(t)$是微分方程$\dot{x}=A(t)x$ 的两个基矩阵解，令 $C=M(0)^{-1}N(0)$，证明：$N(t)=M(t)C$.

2.1.5　(Hale 和 Koçak)定理 2.5.6 的另一证明.

a. 证明：若 $AB=BA$，则 $Be^{tA}=e^{tA}B$. (提示：证明 Be^{tA}和 $e^{tA}B$ 都是微分方程$\dot{x}=Ax$ 的矩阵解，利用解的唯一性.)

64

b. 利用(a)部分证明定理 2.5.6. (提示：证明 $e^{t(A+B)}$和 $e^{tA}e^{tB}$都是微分方程$\dot{x}=(A+B)x$ 的矩阵解.)

2.2 常系数线性方程组：解与相图

2.2.1 对下面每一个线性微分方程：(i)求实通解；(ii)证明构成通解的这些解是线性无关的；(iii)画出相图.

a. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x$　　b. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} x$

c. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x$　　d. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

e. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$　　f. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x$

g. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} x$

2.2.2 考虑线性微分方程 $\dot{x} = Ax$，其中矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 5 & 11 & -1 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix},$$

它有特征值 0，12 和 12，求通解.

2.2.3 考虑线性微分方程 $\dot{x} = Ax$，其中矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \end{bmatrix},$$

它有特征值 4 和 $-4 \pm 2\mathrm{i}$，求通解.

2.2.4 阻尼谐振子(damped harmonic oscillator)的运动是由方程 $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0$ 确定的，其中 $m > 0$ 是质量，$b \geq 0$ 是阻尼常数或摩擦系数，$k > 0$ 是弹性系数.

a. 请将该微分方程改写为一阶线性微分方程组.（见第 1 章.）

b. 根据 $b \geq 0$ 的大小对线性微分方程进行分类.

2.2.5 求 2.2.1 题中每个矩阵的若尔当标准型.

2.2.6 设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是矩阵 A 的两个实特征值，v^1 和 v^2 是相应的特征向量. 证明 v^1 和 v^2 是线性无关的.（提示：设 $0 = C_1 v^1 + C_2 v^2$，并考虑方程 $0 = A0 = C_1 A v^1 + C_2 A v^2 = C_1 \lambda_1 v^1 + C_2 \lambda_2 v^2$.）

2.2.7 设 A 是 2×2 阶矩阵，并有两个不同的实的负特征值 λ_1 和 λ_2.

a. 设 v^1 和 v^2 是相应的特征向量，$P = (v^1\ v^2)$ 是由特征向量作为列组成的矩阵.
证明 $AP = PD$，其中 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 是以特征值为元素的对角矩阵(即 $A = PDP^{-1}$).

b. 设 $\alpha = \min\{-\lambda_1, -\lambda_2\} > 0$，证明存在正常数 K 使得对所有 $t \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^2$ 都有

$$\|e^{tA}x\| \leq Ke^{-t\alpha}\|x\|.$$

2.3 含时变强迫项的非齐次线性系统

2.3.1 求下面微分方程的通解：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 求下面微分方程的通解：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 求下面非齐次线性(标量)微分方程的通解：

65

$$\dot{x} = -x + \sin(t).$$

(注：参数变易法等价于通常所说的"通过积分因子法解非齐次线性(标量)微分方程".)

2.3.4 设 μ 不是 $n\times n$ 阶常系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，b 是任意 n 维常向量. 证明非齐次线性微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + e^{\mu t}\boldsymbol{b}$$

有形如 $\phi(t) = e^{\mu t}\boldsymbol{a}$ 的解，其中 $\boldsymbol{a}$ 为某一 n 维常向量.

2.4 应用

2.4.1 (Kaplan 和 Glass[**56**])药物的静脉注射模型可用两个隔离的容器表述：第一个容器表示血浆，第二容器表示血液组织. 系统进化的动力学行为可由如下微分系统描述：

$$\dot{C}_1 = -(K_1 + K_2)C_1 + K_3C_2$$

$$\dot{C}_2 = K_1C_1 - K_3C_2,$$

其中 K_1，K_2 和 K_3 都是正数.

a. 画一示意图来表示这两个隔离的容器以及其中血液的流入和流出情况.

b. 求当 $K_1 = 0.5$，$K_2 = K_3 = 1$ 时，上述微分方程组满足初始条件 $C_1(0) = N$ 和 $C_2(0) = 0$ 的解；当 t 趋于无穷时，解的极限又如何？

c. 画出 $K_1 = 0.5$，$K_2 = K_3 = 1$ 时的相图.

2.4.2 考虑 $R>0$，$L>0$ 和 $C>0$ 时的 LRC 电路图. 画出下面三种情况下的相图.

(a) $R^2 > 4L/C$； (b) $R^2 = 4L/C$； (c) $R^2 < 4L/C$.

当 $R=0$，但 $L>0$ 和 $C>0$ 时又会如何？

第3章 非线性方程的解——流

本章的3.1节给出解的存在性和唯一性的基本结果，而有关非线性微分方程相图的具体内容将在下一章讨论．这样做不但回答了解的存在性问题，而且还重点阐述了解对初值条件的依赖性以及解是如何随初始值的改变而变化的．这种安排构成了本书非线性方程的分析基础．

3.2节介绍了求解微分方程的标准的数值方法，尽管这部分内容经常出现在标量微分方程的入门课程中，而这里重点讨论的是向量微分方程的情形．了解一些数值方法之所以重要是因为我们可以借助于多种程序描画非线性方程的相空间．虽然这些程序不能用来解方程，但是它可以帮助我们实现所要讨论的某种数值积分或更复杂形式的积分．因为了解计算机程序所做的事是很重要的，所以本节还介绍了求解方程组的最简单的数值方法．

3.1 非线性方程的解

对常系数线性方程，可通过解的表达式给出解存在的构造性证明，对非线性方程，由于不存在显式通解，就无法利用显式解来推导解的存在性和唯一性．本节将讨论保证非线性方程的解存在并唯一的条件，以及解唯一时所具有的一些性质．先考虑数量微分方程，然后再考虑更多变量的微分方程．

在叙述一般性定理之前，先给出利用积分求解的方法，这种方法适用于很多数量方程．我们从一个例子开始，这个例子在4.2节还将进一步讨论．

67

例3.1.1(逻辑斯谛方程) 微分方程

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

称为*逻辑斯谛方程*，其中参数 r，K 是正数．可通过先分离变量后对分式进行积分来解此方程，为此，首先把所有与变量 x 有关的式子分离到左边并利用真分式的分解，得到

$$\frac{\dot{x}}{x\left(1 - \frac{x}{K}\right)} = r,$$

$$\frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{x}}{K - x} = r,$$

然后，两端对 t 进行积分(因为 $\dot{x}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$，所以左端变成对 x 的积分)：

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{K - x}\mathrm{d}x = \int r\mathrm{d}t$$

$$\ln(|x|) - \ln(|K - x|) = rt + C_1$$

$$\frac{|x|}{|K - x|} = Ce^{rt}, \quad 其中\ C = e^{C_1}.$$

利用代数知识可由上式解出 x，若假设 $0<x<K$，则可去掉绝对值符号，得到

$$x = CKe^{rt} - Ce^{rt}x$$

$$(1+Ce^{rt})x = CKe^{rt}$$

$$x(t) = \frac{CKe^{rt}}{1+Ce^{rt}}.$$

利用初始条件：$t=0$，$x=x_0$，则有

$$x_0 = \frac{KC}{1+C} \qquad 即$$

$$C = \frac{x_0}{K-x_0}.$$

代入到解的表达式并进行代数运算，可得

$$x(t) = \frac{x_0K}{x_0+(K-x_0)e^{-rt}}.$$

显然，$t=0$ 时方程的解等于 x_0，而且，可验证这个解不仅仅对 $0<x_0<K$ 成立，它对 x_0 的所有取值都成立. ■

上面例子的解法适用于一切形如 $\dot{x}=f(x)$ 的方程，要得到方程的解，只需求积分

$$F(x) = \int \frac{1}{f(x)}dx = \int dt = t + C.$$

这种解方程的方法称为变量分离法(separation of variables)，在实际应用中，要计算的积分 $F(x)$ 可能很难或根本不可能用已知函数来表示，即使 $F(x)$ 可以求出，也只能得到隐式解 $F(x)=t+C$，而从中解出 x 为 t 的显函数也常常很困难. 因此，哪怕是数量方程，也可能没有较实用的方法来求其显式解.

68

下面叙述一维情形解的存在与唯一性定理.

定理 3.1.2　设微分方程

$$\dot{x} = f(x)$$

中 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都是某开区间 $I=(a, b)$ 上的连续函数，设 $x_0(a<x_0<b)$ 是初始值.

(a)则存在一个解 $x(t)$，它在某个时间区间 $-\tau<t<\tau$ 上有定义，满足 $x(0)=x_0$. 而且在下面意义下这个解是唯一的，即若有两个解 $x(t)$，$y(t)$ 满足条件 $x(0)=x_0=y(0)$，那么 $x(t)$，$y(t)$ 在包含时刻 $t=0$ 的最大公共定义区间上相等. 用 $\phi(t; x_0)=x(t)$ 表示满足条件 $\phi(0; x_0)=x_0$ 的唯一解.

(b)解 $\phi(t; x_0)$ 连续地依赖于初始值 x_0，此外，若令 $0\leqslant t\leqslant T(T>0)$ 是 $\phi(t; x_0)$ 的某一存在区间，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $|y_0-x_0|<\delta$ 时，$\phi(t; y_0)$ 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上有定义且在此区间上

$$|\phi(t;y_0) - \phi(t;x_0)| < \varepsilon.$$

(c)进一步，$\phi(t; x_0)$ 关于初始值 x_0 是可微的.

定义 3.1.3　解 $\phi(t; x_0)$(其中初始值 x_0 作为自变量)称为是微分方程的流(flow)，只有当方程的解存在并唯一时才可使用这一概念(例如，确定微分方程的向量场的各分量有连续偏

导数).

高维情形的解的存在与唯一性定理的证明过程将在本章最后的 3.3 节给出，证明采用的是皮卡迭代法(Picard iteration scheme). 思路是首先任选曲线 $y^0(t)$(例如 $y^0(t)\equiv x_0$)，通过下面的积分方程

$$y^n(t) = x_0 + \int_0^t f(y^{n-1}(s))\,\mathrm{d}s,$$

由前一条曲线构造出后一条曲线，这样便得到一个曲线序列，可以证明在某时间区间$[-\tau,\tau]$上这族曲线一致收敛于方程的解.

当$f(x)$连续时可证方程解的存在性，然而在不附加其他条件的情况下，可以找到解不唯一的例子. 下面的例子中右端函数在某一点处的导数不存在而且解不唯一.

例 3.1.4(解不唯一)　考虑微分方程

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x},\quad x_0 = 0.$$

一方面，方程对所有的 t 有解 $x_1(t)\equiv 0$，另一方面，对上面的方程分离变量，得到

$$\int x^{-1/3}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t$$

$$\frac{3}{2}x^{2/3} = t - t_0$$

$$x(t) = \left(\frac{2(t-t_0)}{3}\right)^{3/2}.$$

69

在上式中，取积分常数为 $-t_0$. 当 $t<t_0$ 时，可取方程的解恒为零. 因此对任意的 t_0 方程有解

$$z(t;t_0) = \begin{cases} 0, & t\leqslant t_0 \\ \left(\dfrac{2(t-t_0)}{3}\right)^{3/2}, & t\geqslant t_0. \end{cases}$$

这些解在 $t\leqslant t_0$ 时等于零，在 $t>t_0$ 时取正值. 因为 t_0 可取任意小，这些解有任意靠近 $t=0$(甚至达到 $t=0$)的部分. 此外，方程还有恒等于零的解 $x_1(t)$，因此有很多解满足同一初始条件，参见图 3.3.1. 注意到$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$，此时$f'(0)$无定义(或等于无穷)，因此定理 3.1.2 失效而不能保证解的唯一性. ■

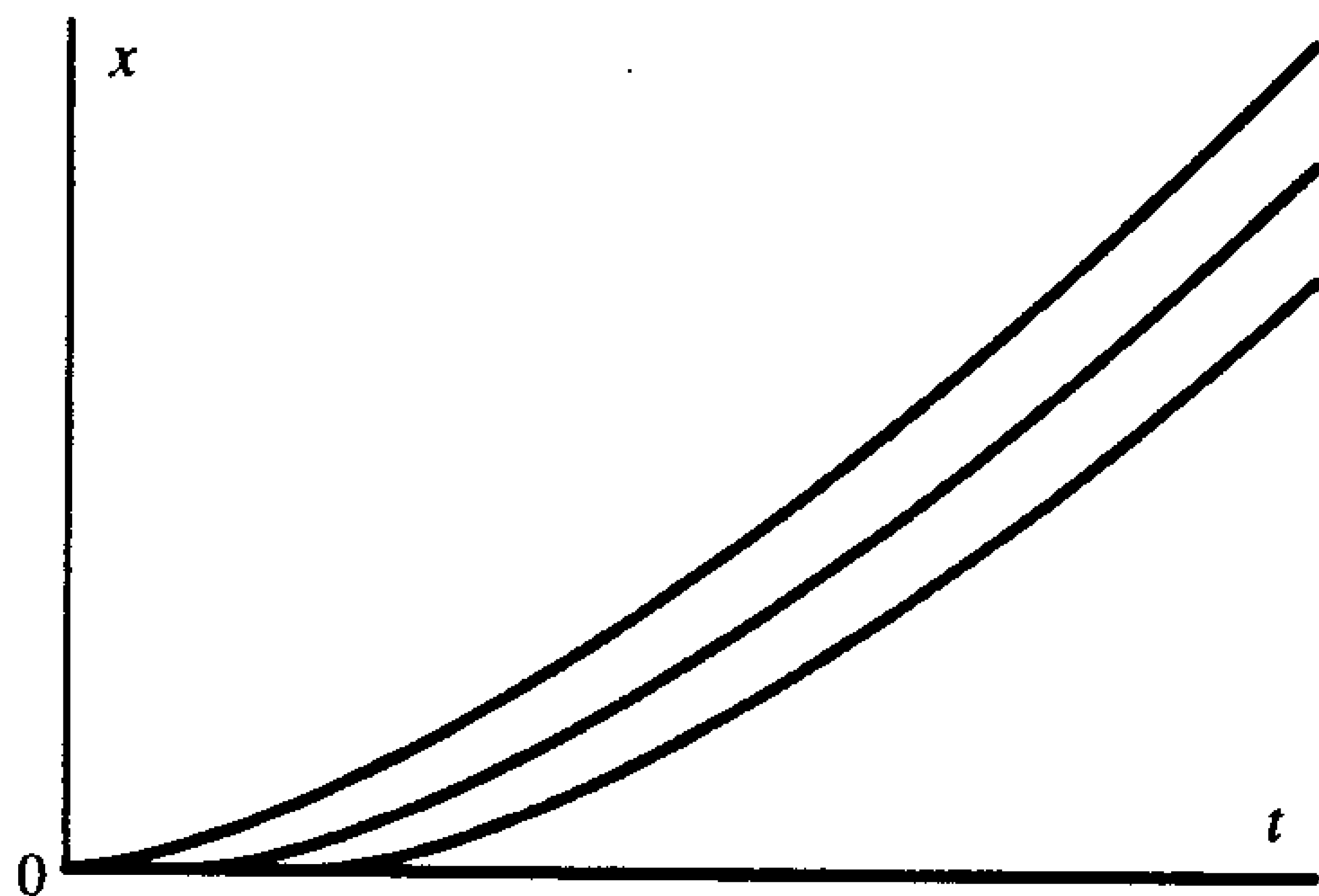


图 3.1.1　例 3.1.4 的解不唯一

现在我们讨论右端函数可导从而其解唯一的微分方程. 因为具有初始值 x_0 的任意两个解在其公共定义区间上是重合的，因此我们可以把解延拓到它的最大定义区间 $t_{x_0}^- < t < t_{x_0}^+$ 上，$t_{x_0}^+$ 有时是无穷大，有时可能是一个有限数，下面以逻辑斯谛方程为例来展示不同的最大存在区间.

逻辑斯谛方程有显式解，可表示为

$$\phi(t;x_0) = x(t) = \frac{x_0K}{x_0+(K-x_0)\mathrm{e}^{-rt}}.$$

当$0\leqslant x_0\leqslant K$时，分母恒不为零，此时解在整个时间轴上都有定义；另一方面，当$x_0>K>0$时，$K-x_0<0$且当

$$e^{rt}=\frac{x_0-K}{x_0}<1$$

时，分母等于零，此时

$$t_{x_0}^-=\frac{1}{r}(\ln(x_0-K)-\ln(x_0)),$$

同时有$t_{x_0}^+=\infty$；最后，当$x_0<0$时，$t_{x_0}^-=-\infty$，且

$$t_{x_0}^+=-\frac{1}{r}(\ln(K-x_0)-\ln(|x_0|)).$$

70 因此，当初始值落在区间$[0,K]$之外时，解在向前或向后有限时间内趋于无穷大.

线性微分方程$\dot{x}=ax+b$有定义在整个时间轴上的显式解，参见定理2.5.2.

一般地，若$t_{x_0}^+<\infty$，可证$|\phi(t;x_0)|$趋于无穷(或$\phi(t;x_0)$可能趋于$f(x)$定义区域的边界).

高维方程的解

高维微分方程解的存在和唯一性与一维微分方程的情形是类似的，我们已经知道如何求解常系数线性微分方程组，但不存在求非线性微分方程组显式解的一般方法.

在给出一般结论之前，先看一个非线性微分方程组的例子，此例后面还要讨论.

例 3.1.5(竞争系统)　考虑方程组

$$\dot{x}_1=x_1(K-x_1-ax_2)$$
$$\dot{x}_2=x_2(L-bx_1-x_2).$$

即使是上面的这类二次方程也无显式解，在4.5节我们将利用相平面分析方法讨论其解的性质. ■

一般地，我们考虑以下形式的$\mathbb{R}^n$中的微分方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=F_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \dot{x}_2&=F_2(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots&=\vdots\\ \dot{x}_n&=F_n(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

或其向量形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),$$

其中$\boldsymbol{x}$是$\mathbb{R}^n$中的一点，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$是$\mathbb{R}^n$中的一个向量(即$F$把$\mathbb{R}^n$中的点$\boldsymbol{x}$映射成$\mathbb{R}^n$中的向量$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$).

上面微分方程组解的存在与唯一性与数量微分方程的情形相似.

定理 3.1.6　*考虑微分方程*

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

设$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$和$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$在$\mathbb{R}^n$中的某个开集$U$上是$\boldsymbol{x}$的连续函数，$\boldsymbol{x}_0$是$U$中的一个点.

(a) 则方程存在一个解 $\boldsymbol{x}(t)$，它在某个时间区间 $-\tau<t<\tau$ 上有定义，且满足 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，在下面意义下这个解还是唯一的，即若有两个解 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ 满足条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}_0$，那么 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ 在包含时刻 $t=0$ 的的最大公共定义区间上相等. 用 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 表示满足条件 $\phi(0;\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的唯一解.

(b) 解 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 连续地依赖于初始值 $\boldsymbol{x}_0$，此外，若令 $0\leqslant t\leqslant T(T>0)$ 是 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 的某一存在区间，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\|\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，$\phi(t;\ \boldsymbol{y}_0)$ 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上有定义且在此区间上

$$\|\phi(t;\boldsymbol{y}_0)-\phi(t;\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon.$$

71

(c) 进一步，$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 关于初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 是可微的.

定义 3.1.7 解 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$（其中时间 t 和初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 作为自变量）称为是微分方程的流 (flow)，对任意给定的 $\boldsymbol{x}_0$，函数 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 确定高维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线，这条曲线称为过初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 的轨道或轨线.

对于线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$，它的流是 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}_0$.

利用唯一性可以得到所谓的流的群的性质，令 $\boldsymbol{x}_1=\phi(t_1;\ \boldsymbol{x}_0)$，则

$$\phi(t+t_1;\boldsymbol{x}_0)\quad 和\quad \phi(t;\boldsymbol{x}_1)$$

都是解且当 $t=0$ 时均等于 $\boldsymbol{x}_1$，因此

$$\phi(t+t_1;\boldsymbol{x}_0)=\phi(t;\boldsymbol{x}_1)=\phi(t;\phi(t_1;\boldsymbol{x}_0)).$$

参见图 3.1.2，这说明解 $\phi(t+t_1;\ \boldsymbol{x}_0)$ 在 t_1+t 处的值可由以下方式得到：首先从 $\boldsymbol{x}_0$ 开始向前走 t_1 段时间，然后停下来，以 $\boldsymbol{x}_1$ 为新的初始值再向前走 t 段时间，便得到 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_1)=\phi(t;\ \phi(t_1;\ \boldsymbol{x}_0))$.

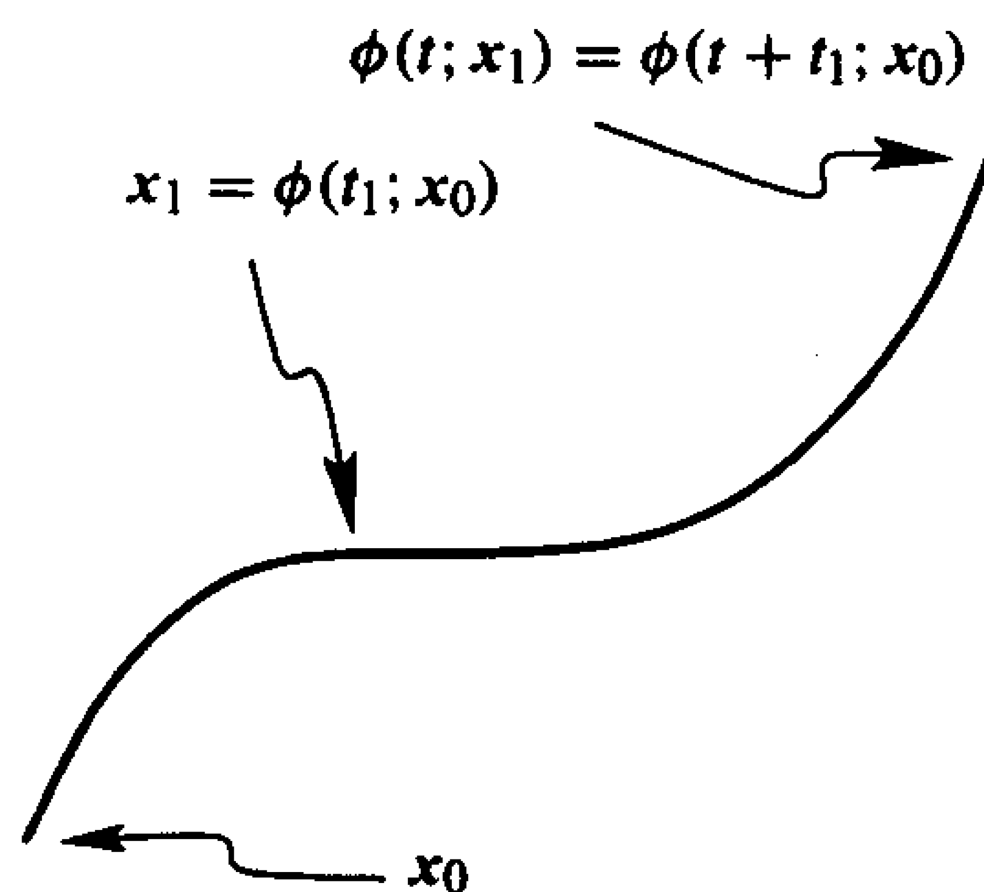


图 3.1.2 流的群性质

群性质暗示可能有解经过一段时间后回到出发点，若存在对 $T>0$，而不是对所有的 t 使得

$$\phi(T;\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$$

成立，那么利用群的性质，可得

$$\phi(t+T;\boldsymbol{x}_0)=\phi(t;\phi(T;\boldsymbol{x}_0))=\phi(t;\boldsymbol{x}_0)$$

（即轨道在相空间不断地经过相同的点），因此，这条轨道是周期的，满足上面条件的最小正数 T 称为周期或最小周期.

第 4 章将阐述相空间分析方法，而下面的定理给出了流的一个重要性质：不同的轨线不能相交.

定理 3.1.8 设微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

满足解的唯一性条件，又设存在两个初始值 $\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}_0$ 使相应的轨线各走 t_0 和 t_1 段时间后相交，即 $\phi(t_0;\ \boldsymbol{x}_0)=\phi(t_1;\ \boldsymbol{y}_0)$，则由群性质，$\boldsymbol{y}_0=\phi(t_0-t_1;\ \boldsymbol{x}_0)$，从而 $\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}_0$ 在同一条轨线上.

72

在二维情形，不同的轨线互不相交是一个很有用的结论，这一点可在 6.2 节的庞加莱-本迪克松定理看出：一条有界的轨线要么无限接近一个不动点，要么趋于一个周期解. 在三维或

更高维情形下，不同轨线的二维图像看似相交，其实是一条在前一条在后，只要不是同一条轨线就一定不会相交.

令 $t_{x_0}^- < t < t_{x_0}^+$ 表示最大定义区间，若 $t_{x_0}^+ < \infty$，则当 t 趋向于 $t_{x_0}^+$ 时，要么(i) $\| \phi(t;\ x_0) \|$ 趋于无穷，要么(ii) $\phi(t;\ x_0)$ 趋于 $F(x)$ 定义区域的边界.

有些集合是流的不变集，这一性质以后将起着非常重要的作用，此处我们给出其明确的定义.

定义 3.1.9 设 $\phi(t;\ x)$ 是微分方程定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的流，若有集 S 使对其中任意点 x_0 及 $t \geq 0$，$\phi(t;\ x_0)$ 都属于集合 S，则称 S 是该流的正不变集；同理，如果上面的性质对 $t \leq 0$ 成立，则称 S 是负不变集. 最后，若 S 既是正不变集，又是负不变集，则称 S 是不变集.

进一步的解的性质是解对初始条件的依赖性，包括连续依赖性和可微性. 下面的结果解释了流的导数是如何沿着一条解曲线而变化的，所述公式称为是第一变分方程，它描述的是流的线性化关于时间的导数. 第一变分方程将用来研究周期轨线的稳定性和李雅普诺夫指数(用以度量无穷小位移的增长).

在叙述定理之前，先给出一些记号，令 $\boldsymbol{u}^j$ 表示第 j 个分量为 1，其他分量为 0 的单位向量，在三维空间中经常用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别代表 $\boldsymbol{u}^1$，$\boldsymbol{u}^2$，$\boldsymbol{u}^3$. 再令

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(t;x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi_i(t;x_0 + s\boldsymbol{u}^j)\mid_{s=0}$$

表示解的第 i 个坐标关于第 j 个分量的导数，令

$$DF_{(x)} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right)$$

表示向量场的导数矩阵，同理再令 $n \times n$ 阶矩阵

$$D_x\phi_{(t;x_0)} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(t;x_0)\right)$$

表示 $\phi(t;\ x_0)$ 关于初始值的导数.

定理 3.1.10(第一变分方程) 考虑微分方程

$$\dot{x} = F(x).$$

设 $F(x)$ 和 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中某个开集 U 上是 x 的连续函数，那么解 $\phi(t;\ x_0)$ 关于 x_0 是可微的，因此，其对 x_0 的导数矩阵存在，而且此矩阵满足下列线性微分方程

73

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_x\phi_{(t;x_0)} = DF_{(\phi(t;x_0))}D_x\phi_{(t;x_0)}. \tag{3.1.2}$$

又若 x_s 是一条由初始点所成的曲线，且

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\partial}{\partial s}(\phi(t;x_s))\mid_{s=0},$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) = DF_{(\phi(t;x_0))}\boldsymbol{v}(t). \tag{3.1.3}$$

方程(3.1.3)称为第一变分方程.

要证明解关于初始值的可微性，需要花一番功夫. 但是如果我们假设它是可微的，且可以交换微分次序，则第一变分方程的推导是非常简单的，详见本章末.

若解曲线已知，则方程(3.1.2)和方程(3.1.3)中的 $DF_{(\phi(t;x_0))}$ 可以看作是已知的依赖于时间的矩阵函数，因此，这些方程是依赖于时间的线性方程. 若已知方程的数值解，则在求数值解的同时就可能解出变分方程的解；也就是说，用数值方法就可能同时解下面两个方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = D\boldsymbol{F}_{(\phi(t;x_0))}\boldsymbol{v},$$

这种求数值解的思想在第 7 章利用第一变分方程讨论李雅普诺夫指数时仍是特别有效的.

3.2 微分方程的数值解

对于形如$\dot{x} = f(x)$的一维方程，它的求解过程可简化为求一个积分；原则上，这样至少可以得到方程的一个隐式解，然而这并不能完全解决问题，一方面求此积分可能很困难，另一方面要求出表示成时间 t 和初始值 x_0 的函数形式的显式解 $x(t;\ x_0)$则更困难或根本不可能. 此外，对于高维方程，并不总能把求解问题简化为求一个积分，更不要说求出其显式解了. 事实上，当用计算机程序去画微分方程解的图像时，经常画出的是方程的数值解而非显式解.

鉴于以上原因，数值解对于分析微分方程是非常有用的，我们经常把它与微分方程的几何性质结合在一起使用，通过数值解可以很好地洞察方程解的行为. 我们先讨论数量微分方程数值方法，再讨论高维微分方程或向量微分方程的相同数值方法，总共讨论三种方法：欧拉法、Heun 法或称改进的欧拉法、(四阶)龙格-库塔法. 它们分别与求黎曼和积分的三种数值方法相对应，即左端点法、梯形法和辛普森方法.

这部分内容与本书的余下章节并不相关，之所以把它包含进来主要是为了使读者了解如何利用计算机画出微分方程(包括数量方程和方程组)解的图像.

要详细了解数值方法理论的读者可参考文献[**23**].

考虑如下形式的依赖于时间的方程

$$\dot{x} = f(t,x).$$

74

这种形式的方程不仅具有一般性，而且还能看出f在不同时刻的取值.

欧拉法

设给定初始时刻为 t_0，初始值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$，以及步长 $h = \Delta t$，则方程的解在时刻 $t_1 = t_0 + h$ 处可表示为

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \approx x_0 + h\,\dot{x}(t_0) = x_0 + hf(t_0, x_0),$$

其中已用被积函数在区间左端点的值来近似表示被积函数，这样便得到下一步的近似值

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0).$$

如果第 n 步的给定时刻为 t_n，位置为 $\boldsymbol{x}_n$，那么在第 $n+1$ 步中

$$k_n = f(t_n, x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + hk_n$$
$$t_{n+1} = t_n + h.$$

这种得到后一步近似值的方法称为欧拉法(Euler method).

下面用一个简单的例子来演示一下这种方法.

例 3.2.1(欧拉法) 考虑方程

$$\dot{x} = x(1 - x^2) \quad t_0 = 0\text{ 时}, x_0 = 2, \tag{3.2.1}$$

步长 $h=0.1$，利用变量分离法及真分式分解，可得方程的精确解：

$$x(t) = \sqrt{\frac{4e^{2t}}{4e^{2t} - 3}}.$$

表 3.2.1 包含了用欧拉法得到的从 0 到 1 共十步的计算结果，读者可以验算表中的部分数据. 事实上，表中的数据还可以算得更加精确，这里只算到了小数点后三位.

表 3.2.1 方程 3.2.1 的欧拉法

n	t_n	x_n	k_n	精确解	误差
0	0.0	2.000	-6.000	2.000	0.0×10^{0}
1	0.1	1.400	-1.344	1.610	2.1×10^{-1}
2	0.2	1.266	-0.762	1.418	1.5×10^{-1}
3	0.3	1.189	-0.493	1.304	1.1×10^{-1}
4	0.4	1.140	-0.342	1.228	8.8×10^{-2}
5	0.5	1.106	-0.247	1.175	6.9×10^{-2}
6	0.6	1.081	-0.183	1.137	5.5×10^{-2}
7	0.7	1.063	-0.138	1.108	4.5×10^{-2}
8	0.8	1.049	-0.106	1.086	3.6×10^{-2}
9	0.9	1.039	-0.082	1.068	3.0×10^{-2}
10	1.0	1.030	-0.064	1.055	2.5×10^{-2}

75

■

Heun 法或改进的欧拉法

Heun 法或改进的欧拉法对应于梯形规则

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))\,dt \approx x_0 + h\left(\frac{f(t_0, x_0) + f(t_1, z)}{2}\right),$$

其中 z 表示 t_1 时刻的位置，因此在使用公式时，需要先知道 z 的值. 假设已经算出 $x(t_n)$ 的近似值 x_n，先利用欧拉法得到 $t_{n+1} = t_n + h$ 时刻解的近似值 z_n，然后再用这个点去求第二个“斜率” $f(t_{n+1}, z_n)$，即按照如下步骤计算：

$$k_{1,n} = f(t_n, x_n)$$
$$z_n = x_n + hk_{1,n}$$
$$k_{2,n} = f(t_n + h, z_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{k_{1,n} + k_{2,n}}{2}\right)$$
$$t_{n+1} = t_n + h.$$

我们利用同一例子来说明这种方法.

例 3.2.2(Heun 法) 再次考虑方程

$$\dot{x}=x(1-x^2)\quad t_0=0\text{ 时}, x_0=2,$$

步长 $h=0.1$，方程的精确解如上例所示. 表 3.2.2 包含了从 0 到 1 共十步的计算结果，读者可以验证表中的部分数据.

表 3.2.2 方程 3.2.2 的 Heun 法

n	t_n	x_n	$k_{1,n}$	z_n	$k_{2,n}$	平均斜率①	精确解	误差
0	0.0	2.000	-6.000	1.400	-1.344	-3.672	2.000	0.0
1	0.1	1.633	-2.720	1.361	-1.159	-1.940	1.610	-2.3×10^{-2}
2	0.2	1.439	-1.540	1.285	-0.836	-1.188	1.418	-2.1×10^{-2}
3	0.3	1.320	-0.980	1.222	-0.603	-0.791	1.304	-1.6×10^{-2}
4	0.4	1.241	-0.670	1.174	-0.444	-0.557	1.228	-1.3×10^{-2}
5	0.5	1.185	-0.480	1.137	-0.334	-0.407	1.175	-1.0×10^{-2}
6	0.6	1.145	-0.355	1.109	-0.255	-0.305	1.137	-8.0×10^{-3}
7	0.7	1.114	-0.269	1.087	-0.198	-0.233	1.108	-6.4×10^{-3}
8	0.8	1.091	-0.207	1.070	-0.155	-0.181	1.086	-5.2×10^{-3}
9	0.9	1.073	-0.161	1.056	-0.123	-0.142	1.068	-4.2×10^{-3}
10	1.0	1.058	-0.127	1.046	-0.098	-0.113	1.055	-3.4×10^{-3}

注：①表中的平均斜率是指 $(k_{1,n}+k_{2,n})/2$. ■

76

龙格-库塔法

龙格-库塔法对应于用辛普森法近似计算积分(在某点 $x(t)$ 处我们用 $g(t)$ 来代表 $f(t,\ x(t))$)：

$$x(t_{n+1})=x_n+\int_{t_n}^{t_n+h}g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\approx x_n+h\left(\frac{g(t_n)+4g\left(t_n+\frac{h}{2}\right)+g(t_n+h)}{6}\right).$$

为此，把 $4g\left(t_n+\frac{h}{2}\right)$ 分成是两项的和：$2g\left(t_n+\frac{h}{2}\right)+2g\left(t_n+\frac{h}{2}\right)$，并分别求出两个不同的过渡点 $z_{1,n}$ 和 $z_{2,n}$ 处的值；因为 $z_{1,n}$ 和 $z_{2,n}$ 分别对应于时刻 $t_n+\frac{h}{2}$ 和 t_n+h，从而以 $\frac{h}{2}$ 为步长求出 $z_{1,n}$ 和 $z_{2,n}$；最后，先找到第三个过渡点 $z_{3,n}$，然后以 h 为步长计算出 $g(t_n+h)$，具体步骤如下所示：

$$k_{1,n}=f(t_n,x_n)\qquad z_{1,n}=x_n+\frac{h}{2}k_{1,n}$$

$$k_{2,n}=f\left(t_n+\frac{h}{2},z_{1,n}\right)\qquad z_{2,n}=x_n+\frac{h}{2}k_{2,n}$$

$$k_{3,n}=f\left(t_n+\frac{h}{2},z_{2,n}\right)\qquad z_{3,n}=x_n+hk_{3,n}$$

$$k_{4,n}=f(t_n+h,(z_{3,n}),$$

则有

$$x_{n+1}=x_n+h\left(\frac{k_{1,n}+2k_{2,n}+2k_{3,n}+k_{4,n}}{6}\right)$$

$$t_{n+1} = t_n + h.$$

因此，最终结果用到在 $t=t_n$，$t_n+\frac{h}{2}$，$t_n+\frac{h}{2}$，t_n+h 时刻的斜率，这四个斜率的权重分别为1，2，2，1.

我们利用同一例子来说明这种方法.

例 3.2.3（龙格-库塔法） 考虑方程

$$\dot{x} = x(1-x^2) \quad t_0 = 0 \text{ 时}, x_0 = 2,$$

步长 $h=0.1$，方程的精确解如上例所示. 表 3.2.3 包含了从 0 到 1 共十步的计算结果，读者可以验证表中的部分数据.

表 3.2.3 方程 3.2.2 对应的龙格-库塔法

t_n	x_n	$k_{1,n}$	$z_{1,n}$	$k_{2,n}$	$z_{2,n}$	$k_{3,n}$	$z_{3,n}$	$k_{4,n}$	平均斜率①
0.0	2.000 000	-6.000	1.700	-3.213	1.839	-4.384	1.562	-2.247	-3.906
0.1	1.609 335	-2.559	1.481	-1.770	1.521	-1.997	1.410	-1.391	-1.913
0.2	1.417 949	-1.433	1.346	-1.094	1.363	-1.170	1.301	-0.901	-1.143
0.3	1.303 580	-0.912	1.258	-0.733	1.267	-0.767	1.227	-0.620	-0.755
0.4	1.228 069	-0.624	1.197	-0.518	1.202	-0.535	1.175	-0.446	-0.529
0.5	1.175 142	-0.448	1.153	-0.379	1.156	-0.389	1.136	-0.331	-0.385
0.6	1.136 555	-0.332	1.120	-0.285	1.122	-0.291	1.107	-0.251	-0.289
0.7	1.107 644	-0.251	1.095	-0.218	1.097	-0.222	1.085	-0.193	-0.220
0.8	1.085 548	-0.194	1.076	-0.169	1.077	-0.172	1.068	-0.151	-0.171
0.9	1.068 409	-0.151	1.061	-0.133	1.062	-0.135	1.055	-0.119	-0.134
1.0	1.054 965	-0.119	1.049	-0.105	1.050	-0.107	1.044	-0.095	-0.106

注：①表中的平均斜率是指 $(k_{1,n}+2k_{2,n}+2k_{3,n}+k_{4,n})/6$.

下面比较由三种不同数值方法得到的解的准确性：在时刻 $t=1$，欧拉法的误差是 2.5×10^{-2}，Heun 法的误差是 3.4×10^{-3}，龙格-库塔法的误差是 7.6×10^{-6}（详见表 3.2.4），因此由龙格-库塔法中的特殊计算方法得到的结果的确更准确些.

表 3.2.4 龙格-库塔法：与精确解的比较

t_n	x_n	精确解	误 差
0.0	2.000 000	2.000 000	0.0
0.1	1.609 335	1.609 657	3.2×10^{-4}
0.2	1.417 949	1.418 105	1.6×10^{-4}
0.3	1.303 580	1.303 668	8.7×10^{-5}
0.4	1.228 069	1.228 124	5.4×10^{-5}
0.5	1.175 142	1.175 178	3.6×10^{-5}
0.6	1.136 555	1.136 581	2.5×10^{-5}
0.7	1.107 644	1.107 662	1.8×10^{-5}
0.8	1.085 548	1.085 561	1.3×10^{-5}
0.9	1.068 409	1.068 419	1.0×10^{-5}
1.0	1.054 965	1.054 973	7.6×10^{-6}

■

在解题过程中，把计算结果列成表格将有助于使我们的工作条理化，并避免在下一步出错，用电子制表软件和 C、Maple、Mathmatica、Matlab 等语言，程序很容易做到这一点.

误差：局部误差和全局误差

要理解欧拉法每一步产生的误差需要用到方程解(假设是可微的)的泰勒展开式，在时刻 $t_{n+1}=t_n+h$ 处方程的解

$$x(t_{n+1})=x_n+h\dot{x}(t_n)+\frac{h^2}{2}\ddot{x}(t_n')=x_n+hf(t_n,x_n)+O(h^2),$$

其中 t_n' 是介于 t_n 和 t_{n+1} 间的某时刻，误差项 $O(h^2)$ 是 h^2 的同阶无穷小(即存在常数 $C>0$ 使得 $|O(h^2)|\leqslant Ch^2$)，事实上，若 $|\ddot{x}(t)|\leqslant 2C$，则 C 的值就是一个界，在本章末尾的 3.3 节将给出更详细的说明. 每一步产生的误差称为*局部误差*(local error)，上面已经讨论了为什么欧拉法的局部误差是 $O(h^2)$.

77 ~ 78

在 3.3 节我们还将证明 Heun 法的局部误差是 $O(h^3)$，而要分析龙格-库塔法的局部误差则较为复杂，我们略去，但可以证明龙格-库塔法的局部误差是 $O(h^5)$.

对于固定的时间 T，把区间 $[0, T]$ 等分为 N 份，从而 $h=T/N$，误差的积累 $|x_N-x(T)|$ 称为*全局误差*(global error)，它是由局部误差积累而成的. 如果每一步的局部误差以 $hE(h)$ 为界，我们可以简单地认为经过 $N=T/h$ 步积累后，全局误差约为 $NhE(h)=(T/h)hE(h)=TE(h)$，在本章末尾的 3.3 节，将证明全局误差约为

$$|x_N-\phi(T;x_0)|=\frac{E(h)[\mathrm{e}^{TL}-1]}{L},$$

其中 L 是 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,t)$ 的一个界. 这个估计表明对于固定的 T，全局误差是 h 的同阶无穷小，但是全局误差指数随着区间长度的增加而增长，从而当区间长度很大或是无穷大时，这个误差估计就不太适用了. 误差估计指数增长的原因是：一旦产生局部误差，则从这个新的点出发的流可能随时间增长而指数发散，这与上节谈论的解对初始值的连续性有关，见图 3.2.1.

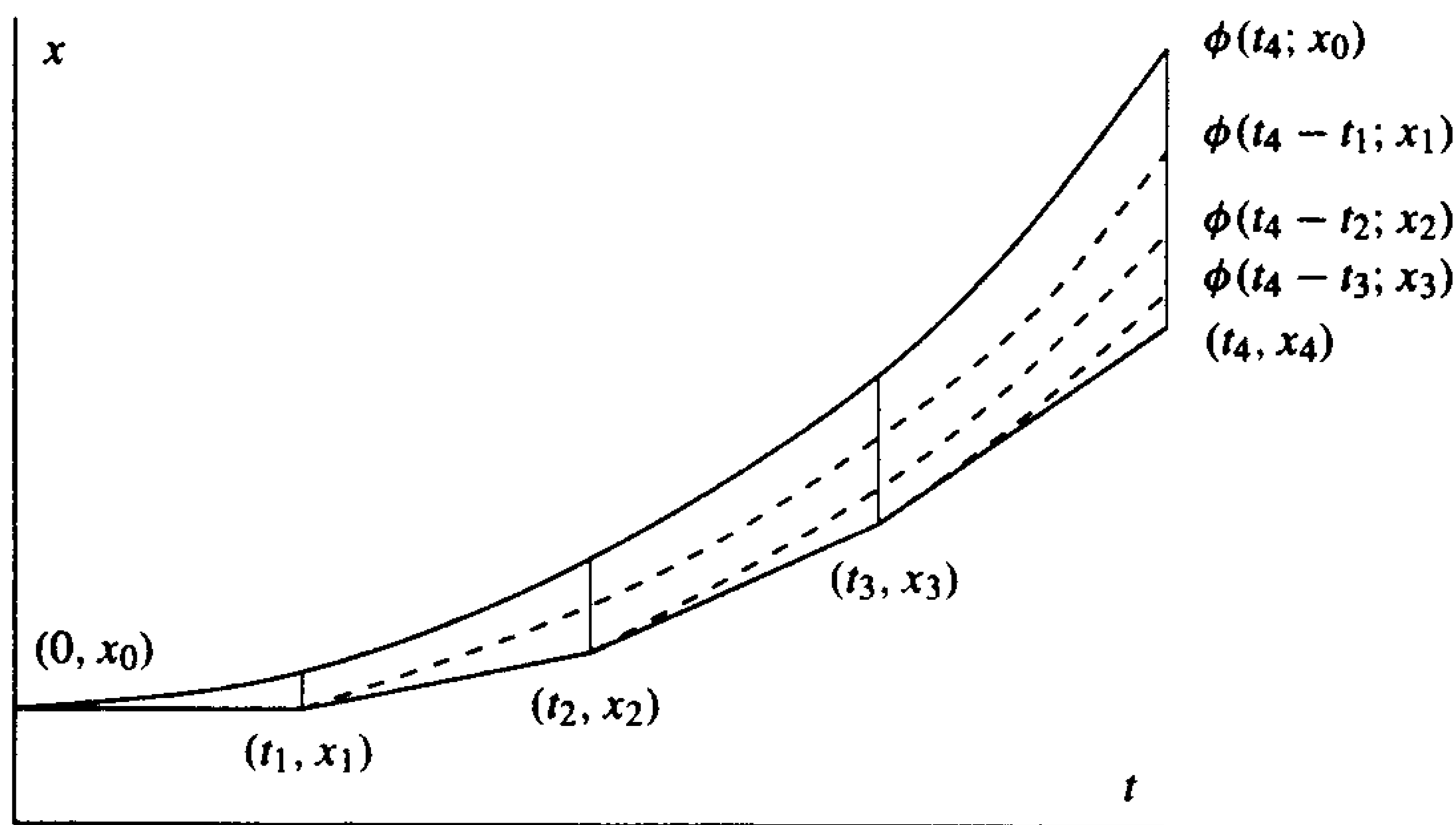


图 3.2.1 局部误差的传播

欧拉法的局部误差以 Mh^2 为上界，因此 $E(h)=Mh$，全局误差关于 h 是线性的. 正是因为全局误差 h 是线性函数，所以欧拉法称为是*一阶方法*(first-order method).

Heun 法的局部误差 $hE(h)=O(h^3)$，全局误差 $E(h)=O(h^2)$，正因为全局误差是 h^2 的同阶无穷小，所以 Heun 法称为是*二阶方法*(second-order method).

龙格-库塔法的局部误差 $hE(h)=O(h^5)$，全局误差 $E(h)=O(h^4)$，正因为全局误差是 h^4 的同阶无穷小，所以龙格-库塔法称为是*四阶方法*(fourth-order method). 尽管龙格-库塔法与欧拉法和 Heun 法相比，每一步都需要计算更多的数值，但它更准确且考虑到了解的弯曲度，因此四阶龙格-库塔法更为常用.

79

图解法

欧拉法的数值解可以认为是这样得到的：从每一个点(t_n, x_n)出发，沿着方向场$(1, f(t_n, x_n))$移动而得到一个新点

$$(t_{n+1}, x_{n+1}) = (t_n, x_n) + h(1, f(t_n, x_n)) = (t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n)).$$

因为方程的真解在空间(t, x)中运动，所以它在每个点(t, x)处与*方向场*$(1, f(t, x))$相切. 要用图解方法来理解解的这种性质，需要先在(t, x)平面中画出一系列点处的方向场，然后画出与方向场相切的一些曲线.

例 3.2.4　考虑微分方程

$$\dot{x} = x(1-x^2) = f(x).$$

因为方程右端的函数不依赖于时间 t，所以 x 值相同的点的方向场相同. 我们计算从 $x=-2$ 到 $x=2$ 之间的 21 个点的 $f(x)$ 值，再画出 $0 \leqslant t \leqslant 10$ 的方向场，参见图 3.2.2，实际上此图是用 Maple 画的，而不是手工画出的(也可以用手粗略地画出).

在图 3.2.3 中添加的曲线分别满足初始条件 $x(0)=-2, -1, -0.25, 0.25, 1$ 和 2. 当然可以手工近似地画出这些曲线. 从图中看出，初始值 $x_0>0$ 的解随着 t 的增加趋向于 $x=1$；初始值 $x_0<0$ 的解随着 t 的增加趋向于 $x=-1$.

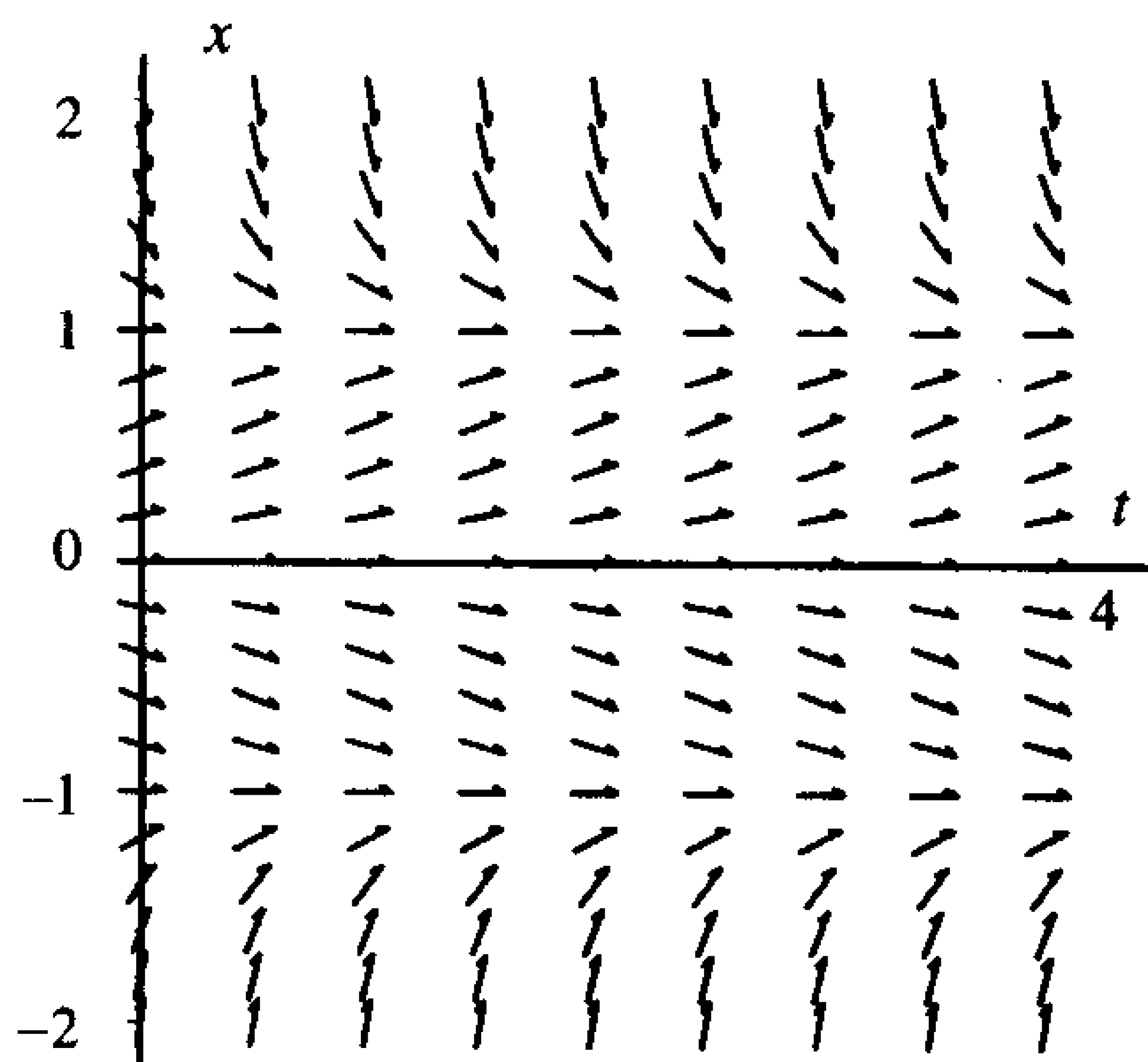


图 3.2.2　例 3.2.4 的方向场

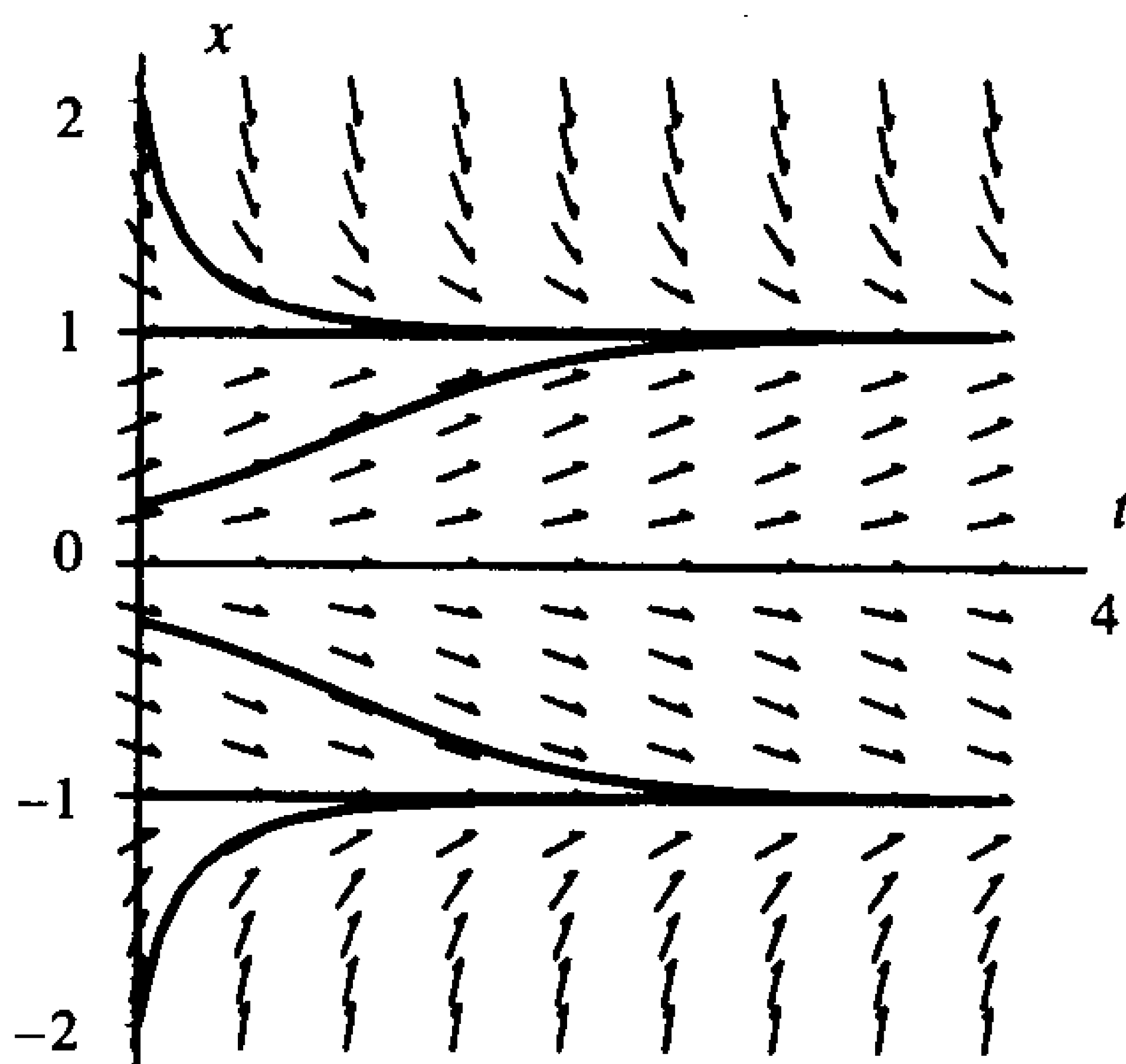


图 3.2.3　例 3.2.4 的方向场和解　■

高维数值法

高维方程的数值法和一维方程的数值法相似，只不过考虑对象都变为向量而已.

高维情形的欧拉法中：

$$x_{n+1} = x_n + hF(x_n) \quad 和$$
$$t_{n+1} = t_n + h.$$

80

高维情形的 Heun 法中:

$$\begin{aligned}
k_{1,n} &= F(x_n, t_n),\\
z_n &= x_n + hk_{1,n},\\
k_{2,n} &= F(z_n, t_n + h),\\
x_{n+1} &= x_n + h\left(\frac{k_{1,n} + k_{2,n}}{2}\right),\\
t_{n+1} &= t_n + h.
\end{aligned}$$

高维情形的龙格-库塔法中:

$$\begin{aligned}
k_{1,n} &= F(x_n, t_n)\\
z_{1,n} &= x_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\\
k_{2,n} &= F\left(z_{1,n}, t_n + \frac{h}{2}\right)\\
z_{2,n} &= x_n + \frac{h}{2}k_{2,n}\\
k_{3,n} &= F\left(z_{2,n}, t_n + \frac{h}{2}\right)\\
z_{3,n} &= x_n + hk_{3,n}\\
k_{4,n} &= F(z_{3,n}, t_n + h)\\
x_{n+1} &= x_n + h\left(\frac{k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}}{6}\right)\\
t_{n+1} &= t_n + h.
\end{aligned}$$

例 3.2.5 考虑简单的线性方程组

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\\
\dot{x}_2 &= -4x_1,
\end{aligned}$$

81

$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 令方程组右端确定的向量场是

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -4x_1 \end{bmatrix},$$

对每一种数值方法都取步长 $h = 0.1$.

从欧拉法开始, 先求 F 在 x_0 处的值, 则

$$F\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 且$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

重复上述过程，得到

$$F\begin{bmatrix}0.1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-0.4\end{bmatrix}\quad 且$$

$$x_2=\begin{bmatrix}0.1\\1\end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix}1\\-0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2\\0.96\end{bmatrix}.$$

利用 Heun 法，可得

$$k_{1,0}=F\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$z_0=x_0+0.1k_{1,0}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\1\end{bmatrix},$$

$$k_{2,0}=F\begin{bmatrix}0.1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-0.4\end{bmatrix},$$

$$x_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.1\left[\frac{1}{2}\right]\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-0.4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.1\\0.98\end{bmatrix}.$$

重复上述过程，可得

$$k_{1,1}=F\begin{bmatrix}0.1\\0.98\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.98\\-0.4\end{bmatrix},$$

$$z_0=\begin{bmatrix}0.1\\0.98\end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix}0.98\\-0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.198\\0.94\end{bmatrix},$$

$$k_{2,1}=F\begin{bmatrix}0.198\\0.94\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.94\\-0.792\end{bmatrix},$$

$$x_2=\begin{bmatrix}0.1\\0.98\end{bmatrix}+0.1\left[\frac{1}{2}\right]\left(\begin{bmatrix}0.98\\-0.4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.94\\-0.792\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.196\\0.9204\end{bmatrix}.$$

下面再给出步长 $h=0.1$ 时的龙格-库塔法的一步.

$$k_{1,0}=F\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$z_{1,0}=x_0+\frac{h}{2}k_{1,0}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.05\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.05\\1\end{bmatrix},$$

82

$$k_{2,0}=F(z_{1,0})=F\begin{bmatrix}0.05\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-0.2\end{bmatrix},$$

$$z_{2,0}=x_0+\frac{h}{2}k_{2,0}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.05\begin{bmatrix}1\\-0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.05\\0.99\end{bmatrix},$$

$$k_{3,0}=F(z_{2,0})=F\begin{bmatrix}0.05\\0.99\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99\\-0.2\end{bmatrix},$$

$$z_{3,0}=x_0+hk_{3,0}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix}0.99\\-0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.099\\0.98\end{bmatrix},$$

$$k_{4,0}=F(z_{3,0})=F\begin{bmatrix}0.099\\0.98\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.98\\-0.396\end{bmatrix},$$

$$k_{av,0}=\frac{1}{6}[k_{1,0}+2k_{2,0}+2k_{3,0}+k_{4,0}]$$

$$=\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\-0.2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0.99\\-0.2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.98\\-0.396\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.9933\\-0.1993\end{bmatrix},$$

$$x_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix}0.9933\\-0.1993\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.09933\\0.98007\end{bmatrix}.$$

■

因为欧拉法只考虑初始点的向量场，而忽略轨线的弯曲情况，从而由此方法得到的近似解存在持续累积的几何误差，例如考虑简单的无摩擦力的调和振子

$$\dot{x}=y$$
$$\dot{y}=-4x,$$

尽管方程的真解是在一个椭圆上运动，但用欧拉法得到的近似解却是螺旋向外运动的．原因在于欧拉法的第一步要求近似解沿着椭圆的切线方向运动，并到达一个位于原来椭圆外侧的新点；第二步则要沿着新点处的切线方向继续运动，从而近似解更加远离初始椭圆．如此下去，近似解就向外螺旋而出．图 3.2.4 展示了(x, y)平面中的这些曲线的情况.

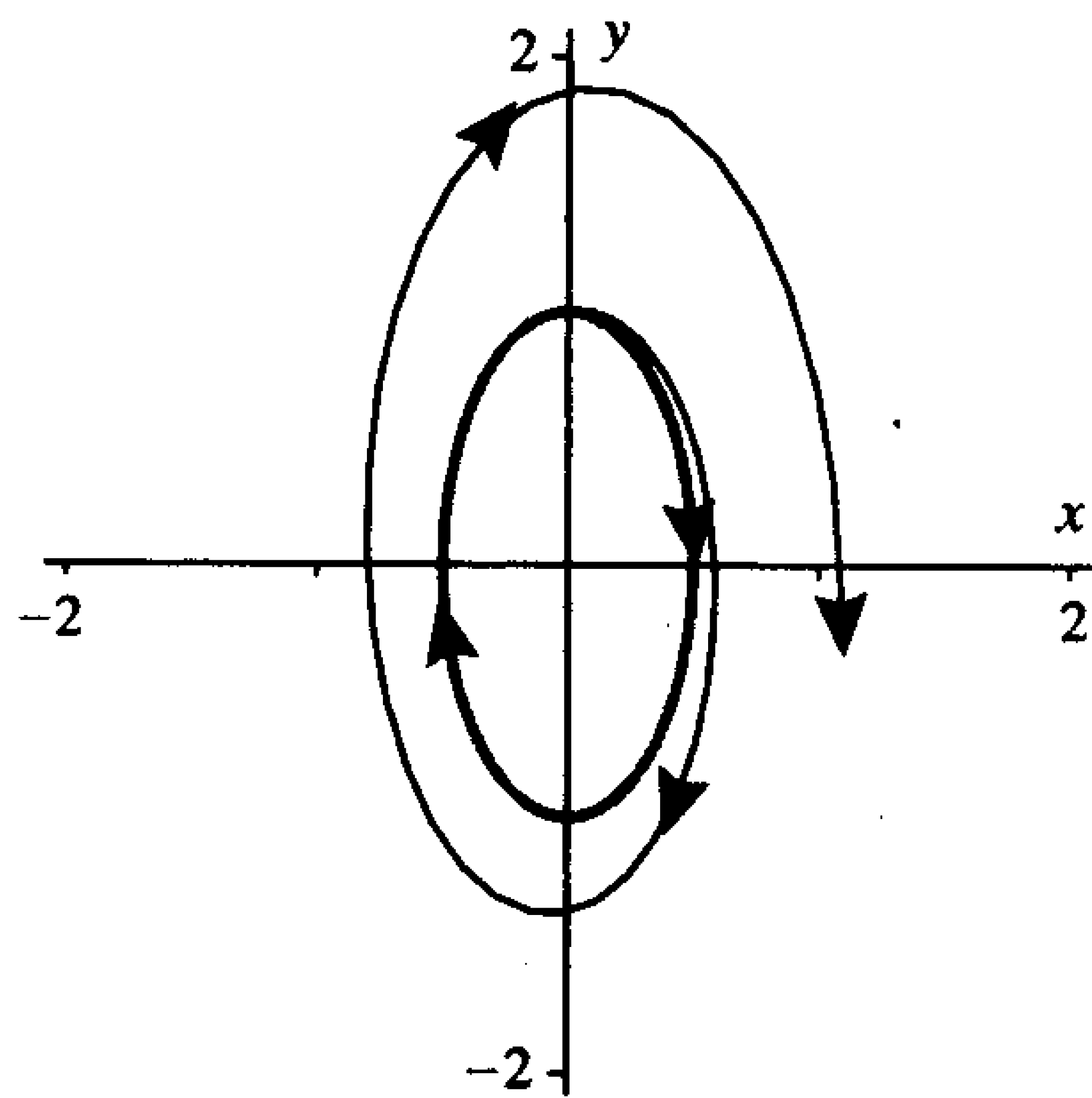


图 3.2.4　椭圆形中心的真解与欧拉法的近似解的比较

因为 Heun 法和龙格-库塔法平均了更远处点的向量场，而且考虑到解的弯曲度，所以本书的相图就是采用四阶龙格-库塔法来画的．龙格-库塔法是精度和效率的有机结合体.

对于更复杂的系统，研究人员会使用更复杂的数值方法，改进之一就是采用变步长思想．这个思想就是根据需要调整步长，以便在相空间中所关心的区域有合理的结果．在不动点附近增大步长，以保证进展速度不至于太慢，在解快速移动的区域，减小步长.

改进之二就是采用变阶数，在相平面中，解弯曲较大的部分采用阶数高的数值方法，解相对较直的部分采用阶数低的数值方法.

图解法

就像在(t, x)平面中画出方向场有助于分析数量方程的解一样，在 $\boldsymbol{x}$ 平面中画出向量场，可以帮助我们了解多变量方程解的性质.

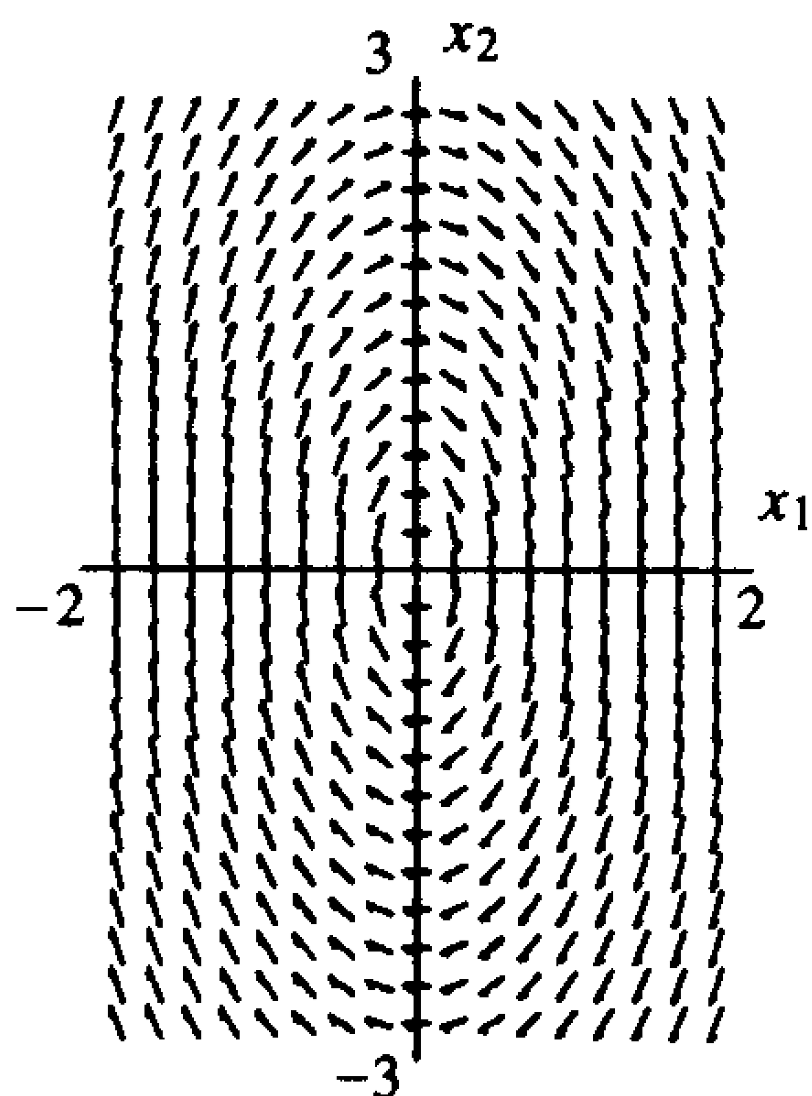
例 3.2.6　考虑方程组系统

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-4x_1.$$

由系统右端定义的向量场是

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -4x_1 \end{bmatrix}.$$

图 3.2.5 中已在不同的位置画出了向量场：在每一个基点 x 处，附一个向量 $F(x)$，这样，便在平面上得到一些向量(既有大小又有方向)的集合，这些向量随点的不同而变化. 在图 3.2.6 中加上了满足条件 $(x_1(0), x_2(0)) = (0.5, 0)$，$(1, 0)$ 和 $(1.5, 0)$ 的解曲线.



84

图 3.2.5 例 3.2.6 的向量场

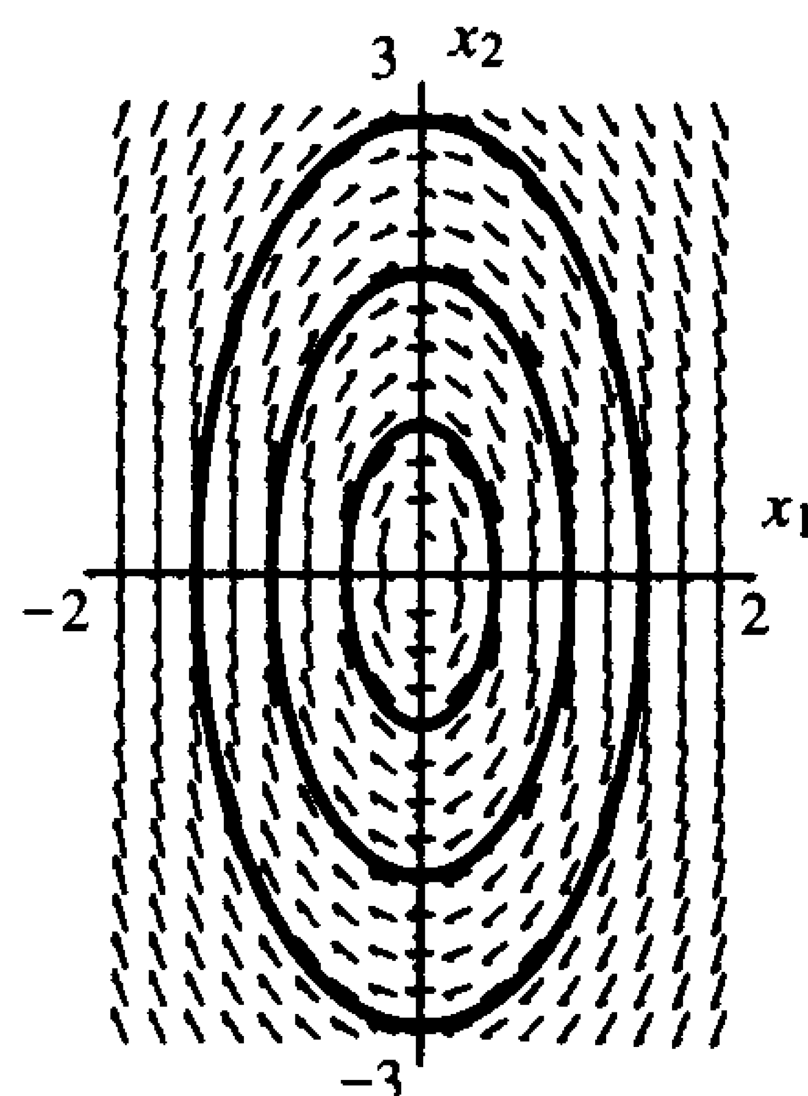


图 3.2.6 例 3.2.6 的向量场合解曲线 ■

3.3 理论与证明

解的性质

只给出不依赖于时间的微分方程组的相关证明，对于明显依赖于时间的方程 $\dot{x} = F(x, t)$，可通过引入新的变量 $\dot{\tau} = 1$ 化为不依赖于时间的方程：

$$\dot{x} = F(x, \tau)$$
$$\dot{\tau} = 1.$$

下面仍采用方程组的记号，当然这包含了只有一个因变量的数量方程的情形.

在证明解的存在与唯一性定理时，需要用到 $F(x)$ 有连续偏导数这一事实以便于用 $\|x - x'\|$ 来估计 $\|F(x) - F(x')\|$ 的大小，这种性质称为利普希茨(Lipschitz)条件，证明的结果能满足本书的需要，但它不是最常用的.

定理 3.3.1 *假设 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中包含闭球*

$$\bar{B}(x_0; r) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$$

的区域中有连续偏导数，则存在常数 L 使得对 $\bar{B}(x_0; r)$ 中的任意两点 x，x' 成立

$$\|F(x) - F(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

证明 我们用单变量函数的中值定理来证明这个结论. 连接 x，x' 的线段可用参数表示为

85

$$(1 - t)x + tx' = x + tv,$$

其中 $v = x' - x$，$0 \leq t \leq 1$. 用 F 沿该线段的取值定义函数 $g(t)$：

$$g(t) = F((1 - t)x + tx') = F(x + tv).$$

则 $\boldsymbol{g}(0)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{g}(1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}')$，由链式求导法则(应用于 $\boldsymbol{F}$ 的每个部分)

$$\boldsymbol{g}'(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})v_j = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}.$$

因此

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(1)-\boldsymbol{g}(0)=\int_0^1 \boldsymbol{g}'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t.$$

在最后一步中取绝对值，则有

$$\| D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}\| \leqslant \| D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|,$$

这里用到了偏导数矩阵的范数 $\| D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})}\|$，因为所有偏导数都是连续的，所以存在常数 $L>0$ 使得对所有 $\bar{B}(\boldsymbol{x}_0, r)$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\| D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{y})}\| \leqslant L$，特别地，在点 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v}$ 处以上不等式也成立，从而

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\| \leqslant \int_0^1 \| D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 L\|\boldsymbol{v}\|\,\mathrm{d}t \leqslant L\|\boldsymbol{v}\| = L\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|.$$

定理证毕. ■

现在回到定理 3.1.6，我们将它分成几个定理来证.

定理 3.3.2 *考虑微分方程*

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 和 $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中某个开集 U 上是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数，并设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 U 中的一个点，则方程存在定义在时间区间 $-\tau<t<\tau$ 上的满足 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$.

证明 证明过程将构造收敛于方程解的一族曲线. 如果 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 是解，则

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

我们用这个积分等式来定义一个迭代公式，首先，取一个试验解，利用上面的等式得到一条更接近于方程解的曲线，例如从试验解 $\boldsymbol{y}(t)$ 开始，定义一个新的试验解 $\boldsymbol{z}(t)=\mathcal{G}(\boldsymbol{y})(t)$ 满足

86

$$\boldsymbol{z}(t)=\mathcal{G}(\boldsymbol{y})(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}(s))\,\mathrm{d}s.$$

特别地，可以从 $\boldsymbol{y}^0(t)\equiv\boldsymbol{x}_0$ 开始，依次定义 $\boldsymbol{y}^i(t)$ 满足

$$\boldsymbol{y}^i(t)=\mathcal{G}(\boldsymbol{y}^{i-1})(t).$$

这一过程称为皮卡迭代方案(Picard iteration scheme).

下面需要验证这一列试验解是否收敛于方程真解. 首先选取一些常数和区间长度：取 $r>0$ 以保证闭球 $\bar{B}(\boldsymbol{x}_0;\ r)$ 包含在微分方程的定义域中，取 L 为上一个定理中的李普希兹常数，K 表示 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|$ 在 $\bar{B}(\boldsymbol{x}_0;\ r)$ 中的上界，即 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|\leqslant K$，$\boldsymbol{x}\in\bar{B}(\boldsymbol{x}_0;\ r)$，再取时间长度

$$\tau=\min\left\{\frac{r}{K},\frac{1}{L}\right\},$$

并在区间 $-\tau\leqslant t\leqslant\tau$ 上考虑这列试验解的收敛性，取此区间长度小于等于 r/K 是为了保证当时间 t 在这个范围取值时曲线不会越出 $\bar{B}(\boldsymbol{x}_0;\ r)$，让它小于等于 $1/L$ 是为了保证这列曲线收敛于一条极限曲线.

由递推公式，可以证明 $\boldsymbol{y}^i(t)$ 连续，满足 $\boldsymbol{y}^i(0)=\boldsymbol{x}_0$ 且在 $\bar{B}(\boldsymbol{x}_0;r)$ 中取值，$\boldsymbol{y}^i(0)=\boldsymbol{x}_0$ 可以由定义直接得到，根据 $\boldsymbol{y}^i(t)$ 的定义及连续函数的积分关于积分上限 t 可微从而此积分连续，可推出 $\boldsymbol{y}^i(t)$ 连续，因为 $\boldsymbol{y}^i(t)$ 与初始值的距离满足以下估计式：

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}^i(t)-\boldsymbol{x}_0\| &= \left\|\int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^{i-1}(s))\mathrm{d}s\right\| \leqslant \left|\int_0^t \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^{i-1}(s))\|\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^t K\mathrm{d}s\right| = K|t| \leqslant K\tau \leqslant r.\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{y}^i(t)$ 在 $\bar{B}(\boldsymbol{x}_0;r)$ 中取值.

下面证明这列曲线是收敛的，令 C_0 表示 $\boldsymbol{y}^0(t)$ 和 $\boldsymbol{y}^1(t)$ 差的界：

$$C_0=\max\{\|\boldsymbol{y}^1(t)-\boldsymbol{y}^0(t)\|:-\tau\leqslant t\leqslant\tau\}.$$

令 L 为利普希茨(Lipschitz)常数，$L\tau=\lambda$，由 τ 的取法可知 λ 小于等于 1，下面用归纳法证明 $\|\boldsymbol{y}^{j+1}(t)-\boldsymbol{y}^j(t)\|\leqslant C_0\lambda^j$. 由 C_0 的定义可知 $j=0$ 时成立，假设对 $j-1$ 成立，则

[87]

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}^{j+1}(t)-\boldsymbol{y}^j(t)\| &= \left\|\int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^j(s))-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^{j-1}(s))\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \left|\int_0^t \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^j(s))-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^{j-1}(s))\|\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^t L\|\boldsymbol{y}^j(s)-\boldsymbol{y}^{j-1}(s)\|\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^t LC_0\lambda^{j-1}\mathrm{d}s\right| \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= LC_0\lambda^{j-1}|t| \leqslant C_0\lambda^{j-1}\tau L = C_0\lambda^j.\end{aligned}$$

公式得证.

要证明收敛性，需要比较指标差多于 1 的曲线的距离：

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}^{j+k}(t)-\boldsymbol{y}^j(t)\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\|\boldsymbol{y}^{j+i+1}(t)-\boldsymbol{y}^{j+i}(t)\| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1}C_0\lambda^{j+i} \\ &\leqslant C_0\lambda^j\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i = C_0\frac{\lambda^j}{1-\lambda}.\end{aligned}$$

只要 j 取得足够大，就能保证这个差小于任意给定的数，这就是曲线族的柯西性质. 可以证明对任意给定的 t，这个序列都将收敛，参看[**64**]、[**71**]和[**65**]，这样，我们便可以定义极限曲线

$$\boldsymbol{y}^\infty(t)=\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{y}^j(t).$$

又因为这族曲线关于 t 一致收敛(因为保证收敛的界与 t 无关)，从而极限曲线是连续的，最后，因为

$$\boldsymbol{y}^\infty(t)=\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{y}^{j+1}(t)=\lim_{j\to\infty}\mathcal{G}(\boldsymbol{y}^j)(t)=\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^j(s))\mathrm{d}s=\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^\infty(s))\mathrm{d}s.$$

[88] 所以两边微分后可得极限曲线满足微分方程. ■

下面同时证明唯一性和解对初始条件的连续依赖性，我们将用到著名的格朗沃尔(Gronwall)不等式，该不等式的证明作为引理给出.

定理 3.3.3　考虑微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 和 $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中某个开集 U 上是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数，$\boldsymbol{x}_0$ 是 U 中的一个点. 则满足初始条件 $\boldsymbol{x}_0(0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解在下面意义下是唯一的，即若有两个解 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ 满足条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}_0$，那么 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ 在包含时刻 $t=0$ 的最大公共定义区间上相等，而且解连续地依赖于 $\boldsymbol{x}_0$.

证明　假设 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ 是分别满足条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)\| &= \left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0+\int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(s))-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}(s))\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\| + \left|\int_0^t \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(s))-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}(s))\|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\| + \left|\int_0^t L\|\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}(s)\|\,\mathrm{d}s\right|.\end{aligned}$$

如果令 $v(t)=\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)\|$，则

$$v(t) \leqslant v(0) + \left|\int_0^t Lv(s)\,\mathrm{d}s\right|.$$

利用下面的引理——格朗沃尔不等式可以导出 $v(t)$ 的界.　■

引理 3.3.4(格朗沃尔不等式)　令 $v(t)$ 是区间 $-\tau<t<\tau$ 上连续、非负的实值函数，常数 L，$C\geqslant 0$，且有不等式

$$v(t) \leqslant C + \left|\int_0^t Lv(s)\,\mathrm{d}s\right|.$$

则

$$v(t) \leqslant C\mathrm{e}^{L|t|}.$$

特别地，当 $C=0$ 时，$v(t)\equiv 0$.

证明　只证明 $t\geqslant 0$ 的情形，对 $t<0$ 的情形可通过把 t 取为积分下限推出.

我们不能对一个不等式进行微分而得到一个新的不等式，但如果定义

$$U(t) = C + \int_0^t Lv(s)\,\mathrm{d}s,$$

则显然 $v(t)\leqslant U(t)$，且可以对 $U(t)$ 进行微分得到

$$U'(t) = Lv(t) \leqslant LU(t).$$

先考虑 $C>0$ 的情形，此时 $U(t)>0$，从而两边可以同时除以 $U(t)$，得到

$$\frac{U'(t)}{U(t)} \leqslant L,$$

$$\ln\left(\frac{U(t)}{U(0)}\right) \leqslant Lt,\quad 且$$

$$U(t) \leqslant U(0)\mathrm{e}^{Lt} = C\mathrm{e}^{Lt}.$$

因此，$v(t)\leqslant U(t)\leqslant C\mathrm{e}^{Lt}$.

当 $C=0$ 时，取一单调递减趋于零的序列 $\{C_n\}$，则由第一种情形的结论，可知对所有的 n，

$$v(t) \leqslant C_n e^{Lt}.$$

因此，$v(t) \leqslant 0$，又考虑到 $v(t)$ 非负，从而 $v(t) \equiv 0$. ■

回到定理 3.3.3 的证明　利用格朗沃尔不等式可得

$$\| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t) \| \leqslant \| \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0 \| e^{L|t|}.$$

这个不等式表明解连续地依赖于初始值，如果 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0$，由上面的不等式可知在整个区间上 $\| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t) \| = 0$，解的唯一性得证. ■

第一变分方程——定理 3.1.10 的解释　解对初始值的可微性的证明很麻烦，如果假设这种可微性成立，且可以交换微分次序，则能直接推出第一变分方程. 过程如下：令 $\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v}$ 表示过点 $\boldsymbol{x}_0$（对应 $s=0$）的直线，

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v}) \Big|_{s=0}.$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v}) \Big|_{s=0}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v})\right) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v})) \Big|_{s=0} \\
&= \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0)) \frac{\partial}{\partial s}(\phi_k(t;\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v})) \Big|_{s=0} \\
&= D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))} \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v}) \Big|_{s=0} = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}\boldsymbol{v}(t).
\end{aligned}$$

第四个等式用到了多元函数微分的链式法则，第五个等式是把链式法则改写成矩阵和向量的形式，其中偏导数矩阵 $\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\right]$ 用 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})}$ 表示，$\boldsymbol{v}(t)$ 如上面所示.

[90] 令 $\boldsymbol{u}^j$ 表示第 j 个分量为 1，其他分量为 0 的单位向量，并把上面公式中的向量 $\boldsymbol{v}$ 依次取为 $\boldsymbol{u}^j$，则有

$$\boldsymbol{v}^j(t) = \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{u}^j) \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0).$$

用 $\boldsymbol{v}^j(t)$ 代替前面公式中的 $\boldsymbol{v}(t)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0) = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0).$$

考虑到 $\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 是 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}$ 的第 j 列，因此把它们放在一起构成矩阵 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}$，则得到矩阵微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))} = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))},$$

注意到当 $t=0$ 时，$\boldsymbol{\phi}(0;\ \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$，从而 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi}_{(0;\boldsymbol{x}_0)} = \boldsymbol{I}$，因此 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\phi}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}$ 是下面依赖于时间的线性系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}\boldsymbol{v}$$

满足 $D_x\phi_{(0;x_0)}=\boldsymbol{I}$ 的矩阵解. ■

数值解的局部误差

3.2 节讨论了欧拉法、Heun 法及龙格-库塔法的局部误差，这一节将给出欧拉法的更具体的一个界并导出 Heun 法的界. 因为四阶龙格-库塔法的局部误差的推导很复杂，此处略去，关于数值方法更详细的讨论可参阅 Burden 和 Faires 合著的[**23**].

要明确下面形式的依赖于时间的微分方程

$$\dot{x}=f(t,x)$$

的解，既需要明确初始值 x_0，还要明确对应的初始时刻 $t=\tau$. 因此，我们把方程的解写成

$$\phi(t;\tau,x_0),$$

它满足 $\phi(\tau;\ \tau,\ x_0)=x_0$ 且对所有的 t 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t;\tau,x_0)=f(t,\phi(t;\tau,x_0)).$$

定理 3.3.5 *考虑微分方程*

$$\dot{x}=f(t,x),$$

其中 x 是标量.

(a)假设方程的解在其所在的区域中满足

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)f(t,x)\right|\leqslant 2M.$$

则欧拉法的局部误差以 Mh^2 为界：

$$|x_{n+1}-\phi(h+t_n;t_n,x_n)|\leqslant Mh^2.$$

(b)Heun 法的局部误差是 $O(h^3)$.

证明 (a)从 t_0，x_0 开始并假设已由欧拉法得到 $t_n=t_0+nh$ 和 x_n，下面估计 $|\phi(h+t_n;\ t_n,\ x_n)-x_{n+1}|$，令 $x(t)=\phi(t;\ t_n,\ x_n)$，把它在 t_n 处泰勒展开并代入 $t=t_{n+1}=t_n+h$，可得

$$\phi(t_{n+1};t_n,x_n)=x_n+h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t;t_n,x_n)\Big|_{t=t_n}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t;t_n,x_n)\Big|_{t=\tau_n}\right),$$

其中 τ_n 是介于 t_n 和 $t_{n+1}=t_n+h$ 之间的某时刻，考虑到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t;\ t_n,\ x_n)\Big|_{t=t_n}=f(t_n,\ x_n)$，$x_{n+1}=x_n+h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t;\ t_n,\ x_n)\Big|_{t=t_n}$，以及

$$|\phi(h+t_n;t_n,x_n)-x_{n+1}|=\frac{h^2}{2}\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t;t_n,x_n)\Big|_{t=\tau_n}\right|.$$

可知要估计 $|\phi(h+t_n;\ t_n,\ x_n)-x_{n+1}|$，只需要知道二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t;\ t_n,\ x_n)$ 的一个界.

因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t;\ t_n,\ x_n)=f(t,\ \phi(t;\ t_n,\ x_n))$，利用链式求导法则，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t;t_n,x_n)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,\phi(t;t_n,x_n))+\frac{\partial f}{\partial x}(t,\phi(t;t_n,x_n))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t;t_n,x_n)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}(t,\phi(t;t_n,x_n))+\frac{\partial f}{\partial x}(t,\phi(t;t_n,x_n))f(t,\phi(t;t_n,x_n)).$$

因此若在解的存在区域中有估计式

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)f(t,x)\right|\leqslant 2M$$

那么，欧拉法的局部误差就以 Mh^2 为界：

$$|\phi(h;t_n,x_n)-x_{n+1}|\leqslant Mh^2.$$

(b)下面估计 Heun 法的局部误差，令

$$g(t,x)=\frac{1}{2}[f(t,x)+f(t+h,x+hf(t,x))].$$

则在 Heun 法中

92

$$x_{n+1}=x_n+hg(t_n,x_n).$$

再来估计 $|\phi(t_{n+1};\ t_n,\ x_n)-x_{n+1}|$，下面用泰勒展开式来表示 $\phi(t_{n+1};\ t_n,\ x_n)$ 和 $g(t_n,\ x_n)$ 的值. 首先存在介于 t_n 和 $t_{n+1}=t_n+h$ 之间的 τ_n 使得

$$\begin{aligned}\phi(t_{n+1};t_n,x_n)&=x_n+h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t;t_n,x_n)\Big|_{t=t_n}+\frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t;t_n,x_n)\Big|_{t=t_n}\\&\quad+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\phi(t;t_n,x_n)\Big|_{t=\tau_n}\right)\\&=x_n+hf(t_n,x_n)+\frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t,\phi(t;t_n,x_n))\Big|_{t=t_n}+O(h^3)\\&=x_n+hf(t_n,x_n)\\&\quad+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,x_n)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,t_n)f(t_n,x_n)\right]+O(h^3).\end{aligned}$$

其中我们用 $O(h^3)$来代表

$$\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\phi(t;t_n,x_n)\Big|_{t=\tau_n}\right).$$

同样，对于 $g(t_n,\ x_n)$，我们有

$$\begin{aligned}g(t_n,x_n)&=\frac{1}{2}[f(t_n,x_n)+f(t_n+h,x_n+hf(t_n,x_n))]\\&=\frac{1}{2}f(t_n,x_n)+\frac{1}{2}f(t_n,x_n)+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,x_n)h\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(t_n,x_n)hf(t_n,x_n)+O(h^2)\\&=f(t_n,x_n)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,x_n)\\&\quad+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(t_n,x_n)f(t_n,x_n)+O(h^2),\end{aligned}$$

其中 $O(h^2)$包含了 f 的所有二阶偏导数项. 在 $\phi(t_{n+1};\ t_n,\ x_n)-x_{n+1}$ 中合并同类项，则除了

$O(h^3)$之外的其他项都消掉:

$$\begin{aligned}
&\phi(t_{n+1};t_n,x_n) - x_{n+1}\\
&=\phi(h;t_n,x_n) - [x_n + hg(t_n,x_n)]\\
&=x_n + hf(t_n,x_n)\\
&\quad + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,x_n) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_n,x_n)f(t_n,x_n)\right] + O(h^3)\\
&\quad - x_n - hf(t_n,x_n) - \frac{h^2}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,x_n)\\
&\quad - \frac{h^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(t_n,x_n)f(t_n,x_n) + O(h^3)\\
&=O(h^3).
\end{aligned}$$

这便导出了 Heun 法的局部误差估计. ■ 93

数值解的全局误差

定理 3.3.6 假设数值方法的局部误差为 $hE(h)$,时间区间设为$[t_0,\ t_N]$,其长度 $T=t_N-t_0$ 为一固定值,将区间 N 等分,取步长 $h=T/N$,再假设当 $t_0\leqslant t\leqslant t_N=t_0+Nh$ 时,在方程的解所在的区域上满足

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\leqslant L.$$

则全局误差有估计式

$$|x_N-\phi(t_N;t_0,x_0)|\leqslant\frac{E(h)[\mathrm{e}^{L(t_N-t_0)}-1]}{L}.$$

对于欧拉法,局部误差由 $hE(h)=Mh^2$ 定界,其中

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)f(t,x)\right|\leqslant 2M,$$

从而 $E(h)=Mh$,并且

$$|x_N-\phi(t_N;t_0,x_0)|\leqslant\frac{Mh[\mathrm{e}^{L(t_N-t_0)}-1]}{L}.$$

当 $T=t_N-t_0$ 固定时这一项是 $O(h)$.

对于 Heun 法,局部误差由 $hE(h)=Mh^3$ 定界,从而 $E(h)=Mh^2$,并且

$$|x_N-\phi(t_N;t_0,x_0)|\leqslant\frac{Mh^2[\mathrm{e}^{L(t_N-t_0)}-1]}{L}.$$

对于龙格–库塔法,$hE(h)=Mh^5$,从而 $E(h)=Mh^4$,并且

$$|x_N-\phi(t_N;t_0,x_0)|\leqslant\frac{Mh^4[\mathrm{e}^{L(t_N-t_0)}-1]}{L}.$$

证明 我们把数值方法的最后一项与方程真解的差写成各步之差的和,即

$$\begin{aligned}
x_N-\phi(t_N;t_0,x_0) &= x_N-\phi(t_N;t_{N-1},x_{N-1})+\phi(t_N;t_{N-1},x_{N-1})-\phi(t_N;t_{N-2},x_{N-2})\\
&\quad+\cdots+\phi(t_N;t_1,x_1)-\phi(t_N;t_0,x_0)
\end{aligned}$$

$$= x_N - \phi(t_N;t_{N-1},x_{N-1}) + \phi(t_N;t_{N-1},x_{N-1}) - \phi(t_N;t_{N-1},\phi(t_{N-1};t_{N-2},x_{N-2}))$$
$$+ \phi(t_N;t_{N-2},x_{N-2}) - \phi(t_N;t_{N-2},\phi(t_{N-2};t_{N-3},x_{N-3})) + \cdots$$
$$+ \phi(t_N;t_1,x_1) - \phi(t_N;t_1,\phi(t_1;t_0,x_0))$$

94

以及

$$|x_N - \phi(t_N;t_0,x_0)|$$
$$\leqslant |x_N - \phi(t_{N-1}+h;t_{N-1},x_{N-1})| + |\phi(t_N;t_{N-1},x_{N-1}) - \phi(t_N;t_{N-1},\phi(t_{N-1};t_{N-2},x_{N-2}))|$$
$$+ |\phi(t_N;t_{N-2},x_{N-2}) - \phi(t_N;t_{N-2},\phi(t_{N-2},t_{N-3},x_{N-3}))| + \cdots$$
$$+ |\phi(t_N;t_1,x_1) - \phi(t_N;t_1,\phi(t_1;t_0,x_0))|$$
$$\leqslant |x_N - \phi(t_N;t_{N-1},x_{N-1})| + e^{hL}|x_{N-1} - \phi((t_{N-1};t_{N-2},x_{N-2})|$$
$$+ e^{2hL}|x_{N-2} - \phi(t_{N-2};t_{N-3},x_{N-3})| + \cdots + e^{(N-1)hL}|x_1 - \phi(t_1;t_0,x_0)|,$$

最后一个不等号用到在讨论解对初值的连续性时所得的不等式，并依次取 $t=0$，$h=t_N-t_{N-1}$，$2h=t_N-t_{N-2}$，…，$(N-1)h=t_N-t_1$. 代入局部误差并利用 $T=Nh$，可得

$$|x_N - \phi(t_N;t_0,x_0)| \leqslant E(h)h[1+e^{hL}+e^{2hL}+\cdots+e^{(N-1)hL}]$$
$$= E(h)h\left[\frac{e^{NhL}-1}{e^{hL}-1}\right] = E(h)[e^{TL}-1]\left[\frac{h}{e^{hL}-1}\right].$$

又因为

$$\frac{e^{hL}-1}{h} = L + \frac{1}{2}L^2h + \cdots \geqslant L,$$

从而

$$\frac{h}{e^{hL}-1} \leqslant \frac{1}{L}$$

且有

$$|x_N - \phi(t_N;t_0,x_0)| \leqslant \frac{E(h)[e^{TL}-1]}{L}.$$

三种数值方法的全局误差可直接从上式推出. ■

前面介绍的这些数值方法在固定区间上都有一个界，但是当时间区间的长度 T 趋向于无穷时，由上面的定理可知全局误差将指数增长并趋向于无穷，此时这些界毫无用处.

练习

3.1 非线性方程的解

3.1.1 证明满足初始条件 $x(0)=0$ 的微分方程 $\dot{x}=x^{\frac{1}{3}}$ 的解不唯一，并说明为什么不能应用唯一性定理.

3.1.2 考虑满足初始条件 $x(0)=x_0\neq 0$ 的微分方程 $\dot{x}=x^2$.

a. 验证是否满足存在与唯一性定理的条件.

b. 求方程的显示解.

c. 写出当 $x_0>0$ 时解的最大定义区间.

95

3.1.3 考虑满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的微分方程 $\dot{x}=x^2-1$.

a. 验证是否满足存在与唯一性定理的条件.

b. 求方程的显示解.

c. 写出解的最大定义区间.

3.1.4　考虑满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的微分方程 $\dot{x}=x^2+1$.

a. 验证是否满足存在与唯一性定理的条件.

b. 求方程的显示解.

c. 写出解的最大定义区间.

3.1.5　令 $\phi(t;\ x_0)$ 表示微分方程 $\dot{x}=1+x^{2n}$，$n\geqslant 2$ 的流，$\psi(t;\ x_0)$ 表示微分方程 $\dot{x}=1+x^2$ 的流.

a. 验证当 $x_0\geqslant 1$，$t\geqslant 0$ 时，$\phi(t;\ x_0)\geqslant\psi(t;\ x_0)$，并猜想当 $x_0<1$ 时，它们的大小关系？

b. 证明在有限时间内轨线 $\phi(t;\ x_0)$ 趋向于无穷.

3.1.6　令 $\phi(t;\ x_0)$ 表示微分方程 $\dot{x}=p(x)$ 的流，其中 $p(x)$ 是次数大于等于 1 的多项式，且当 $x>a$ 时 $p(x)>0$，证明对任意 $x_0>a$，$\phi(t;\ x_0)$ 在有限时间内趋向于无穷.

3.1.7　考虑满足初始条件 $x_0\neq\pm 1$ 的微分方程微分方程 $\dot{x}=x^2-1$.

a. 求方程的一个显示解.

b. 分别写出当 $x_0>1$ 以及 $-1<x_0<1$ 时解的最大定义区间.

3.1.8　考虑满足初始条件 $x(0)=1$ 的微分方程 $\dot{x}=x+1$，写出从 $y^0(t)\equiv 1$ 开始的、由皮卡迭代方案确定的第一个六项式近似解(参考 3.1 节或 3.3 节).

3.1.9　考虑线性微分方程组

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_1,$$

满足初始条件 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=1$，写出由 3.3 节用积分表示的皮卡迭代方案所确定的第一个六项式近似解.

3.1.10　设 C_0，C_1 及 C_2 都是正常数，$v(t)$ 是 R 上连续、非负实值函数，满足

$$v(t)\leqslant C_0+C_1|t|+C_2\left|\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s\right|.$$

求证

$$v(t)\leqslant C_0\mathrm{e}^{C_2|t|}+\frac{C_1}{C_2}[\mathrm{e}^{C_2|t|}-1].$$

提示：利用

$$U(t)=C_0+C_1t+C_2\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

3.1.11　设 C_1，C_2 都是正常数，$\boldsymbol{F}$：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 类函数且对所有的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 有 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|\leqslant C_1+C_2\|\boldsymbol{x}\|$，求证方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的解在整个实轴上存在，提示：利用上一题的结果.

3.1.12　考虑依赖于参数的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x};\mu),$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\mu\in\mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 和 μ 的 C^1 类函数，令 $\phi^t(\boldsymbol{x};\ \mu)$ 表示满足 $\phi^0(\boldsymbol{x};\ \mu)=\boldsymbol{x}$ 的解，求证 $\phi^t(\boldsymbol{x};\ \mu)$ 连续地依赖于参数 μ.

96

3.2　微分方程的数值解

3.2.1　考虑满足初始条件 $x(0)=1$ 的微分方程 $\dot{x}=x^2$.

a. 取步长 $h=0.1$，分别利用欧拉法、改进的欧拉法、龙格-库塔法估计 $x(0.3)$.

b. 在(t, x)平面上简要地画出方向场，并在其中画出与方向场处处相切的轨线$\phi(t, x)$：$0 \leqslant t \leqslant 1$的略图.

注：不必画出方程的精确解，因为此处不要求将它与数值解进行比较.

3.2.2 考虑微分方程$\dot{x} = x - x^2$.

a. 在(t, x)平面上简要地画出方向场.

b. 在(t, x)平面上简要地画出方向场，并在其中画出与方向场处处相切的轨线$\phi(t;\ -0.25)$，$\phi(t;\ 0)$，$\phi(t;\ 0.25)$，$\phi(t;\ 1)$，$\phi(t;\ 2)$的略图.

3.2.3 考虑方程组

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -2x \end{bmatrix},$$

初始值$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a. 取步长$h = 0.1$，分别利用欧拉法、改进的欧拉法、龙格–库塔法估计$\boldsymbol{x}(0.2)$.

b. 在(x, y)平面上简要地画出方向场，并在其中画出与方向场处处相切的轨线$\phi(t, (1, 0))$：$0 \leqslant t \leqslant 1$的略图.

注：不必画出方程的精确解，因为此处不要求将它与数值解进行比较.

3.2.4 考虑方程组

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 4x \end{bmatrix},$$

初始值$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a. 取步长$h = 0.1$，分别利用欧拉法、改进的欧拉法、龙格–库塔法估计$\boldsymbol{x}(0.2)$.

b. 在(x, y)平面上简要地画出方向场，并在其中画出与方向场处处相切的轨线$\phi(t, (1, 1))$：$0 \leqslant t \leqslant 1$的略图.

注：不必画出方程的精确解，因为此处不要求将它与数值解进行比较.

3.2.5 考虑满足初始条件$x(0) = 1/3$的微分方程

$$\dot{x} = 2x + e^{-t},$$

它的解是$x(t) = \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$.

a. 取步长$h = 0.1$，分别利用欧拉法、改进的欧拉法、龙格–库塔法估计$x(0.2)$.

b. 利用定理3.3.6中的全局误差估计公式来确定h多小时才能保证在$T = 0.5$处的误差不超过0.1.

第4章 不动点与相图

本章将利用相图来分析非线性微分方程，该方法尤其适用于二维情形，因为其相空间就是相平面. 本章的重点放在一些例题上，其中不动点是相图最重要的特征. 下一章则利用能量函数(或其他检验函数)来确定相图. 第6章重点研究周期轨道. 第7章研究的则是混沌微分方程.

在研究相图之前，先给出不动点稳定性的定义，然后利用第2章给出的线性相图来解释这些定义间的关系.

先从一维方程的相空间入手，因为一维方程与微积分以及初级微分方程课程的内容有着更紧密的联系，而且它也是最简单的情形.

之后，本章在4.3节转向对相平面的分析和讨论，并根据$\dot{x}_1$和$\dot{x}_2$的符号将相平面分成不同的区域. 本章的4.4节还利用线性方程来确定不动点附近的性态. 在4.5节中，所有这些方法都被用来分析一类描述两种竞争种群相互作用的微分方程.

4.1 不动点的稳定性

对于线性系统要弄清楚的一个重要特征就是趋于原点的解的数量. 这里不仅给出线性系统的定义，还利用专业术语给出了稳定性的定义，该定义同时适用于线性和非线性系统，而且也适用于任意维的系统.

设有微分方程$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，假设$\boldsymbol{F}$的各分量有连续偏导数，故方程的解存在且唯一. 设$\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$是流，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0)) \quad 和 \quad \boldsymbol{\phi}(0;\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

定义 4.1.1 *若$\boldsymbol{x}^*$满足$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$则称$\boldsymbol{x}^*$为不动点(fixed point). 从不动点出发的解的速度为0，因此它会停留在该点而且对所有的t都有$\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$，这正是不动点的由来. 传统上常称之为平衡点(equilibrium point)，这是因为当力达到平衡时，物体就不再移动.*

对线性系统而言，原点总是不动点，即$\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{0} \equiv \boldsymbol{0}$. 它是线性系统唯一的不动点，除非0是特征值.

极限集

5.4节将介绍ω极限集和α极限集的一些性质，这里给出ω极限集和α极限集的定义是为了利用这两个术语来描述方程从正或负向趋于不动点的解. 这一概念也用来定义不动点的稳定性. (注意到α是希腊字母表中的第一个字母，而ω是最后一个字母.)

定义 4.1.2 *如果当t趋于无穷时，$\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$不断地在$\boldsymbol{q}$附近，则称$\boldsymbol{q}$为过$\boldsymbol{x}_0$的轨线的$\omega$极限点($\omega$-limit point)(即存在时间序列$t_j$，当$j$趋于无穷时$t_j$趋于无穷，使得$\boldsymbol{\phi}(t_j;\ \boldsymbol{x}_0)$趋于$\boldsymbol{q}$. 当然，如果当$t$趋于无穷时，$\|\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^*\|$趋于0，则$\boldsymbol{x}^*$是$\boldsymbol{x}_0$唯一的$\omega$极限点. $\boldsymbol{x}_0$的ω*

极限点可以不唯一，$\boldsymbol{x}_0$ 所有 ω 极限点的集合记为 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$，称为 $\boldsymbol{x}_0$ 的 ω 极限集(ω-limit set).

如例 2.2.7 所示，对于线性椭圆中心而言，过某一点的 ω 极限集是过该点的整个周期轨线，因为轨线反复经过椭圆上的每个点. 对于例 2.2.14 所示的拟周期运动而言，满足 $r_1^2 = \omega_1^2 x_{1,0}^2 + x_{3,0}^2$ 和 $r_2^2 = \omega_2^2 x_{2,0}^2 + x_{4,0}^2$ 的点 $(x_{1,0},\ x_{2,0},\ x_{3,0},\ x_{4,0})$ 的 ω 极限集是集

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \omega_1^2 x_1^2 + x_3^2 = r_1^2,\quad \omega_1^2 x_2^2 + x_4^2 = r_2^2\}.$$

5.4 节给出了更复杂的极限集.

定义 4.1.3　类似地，如果当 t 趋于负无穷时，$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 不断地在 $\boldsymbol{q}$ 附近，则称 $\boldsymbol{q}$ 为过 $\boldsymbol{x}_0$ 的轨线的 α 极限点(α-limit point). 特别地，如果当 t 趋于负无穷时，$\|\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^*\|$ 趋于 0，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $\boldsymbol{x}_0$ 唯一的 α 极限点. $\boldsymbol{x}_0$ 的所有 α 极限点的集合记为 $\alpha(\boldsymbol{x}_0)$，称为 $\boldsymbol{x}_0$ 的 α 极限集(α-limit set).

定义 4.1.4　不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的稳定流形(stable manifold) $W^s(\boldsymbol{x}^*)$ 是指当 t 趋于正无穷时，趋于不动点的所有点的集合，即

$$W^s(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}_0 : \text{当 } t \to \infty \text{ 时}, \phi(t;\boldsymbol{p}_0) \text{ 趋于 } \boldsymbol{x}^*\} = \{\boldsymbol{p}_0 : \omega(\boldsymbol{p}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}\}.$$

若 t 趋于无穷时，轨道趋于唯一一点 $\boldsymbol{x}^*$，则 ω 极限集就是该点，即 $\omega(\boldsymbol{p}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}$. 若稳定流形是一个开集，则称 $W^s(\boldsymbol{x}^*)$ 是 $\boldsymbol{x}^*$ 的吸引域(basin of attraction).

同样，不稳定流形(unstable manifold of the fixed point) $W^u(\boldsymbol{x}^*)$ 是指当 t 趋于负无穷时，趋于不动点的所有点的集合，即

$$W^u(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}_0 : \text{当 } t \to -\infty \text{ 时}, \phi(t;\boldsymbol{p}_0) \text{ 趋于 } \boldsymbol{x}^*\} = \{\boldsymbol{p}_0 : \alpha(\boldsymbol{p}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}\}.$$

若 t 趋于负无穷时轨道趋于唯一一点 $\boldsymbol{x}^*$，则 α 极限集就是该点，即 $\alpha(\boldsymbol{p}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}$. 4.4 节将介绍有关稳定流形和不稳定流形的更多性质.

100

稳定性类型

下面给出几种确定不动点稳定性的方法. 对线性系统的椭圆中心来说，解的轨迹在椭圆轨道上移动时与原点的距离几乎相同；至少轨线是不会远离原点的. 这一点可通前面介绍的李雅普诺夫稳定性来体现. 对于所有特征值实部为负的线性系统而言，轨线不但停留在原点附近而且趋于原点，下面给出的渐近稳定性的定义体现了这一点.

定义 4.1.5　若初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 离 $\boldsymbol{x}^*$ 足够近时，对一切 $t \geqslant 0$ 解 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 都在 $\boldsymbol{x}^*$ 附近，则称不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 为李雅普诺夫稳定的或 L 稳定的(Lyapunov stable or L-stable). 确切地说，若对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ 时，对于任意的 $t \geqslant 0$ 有 $\|\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$，则称不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 为 L 稳定的.

线性椭圆中心是 L 稳定的，但应取 δ 小于 ε，原因是解是在一个椭圆上而不是在圆上移动. 一个线性稳定焦点也总是 L 稳定的，而且也要取 δ 小于 ε.

定义 4.1.6　如果一个不动点不是 L 稳定的(即存在 $\varepsilon_1 > 0$，对任意的 $\delta > 0$ 有满足 $\|\boldsymbol{x}_\delta - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ 的某一点 $\boldsymbol{x}_\delta$ 和依赖于 $\boldsymbol{x}_\delta$ 的时间 $t_1 > 0$ 使得 $\|\phi(t_1;\ \boldsymbol{x}_\delta) - \boldsymbol{x}^*\| > \varepsilon_1$)，则该不动点是不稳定的(unstable). 因此，有从 $\boldsymbol{x}^*$ 任意近处出发的轨线，其上有点与 $\boldsymbol{x}^*$ 的距离至少为 ε_1.

定义 4.1.7　若存在 $\delta_1 > 0$ 使得对所有满足 $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \delta_1$ 的 $\boldsymbol{x}_0$ 有 $\omega(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}$(即当 t

趋于无穷时，对所有满足 $\| x_0 - x^* \| < \delta_1$ 的 x_0 有 $\| \phi(t; x_0) - x^* \| \to 0$，则不动点 x^* 是弱渐近稳定的(weakly asymptotically stable)．因此，只要稳定流形包含不动点某领域的所有点，则该不动点就是弱渐近稳定的．若不动点既是 L 稳定的又是弱渐近稳定的，则该不动点被称为是渐近稳定的(asymptotically stable)．一个渐近稳定的不动点也称作不动点汇(sink)．本书也用“吸引”(attracting)来等同于渐近稳定性，但在其他书中吸引意味着弱渐近稳定．希望本书的解释是清楚的．

定义 4.1.8　称不动点 x^* 为排斥的(repelling)或不动点源(a fixed point source)，如果该不动点是负向渐近稳定的(即(i)对任意小的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\| x_0 - x^* \| < \delta$ 时，对任意 $t \leqslant 0$ 有 $\| \phi(t; x_0) - x^* \| < \varepsilon$；(ii)存在 $\delta_1 > 0$ 使得对满足 $\| x_0 - x^* \| < \delta_1$ 的所有 x_0 有 $\alpha(x_0) = \{x^*\}$)．

定义 4.1.9　若系统在不动点的线性方程的特征值都有非零实部，则称该不动点为双曲的(hyperbolic)．

下面两个例子表明对于非线性系统来说，不动点附近的所有解趋于不动点，但不是 L 稳定的；所以在给出渐近稳定性的定义时必须假设不动点既是 L 稳定的又是弱渐近稳定的．

例 4.1.10　方程组

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

101

的极坐标形式为

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\theta} = 2\sin^2(\theta/2).$$

圆 $r = 1$ 是不变的并吸引附近的轨线．在该圆周上，$\dot{\theta} \geqslant 0$，只有当 $\theta = 0$ 时等号才成立，因此，所有从该圆周附近出发的轨线均以 $(x, y) = (1, 0)$ 为极限，然而对满足 $r = 1$ 和足够小的 $\theta > 0$ 的点，它们的轨线在趋于不动点前都要先沿圆周旋转差不多一周，所以(1，0)是弱渐近稳定的而不是渐近稳定的，参见图 4.1.1．■

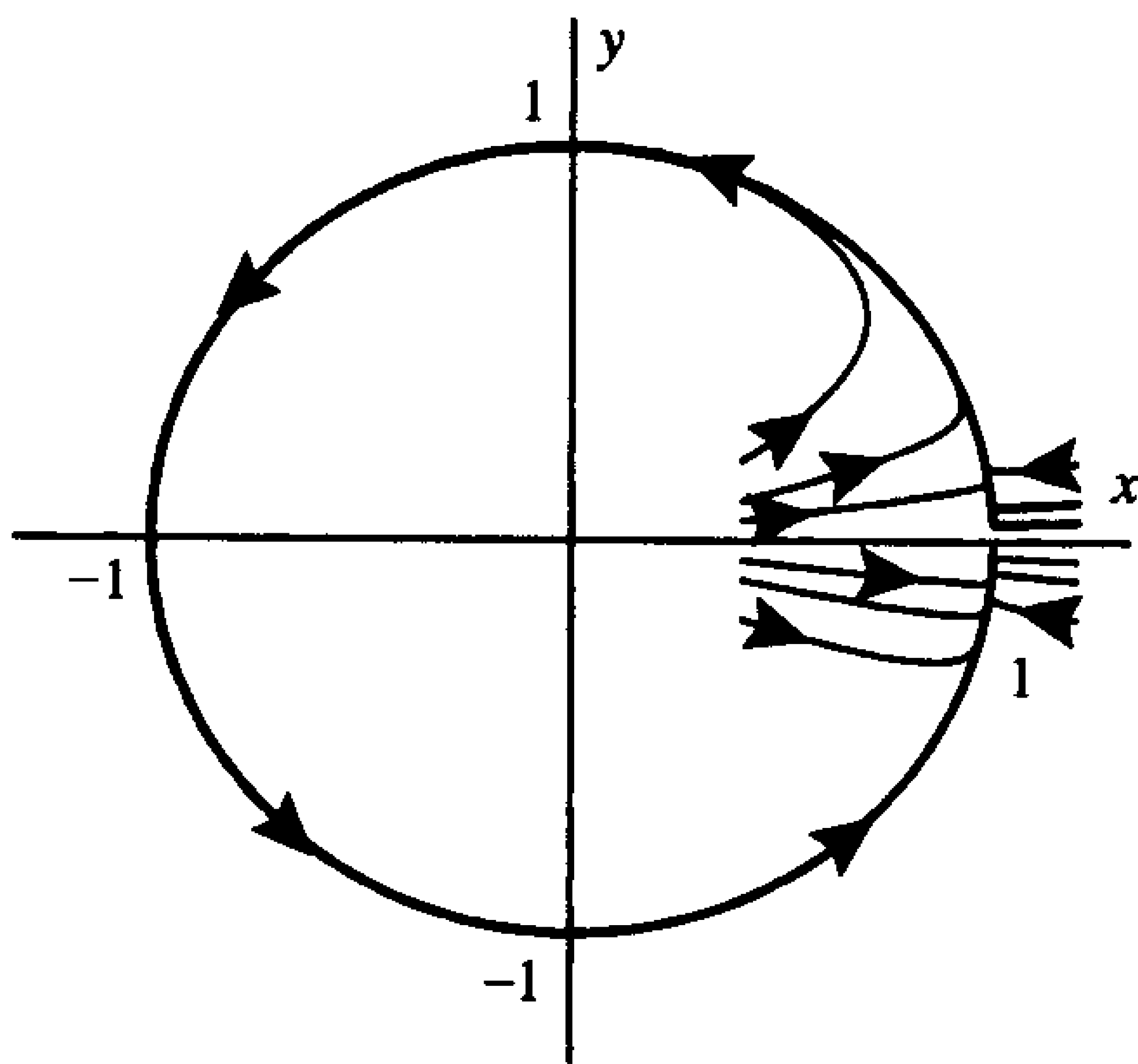


图 4.1.1　例 4.1.10 弱渐近稳定的但不是渐近稳定的不动点图

下面的例子和前面几个例子不同，不是构造出来的，但更难分析，因此，在此只给出相图和一些有完整分析的参考书．

例 4.1.11　1957 年，Vinograd 给出了下面的非线性微分方程组，原点是弱渐近稳定但不是渐近稳定的孤立不动点．

该方程组为

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x)+y^5}{(x^2+y^2)[1+(x^2+y^2)^2]}$$
$$\dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)[1+(x^2+y^2)^2]}.$$

相图参见图 4.1.2. 原点是弱渐近稳定的并且所有轨线都趋于原点. 然而，有一些轨线任意靠近原点，但在返回原点前在 $x=0.5$，$y=0.5$ 附近会远离原点，因而，该原点不是 L 稳定的. 对这一方程组的分析见[**46**]. ■

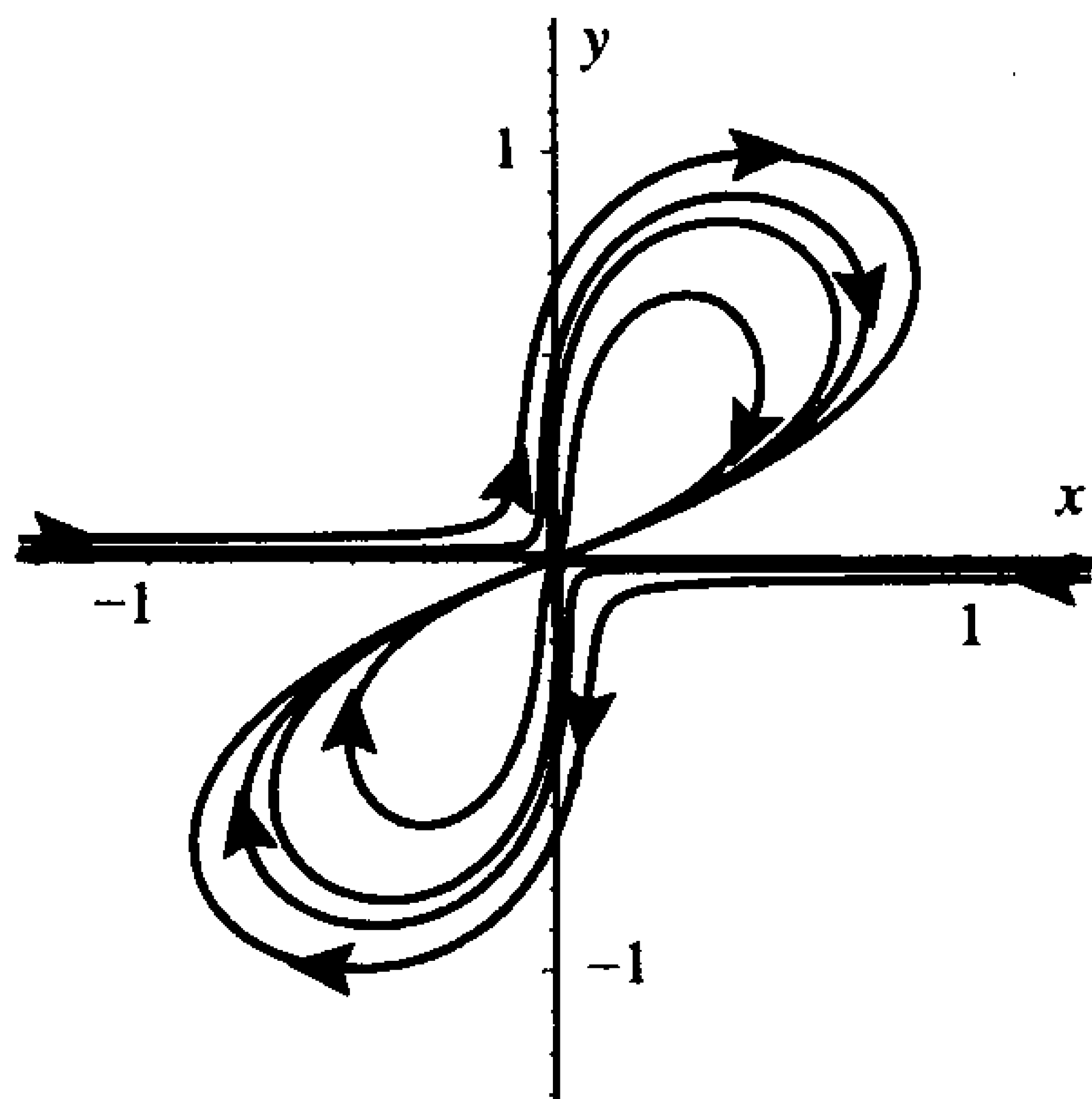


图 4.1.2 例 4.1.11 弱渐近稳定的但不是渐近稳定的不动点图

线性系统有用特征值来判定原点渐近稳定性的准则，见下面的定理.

102

定理 4.1.12 考虑线性微分方程 $\dot{x}=Ax$.

(a)如果 A 的所有特征值 λ 都有负实部，则原点是渐近稳定的. 特别地，稳定结点、退化稳定结点和稳定焦点都是渐近稳定的.

(b)若存在特征值 λ_1 有正实部，则原点是不稳定的. 特别地，鞍点、不稳定结点、不稳定退化结点和不稳定焦点都是不稳定的. 鞍点的一些方向是吸引的而另一些则是排斥的，但其仍满足不稳定条件.

(c)对于二维线性方程，如果特征值是纯虚数 $\pm i\beta$，则原点是 L 稳定的但不是渐近稳定的.

(d)对于二维线性方程，如果一个特征值是 0 而另一个特征值是负数，则原点是 L 稳定的但不是渐近稳定的.

在二维情形中，行列式和迹决定线性系统的类型. 下述结果可用来快速确定原点的稳定性类型.

定理 4.1.13 设 A 是 2×2 阶矩阵，其行列式为 Δ，迹为 τ.

(a)若 $\Delta<0$，则原点是线性系统的鞍点，因此是不稳定的.

(b)若 $\Delta>0$ 且 $\tau>0$，则线性系统是不稳定的. (i)若 $\tau^2-4\Delta>0$，则原点是不稳定结点；(ii)若 $\tau^2-4\Delta=0$，则原点是退化不稳定结点；(iii)若 $\tau^2-4\Delta<0$，则原点是不稳定焦点.

(c)若 $\Delta>0$ 且 $\tau<0$，则线性系统是渐近稳定的，(i)若 $\tau^2-4\Delta>0$，则原点是稳定结点；(ii)若 $\tau^2-4\Delta=0$，则原点是退化稳定结点；(iii)若 $\tau^2-4\Delta<0$，则原点是稳定焦点.

(d)若 $\Delta=0$，则系统有零特征值，(i)若 $\tau>0$，则特征值一个为 0，一个为正数；(ii)若 $\tau=0$，则两个特征值都为 0；(iii)若 $\tau<0$，则特征值一个为 0，一个为负数.

103

证明 特征方程是 $\lambda^2-\tau\lambda+\Delta=0$，特征值为 $\lambda_\pm=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}$，则有

$$(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)=\lambda^2-(\lambda_++\lambda_-)\lambda+\lambda_+\lambda_-$$
$$=\lambda^2-\tau\lambda+\Delta.$$

令等式两边 λ 的系数和常数相等，则

$$\tau=\lambda_++\lambda_- \quad 和$$

$$\Delta = \lambda_+ \lambda_- .$$

(a)若 $\Delta<0$，则

$$\tau^2-4\Delta>\tau^2,$$

$$\sqrt{\tau^2-4\Delta}>|\tau|,$$

$$\lambda_+=\frac{\tau+\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}>0,$$

$$\lambda_-=\frac{\tau-\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}<0.$$

因此，原点是该系统的鞍点. 又因为被开方数大于0，所以特征值为实数.

(b)设 $\Delta>0$ 且 $\tau>0$，(i)若 $\tau^2-4\Delta>0$，则特征值为实数. 然而

$$\tau^2-4\Delta<\tau^2$$

$$\sqrt{\tau^2-4\Delta}<\tau,$$

$$\lambda_\pm=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}>0.$$

所以，原点是该系统的不稳定结点；(ii)若 $\tau^2-4\Delta=0$，则两个特征值都等于 $\tau/2$，而且原点是该系统退化的不稳定结点；(iii)若 $\tau^2-4\Delta<0$，则特征值是实部为 $\tau/2$ 的复根，因此，原点是系统的不稳定焦点.

(c)证明与(b)类似，略去.

(d)由于特征值的乘积是 Δ，所以至少有一个特征值为0. 又因为特征值的和是迹，因此，另一个特征值等于迹，结论显然. ■

4.2 一维微分方程

本书大部分内容研究的都是含两个或两个以上变量的(其时间导数是确定的)微分方程. 为了介绍非线性微分方程的研究方法，首先看一维微分方程 $\dot{x}=f(x)$，其中 x 是 $\mathbb{R}$ 中的一点.

上一章提到一维线性方程 $\dot{x}=ax$ 的解是 $\phi(t;\ x_0)=x_0e^{at}$. 若 $a<0$，则对任意初始值 x_0，当 t 趋向于无穷时 x_0e^{at} 趋向于0；另一方面，若 $a>0$ 且 $x_0\neq0$，则当 t 趋向于无穷时 $|x_0e^{at}|$ 也趋向于无穷. 无论哪种情况，若 $x_0=0$，则对所有的 t 有 $\phi(t;\ 0)=0e^{at}\equiv0$，因此，$x=0$ 是微分方程 $\dot{x}=ax$ 的一个不动点. 当 $a<0$ 时，这个不动点是吸引的；当 $a>0$ 时，该不动点是排斥的.

104

下面的例子给出了多于一个不动点的简单非线性微分方程，其中一个不动点是吸引的，另一个不动点是排斥的.

例 4.2.1(逻辑斯谛方程) 考虑含一个变量 x 的单种群问题. 关于时间的导数 $\dot{x}$ 表示种群的增长速度，而用比率 $\dot{x}/x$ 表示单位种群的增长率. 在逻辑斯谛模型中，对于较小的种群常设这一比率为正数且是线性变化的，而当 x 大于某数 K 时该比率为负，因此有

$$\frac{\dot{x}}{x}=r\left(1-\frac{x}{K}\right),$$

其中 $r>0$ 和 $K>0$ 是参数．上式两端分别乘以 x，则可得关于 x 的微分方程：

$$\dot{x}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)\equiv f(x),$$

该方程称为逻辑斯谛微分方程(logistic differential equation)．令 $x(t)=\phi(t;\ x_0)$ 是方程满足初始条件 $\phi(0;\ x_0)=x_0$ 的解.

通过解 $rx(1-x/K)=0$ 可找到方程的不动点(或平衡点)，则 $x=0$ 或 K，因此，对所有的 t 有 $\phi(t;\ K)\equiv K$ 且 $\phi(t;\ 0)\equiv 0$．图 4.2.1 和图 4.2.2 分别给出了 $K=1$ 且 $r=1$ 时 t 与 x 的对比图及相图．

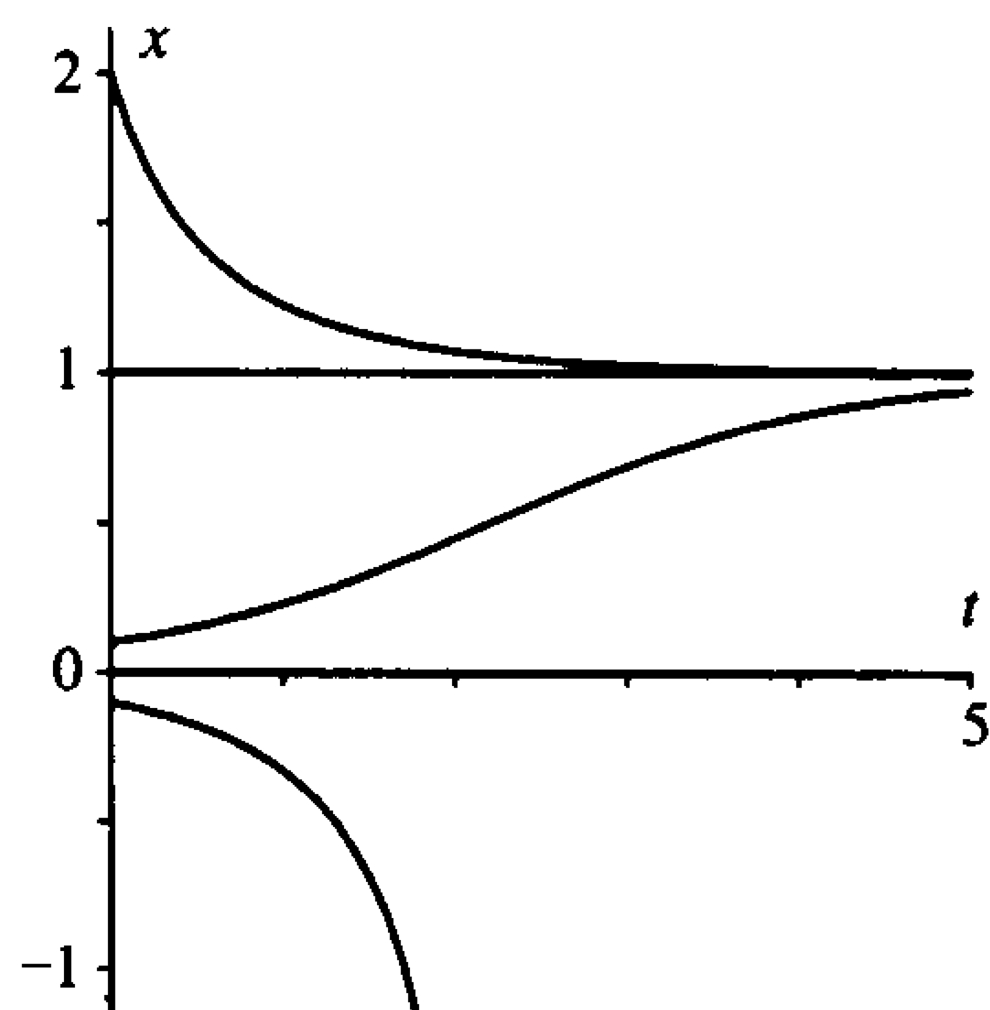


图 4.2.1　逻辑斯谛方程：$K=1$ 且 $r=1$ 时 t 与 x 的对比图



图 4.2.2　逻辑斯谛方程：$K=1$ 且 $r=1$ 时的相图

对任意的 $0<x<K$，由 $f(x)>0$ 知 $\dot{x}>0$，即方程的解是递增的．因此当 $0<x_0<K$ 时，$\phi(t;\ x_0)$ 是递增的，且与常数解在不动点 K 处不相交，所以对所有的 t 有 $\phi(t;\ x_0)<K$．下面将给出一个一般性定理说明 $\phi(t;\ x_0)$ 必定向上收敛于不动点 K，而对于 $0<x_0<K$，解的 ω 极限集是不动点 K(即 $\omega(x_0)=\{K\}$)．类似地，满足这些初始条件的解 $\phi(t;\ x_0)>0$ 随着 t 的递减而递减，所以当 t 趋于负无穷时必收敛于 0(即 $\alpha(x_0)=\{0\}$).

对任意的 $x>K$，由 $f(x)<0$ 知 $\dot{x}<0$，即方程的解是递减的．因此当 $x_0>K$ 时 $\phi(t;\ x_0)$ 随着 t 增加而减少，但它必须保留在 K 之上(即 $\phi(t;\ x_0)>K$)，所以 $\phi(t;\ x_0)$ 必向下收敛于不动点 K，而解的 ω 极限是不动点 K(即 $\omega(x_0)=\{K\}$)．当 t 递减时 $\phi(t;\ x_0)$ 递增，若 $\varphi(t;\ x_0)$ 有界，它将会收敛于另一个不动点．又因为 K 是最大的不动点，所以 $\phi(t;\ x_0)$ 趋于无穷且 $\alpha(x_0)=\phi$.

若 $x<0$，由 $f(x)<0$ 知 $\dot{x}<0$，即方程的解是递减的．因此当 $x_0<0$ 时 $\phi(t;\ x_0)$ 是递减的．又因为没有小于 0 的不动点，所以解 $\phi(t;\ x_0)$ 必趋于负无穷，因此解的 ω 极限集是空集(即 $\omega(x_0)=\phi$)．对于这些点来说，同上可证明 $\alpha(x_0)=\{0\}$.

因此，仅利用 $f(x)$ 在不同区间上的符号就可以确定满足任意初始条件解的 α 极限集和 ω 极限集.

下面考虑不动点附近的解．当 t 趋于无穷时从 $x=K$ 附近出发的解趋向于 K，因此，该解是

吸引的. 因为$f'(K)=r-2r=-r<0$, 故对 K 附近满足 $x<K$ 的 x 必有$\dot{x}>0$, 而对 K 附近满足 $x>K$ 的x 有$\dot{x}<0$, 所以$f'(K)<0$ 足以确保不动点 $x=K$ 是吸引的.

在另一不动点 $x=0$ 附近, 当 $x<0$ 时, $\dot{x}<0$; 当 $0<x<K$ 时, $\dot{x}>0$; 所以在 0 附近过 x_0 的解随着 t 的增加而远离不动点, 因此, 0 是排斥的不动点. 同样, 导数$f'(0)=r>0$ 也确保了 0 是排斥的不动点.

在介绍解的存在与唯一性时, 曾给出了逻辑斯谛方程的显式解

$$\phi(t;x_0)=\frac{x_0K}{x_0+(K-x_0)\mathrm{e}^{-rt}}.$$

105

当分母非 0 时, 该解是有意义的. 当

$$\mathrm{e}^{rt}=\frac{x_0-K}{x_0}$$

时, 分母为 0. 所以, 要使解无定义, 上面方程右端必为正; 当 $x_0>K$ 或 $x_0<0$ 时, 就是这样. 当 $x_0>K$ 时, 解在某负时刻

$$t_{x_0}^{-}=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{x_0-K}{x_0}\right)<0$$

是没有定义的, 但对于所有正的时间该解是有定义的, 因此, $t_{x_0}^{+}=\infty$. 而当 $x_0<0$ 时, 解在某正时刻

$$t_{x_0}^{+}=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{x_0-K}{x_0}\right)=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{|x_0|+K}{|x_0|}\right)>0$$

是没有定义的, 但 $t_{x_0}^{-}=-\infty$. 最后, 当$0\leqslant x_0\leqslant K$ 时, $t_{x_0}^{-}=-\infty$, $t_{x_0}^{+}=\infty$.

特别地, 对于任意的 $x_0>0$, 对所有 $t\geqslant0$ 解是有定义的, 而且当 t 趋向于无穷时, 解收敛于

$$x_\infty=\frac{x_0K}{x_0+0}=K.$$

当$0\leqslant x_0<K$ 时, 对所有 $t\leqslant0$ 的解是有定义的, 此时分母可变得任意大, 所以当 t 趋于负无穷时, 解收敛于 0; 对于 $x_0>K$ 的情形, 当 t 向下趋于 $t_{x_0}^{-}$时分母趋向于 0, 解趋于负无穷.

当 $x_0<0$ 时, 解的定义区间是 $-\infty<t<t_{x_0}^{+}$, 因分母为正分子为负, 所以当 t 向上趋于 $t_{x_0}^{+}$ 的, 解趋于负无穷.

利用显式解所得到的解的性态与前面仅利用方程所得到结论是相同的. ■

106

在对逻辑斯谛方程的讨论中提到了满足初始值为正的解收敛于不动点 K. 该收敛性是下面关于有界解极限性态的定理的推论(解的唯一性已在 3.1 节中给出).

定理 4.2.2　*考虑*$\mathbb{R}$ *上的微分方程*$\dot{x}=f(x)$, *其中 $f(x)$ 有连续导数. 设 $x(t)=\phi(t;x_0)$ 是具有初始值 x_0 的解, 并把含 0 的最大区间定义为(t^-,t^+).*

(a) 进一步假设当 $0\leqslant t<t^+$ 时, 解 $\phi(t;x_0)$ 是有界的(即存在常数 $C>0$ 使得对满足 $0\leqslant t<t^+$ 的所有 t 都有 $|\phi(t;x_0)|\leqslant C$), 那么当 t 趋于 t^+ 时, $\phi(t;x_0)$ 必收敛于一个不动点或是 $f(x)$ 没有定义的点.

(b)同样，若当 $t^- < t \leqslant 0$ 时解 $\phi(t;\ x_0)$ 是有界的，则当 t 趋于 t^- 时 $\phi(t;\ x_0)$ 必收敛于一个不动点或是 $f(x)$ 没有定义的点.

(c)设对于 $\mathbb{R}$ 内的所有 x，$f(x)$ 都有定义. (i)若 $f(x_0) > 0$，则假设存在不动点 $x^* > x_0$，事实上可令 x^* 是比 x_0 大的最小不动点；(ii)若 $f(x_0) < 0$，则假设存在不动点 $x^* < x_0$，事实上可令 x^* 是比 x_0 小的最大不动点. 那么，$t^+ = \infty$ 且当 t 趋向于无穷时 $\phi(t;\ x_0)$ 收敛于 x^*.

证明思路：由唯一性定理可知，轨线不能与任何满足 $f(x^*) = 0$ 的不动点 x^* 相交. 若对某一时刻 t_1 有 $\phi(t_1;\ x_0) = x^*$，则 $x_0 = \phi(-t_1;\ x^*) = x^*$ 且 $x_0 = x^*$，所以，非平衡解必定停留在 $f(x)$ 定号的区间上，设符号为正，则 $\phi(t_1;\ x_0) \leqslant C$ 且是递增的. 由解的有界性和实数的性质可知，$\phi(t;\ x_0)$ 必收敛于极限 x_∞. 因为解 $\phi(t;\ x_0)$ 接近于 x_∞ 但又不与它相交，因此解的速度必然要放慢，所以有 $f(x_\infty) = 0$，因而，$\phi(t;\ x_0)$ 必收敛于不动点. 当 $f(x) < 0$ 时该证明同样适用，且 $\phi(t;\ x_0)$ 必递减趋于不动点，本章末给出了较为详尽的证明，其关键点蕴涵在下面的引理中.

引理 4.2.3　设 $g(t)$ 对于所有的 $t \geqslant 0$ 都有定义，且有界，$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) > 0$ 且 $g'(t)$ 是一致连续的，则当 t 趋于无穷时，$g'(t)$ 趋于 0 且 $g(t)$ 有极限.

这一定理也可适用于逻辑斯谛方程，用于证明若 $0 < x_0 < K$，则当 t 趋向于无穷时 $\phi(t;\ x_0)$ 收敛于 K.

对逻辑斯谛方程的讨论告诉我们如何利用给定微分方程的函数的导数来确定不动点的稳定性类型.

定理 4.2.4　考虑微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 的不动点 x^*，其中 f 和 f' 是连续的.

(a)若 $f'(x^*) < 0$，则不动点 x^* 是吸引的.

(b)若 $f'(x^*) > 0$，则不动点 x^* 是排斥的.

(c)若 $f'(x^*) = 0$，则该导数不能确定稳定性类型.

例 4.2.5　这里将定理 4.2.4 研究不动点稳定性类型的准则应用于微分方程

$$\dot{x} = x^3 - x = f(x).$$

通过 $0 = f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$ 可求得不动点 $x = 0$，± 1. 导数是 $f'(x) = 3x^2 - 1$，且 $f'(0) = -1$，$f'(\pm 1) = 2$. 因此，不动点 $x = 0$ 满足 $f'(0) < 0$，从而是吸引的；不动点 $x = \pm 1$ 满足 $f'(\pm 1) > 0$，故是排斥的. 参见图 4.2.3. ■

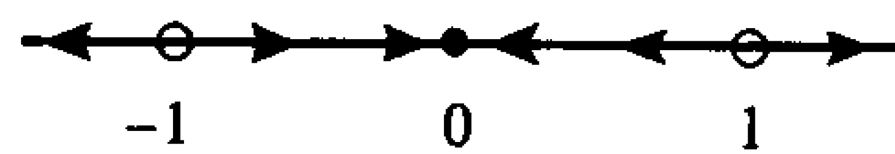


图 4.2.3　例 4.2.5 相图

[107]

下面的例子表明当 $f'(x^*) = 0$ 时，不动点可能是吸引的、排斥的或哪一种都不是.

例 4.2.6(半稳定不动点)　微分方程

$$\dot{x} = x^2$$

在 0 处有一个不动点，其中 $f'(0) = 2x\,|_{x=0} = 0$，所以导数测试并不适用. 当 $x < 0$ 和 $x > 0$ 时导数 $\dot{x} = x^2$ 都为正，因此不动点是左侧吸引、右侧排斥的，即半稳定的，此例的不动点是不稳定的但不是排斥的. 参见图 4.2.4. ■

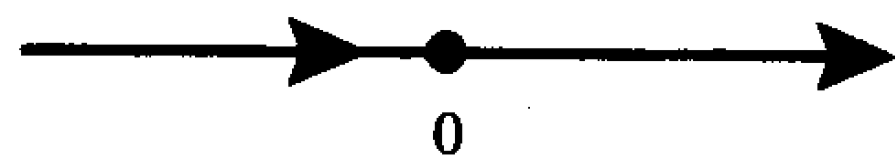


图 4.2.4　半稳定不动点图

例 4.2.7（弱稳定不动点）　微分方程

$$\dot{x} = -x^3$$

也在 0 处有一个不动点，其中 $f'(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$. 当 $x<0(x>0)$ 时，$\dot{x} = -x^3 > 0(<0)$. 所以 0 是一个排斥不动点，因此，吸引性并不是由线性项，而是由三次项引起的，因此该不动点称为弱吸引的（weakly attracting）. 参见图 4.2.5. ■

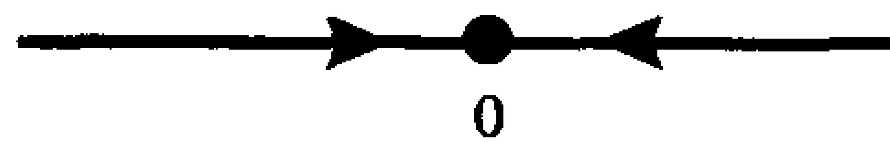


图 4.2.5　弱吸引不动点图

例 4.2.8（弱排斥不动点）　微分方程

$$\dot{x} = x^3$$

也在 0 处有一个不动点，其中 $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$. 当 $x<0$ 时，$\dot{x} = x^3 < 0$；当 $x>0$ 时，$\dot{x} = x^3 > 0$，所以 0 是一个排斥不动点，该排斥不是由线性项，而是由三次项引起的，因此该不动点称为弱排斥. 参见图 4.2.6. ■

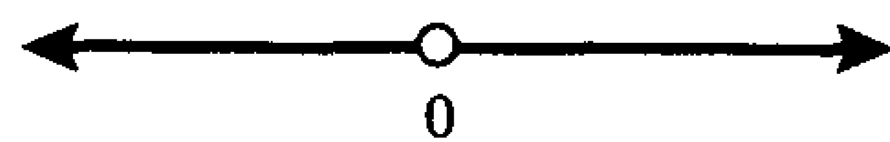


图 4.2.6　弱排斥不动点图

作为不动点满足 $f'(x^*) = 0$ 的最后一例，下面考虑有多个不动点的情况.

108

例 4.2.9（非孤立不动点）　考虑微分方程

$$\dot{x} = x^2 \sin(1/x).$$

其不动点为 $x=0$ 和 $1/x_n = n\pi$ 或 $x_n = 1/(n\pi)$. 这些不动点收敛于不动点 0. 区间 $(-1/(n\pi), 1/(n\pi))$ 是不变集且任意小，因此，不动点 0 是 L 稳定的，然而，点 $1/(n\pi)$ 任意地接近于 0，但它们的解并不收敛于 0，因此，0 不是渐近稳定的. ■

4.3　二维微分方程和零倾线

3.2 节中提出了通过绘制向量场图来确定流的几何性质，本节将细化这一方法以画出平面非线性微分方程的相图. 这些方法也适用于求不出显式解析解的情形. 书中利用一个计算程序将这一几何方法与绘制相图联系起来.

首先回顾一下向量场和平面微分方程之间的关系. 对于微分方程组

$$\dot{x} = f(x,y)$$
$$\dot{y} = g(x,y),$$

其向量场（vector field）是

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}.$$

对于平面中的每一个点 (x, y)，都有一个以 (x, y) 为基点的向量 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 与之相对应，因此，平面上有一个向量（箭头）集，集中向量的长度和方向随着点的变化而变化. 系统轨线沿曲线上每一点的速度向量就是该点的向量场.

确定相图的基本几何方法是先找到不动点，然后在平面不同区域内确定 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的符号. 时间导数只有在它们等于 0 的点才可能改变符号（或没有定义），所以可以找到这些满足 $\dot{x} = 0$ 或 $\dot{y} = 0$ 的曲线，因为其上微分方程向量场的一个分量为 0（垂直或水平的），所以这两条曲线称为零倾线（nullcline）. 由于沿着这些曲线的向量场都有相同的方向，其他书中也称之为等倾线

(isocline). 这些知识都有助于绘制非线性微分方程的相图.

例 4.3.1 考虑微分方程组

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = -2y + 2x^3.$$

该方程组右端可作为其向量场的分量

109

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -x \\ -2y + 2x^3 \end{bmatrix}.$$

解下面两个方程可知原点是唯一的不动点:

$$0 = -x \quad 和$$
$$0 = -2y + 2x^3$$

由 $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$ 可知 $x=0$ 和 $y=x^3$ 分别是两条零倾线. 这两条零倾线彼此分割而形成如下 4 个部分:

(N1) $y=x^3$, $x>0$,

(N2) $x=0$, $y>x^3$,

(N3) $y=x^3$, $x<0$,

(N4) $x=0$, $y<x^3$.

它们也将平面划分为 4 个区域:

(R1) $x>0$, $y>x^3$,

(R2) $x<0$, $y>x^3$,

(R3) $x<0$, $y<x^3$,

(R4) $x>0$, $y<x^3$.

区域划分可见图 4.3.1.

下面确定各区域中向量场的方向以及零倾线上向量场的方向是向上、向下、向左还是向右的. 若从曲线 $y=x^3$ 上的点出发且 y 逐渐增大, 则 $\dot{y}$ 变为负数, 所以, 在曲线(N2)上和区域(R1)及(R2)内都有 $\dot{y}<0$(每个导数在每个区域内必有一个确定的符号). 同样, 若从曲线 $y=x^3$ 上的点出发且 y 逐渐减小, 则 $\dot{y}$ 变为正数, 因而, 在曲线(N4)上、区域(R3)和(R4)内有 $\dot{y}>0$. 同理, 若从曲线 $x=0$ 上的点出发且 x 递增, 则 $\dot{x}$ 变为负数, 所以, 在曲线(N1)上、区域(R1)和(R4)内有 $\dot{x}<0$. 最后, 在曲线(N3)上、区域(R2)和(R3)内有 $\dot{x}>0$. 下面将各条零倾线上以及各区域内 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的符号总结并列表如下:

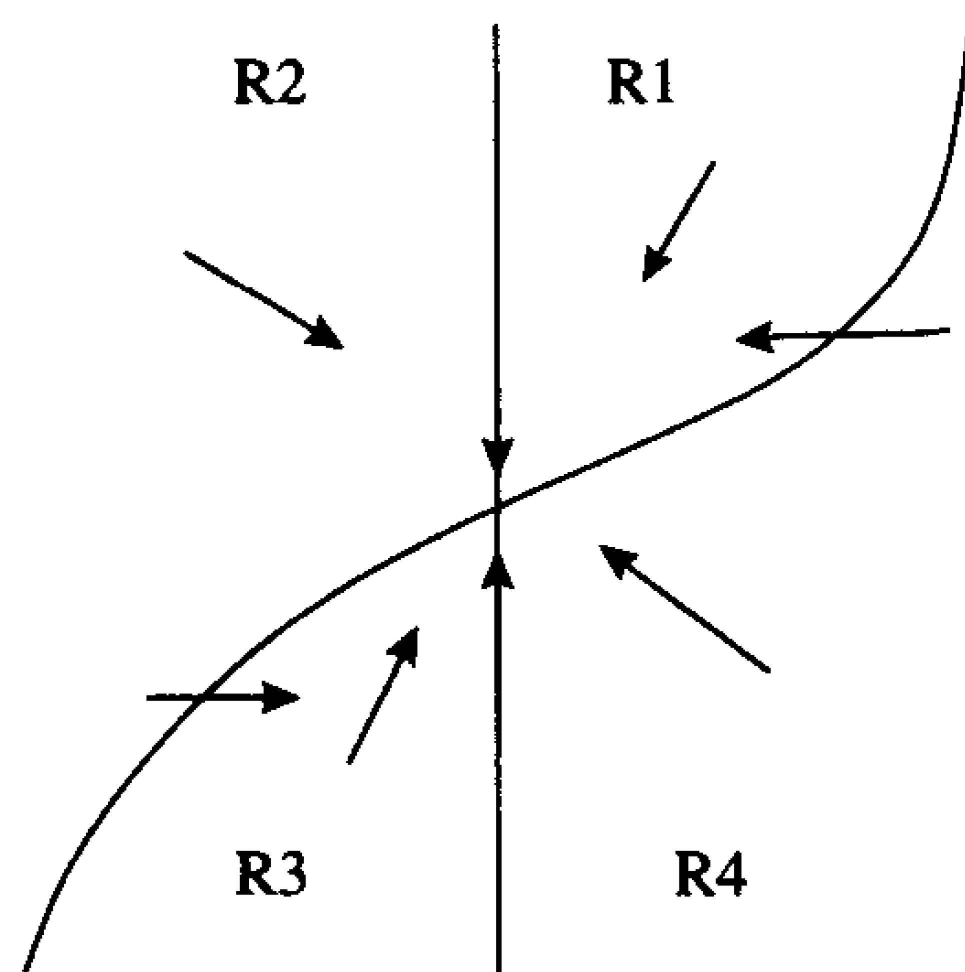


图 4.3.1 例 4.3.1 的零倾线图

(N1) $y=x^3$ 且 $x>0$: 向量场是水平的并有 $\dot{x}<0$.

(N2) $x=0$ 且 $y>x^3$: 向量场是竖直的并有 $\dot{y}<0$.

(N3) $y=x^3$ 且 $x<0$: 向量场是水平的且有 $\dot{x}>0$.

(N4) $x=0$ 且 $y<x^3$: 向量场是竖直的且有 $\dot{y}>0$.

(R1) $x>0$ 且 $y>x^3$: $\dot{x}<0$ 且 $\dot{y}<0$.

(R2) $x<0$ 且 $y>x^3$: $\dot{x}>0$ 且 $\dot{y}<0$.

(R3) $x<0$ 且 $y<x^3$: $\dot{x}>0$ 且 $\dot{y}>0$.

(R4) $x>0$ 且 $y<x^3$: $\dot{x}<0$ 且 $\dot{y}>0$.

参见图 4.3.1.

110

在零倾线 $x=0$ 上，各点的向量场都与该线相切(因为 $\dot{x}=0$)，所以，从该线上出发的任何轨线都会停留在该直线上(即线 $x=0$ 是不变的). 当 $y>0$ 时，$\dot{y}<0$；当 $y<0$ 时，$\dot{y}>0$. 所以，轨线趋于原点.

对区域(R1)来说，边界线(N2)是不变的(其中 $x=0$)，轨线沿(N1)进入其内，因此，(R1)区域是正不变集. 又因为 $\dot{x}<0$ 且 $\dot{y}<0$，所以当 $t\geqslant 0$ 时，从(R1)区域出发的轨线仍停留在该区域内，且变量 x 和 y 是单调递减的，因而，轨线收敛于不动点即原点.

同理，(R3)区域是正不变的，该区域内的轨线的两个分量都是单调递增的，所以轨线也收敛于原点.

从(R4)区域出发的轨线或是对所有正的时间保留在该区域内，或是进入(R1)区域. 若停留在(R4)区域内，则变量 x 递减，y 递增，所以轨线趋于不动点；如果轨线进入(R1)区域，由前面的证明可知，它收敛于不动点. 在这两种情况的任一种情况下，轨线都收敛于不动点.

从(R2)区域出发的轨线或是对所有的正的时间都保留在该区域内，或是进入(R3)区域. 这样的轨线必收敛于不动点，证明与(R4)区域相似.

对四个区域的讨论表明 0 的吸引域(或它的稳定流形)是整个平面，即

$$W^s(\mathbf{0}) = \{(x,y):\omega(x,y) = \mathbf{0}\} = \mathbb{R}^2,$$

而且原点是全局渐近吸引的. 参见图 4.3.1. ■

相图的重要特征

1. 不动点的位置.
2. $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 定号的区域.
3. 不动点的性态(4.4 的重点). 包括不动点是稳定的还是不稳定的，轨线在离开前是如何经过不动点附近的.
4. 周期轨的位置. 这是第 6 章的重点，也是一个难点.

利用计算程序绘制相图

Maple、Mathematica 或者 Matlab 等计算程序除了一般用途之外，还可以编写专门程序绘制相图. 这些程序通常可在选定区域内绘制出某些点的向量场，称其为*方向场*(direction field). 通过选出一些好的具有代表性的初始条件，还可以绘制出相当完整的相图.

轨线是相平面中与每一点的方向场相切的曲线，常利用方向场来了解轨线的基本性质.

1. 若不动点是已知的，则可选取一窗口绘出包括多个或全部不动点的相图.（若不动点的数量有限，则相图包括所有的不动点；若像系统 $\dot{x}=y$ 和 $\dot{y}=-\sin(x)$ 有无穷多个不动点，则相图包括不动点的代表样本.）

111

2. 多次绘制满足不同初始值的轨线以确定不动点附近的轨线的性态.

3. 在 4.4 节将讨论鞍不动点的稳定和不稳定流形. 当这些情况出现时，尽量了解从不稳定流形附近出发的轨线，并追寻其走向，而且还要了解从离不动点很近的稳定流形附近出发的轨线的负向运动，或是寻找远离不动点的初始点，使得过这一初始点的轨线紧随不动点附近的稳定流形. 见 4.4 节.

4. 力图在相平面窗口的各部分显示代表性轨线的性态.

例 4.3.2　考虑微分方程组

$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = 1 - xy^2.$$

其唯一不动点是(1，1)，由 $\dot{x}=0$ 和 $\dot{y}=0$ 可分别得到 $y=x$ 和 $x=\frac{1}{y^2}$. 参见图 4.3.2. 不动点是这些曲线的交点. 可通过解下列代数方程求不动点：

$$0 = x - y$$
$$0 = 1 - xy^2.$$

该方程的唯一解是 $(x, y)=(1, 1)$.

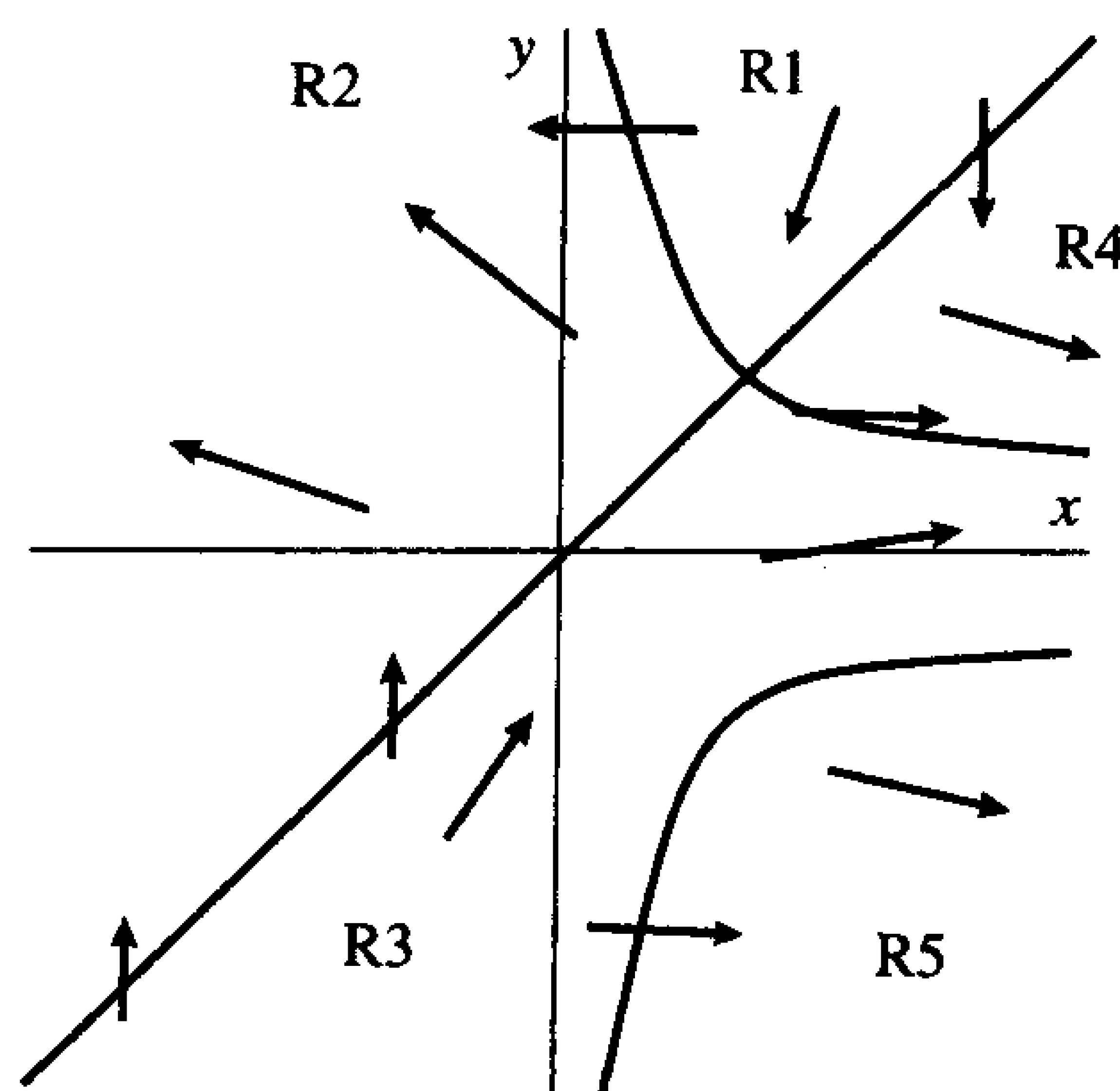


图 4.3.2　例 4.3.2 零倾线图

这些零倾线将自身划分成 5 段曲线并将平面划分成 5 个区域：

(N1) $y=x$，$x>1$.

(N2) $y=x$，$x<1$.

(N3) $x=1/y^2$，$y>1$.

112

(N4) $x=1/y^2$，$0<y<1$.

(N5) $x=1/y^2$，$y<0$.

(R1) $0<y^{-2}<x<y$.

(R2) $x<y$ 且 $x<y^{-2}$(包括 $x<y$ 的部分，其中 $x\leqslant 0$).

(R3) $y<x<y^{-2}$.

(R4) $0<y<x$ 且 $y^{-2}<x$.

(R5) $y<0$ 且 $y^{-2}<x$.

为确定向量的方向，首先注意其在零倾线 $\dot{x}=0$ $(y=x)$ 上是垂直的，而在零倾线 $\dot{y}=0$ $(x=1/y^2)$ 上是水平的. 向上移动离开直线 $y=x$，则 $\dot{x}=x-y$ 变为负数，所以，在区域(R1)和(R2)内及曲线(N3)上 $\dot{x}$ 为负；同理可知，当 x 递增(或当 y 递减)使点离开直线 $y=x$ 时 $\dot{x}=x-y$ 为正，且该点进入区域(R3)、(R4)和(R5)并到达曲线(N4)和(N5)上. 而当 y 递增离开(N3)、(N4)时，$\dot{y}=1-xy^2$ 为负，因此，$\dot{y}$ 在区域(R1)、(R4)和在曲线(N1)上为负；同理，在区域(R5)内时它为负. 另一方面，当 $|y|$ 递减离开(N3)、(N4) 和(N5)组成的零倾线的任一部分时 $\dot{y}$ 为正，因此，$\dot{y}$ 在(R2)、(R3)区域和在曲线(N1)上为正. 由以上叙述可知只有在零倾线上 $\dot{y}$ 的符号才可能发生变化. 上述内容可总结如下：

(N1) $y=x$，$x>1$：垂直且满足 $\dot{y}<0$.

(N2) $y=x$, $x<1$：垂直且满足 $\dot{y}>0$.

(N3) $x=1/y^2$, $y>1$：水平且满足 $\dot{x}<0$.

(N4) $x=1/y^2$, $0<y<1$：水平且满足 $\dot{x}>0$.

(N5) $x=1/y^2$, $y<0$：水平且满足 $\dot{x}>0$.

(R1) $0<y^{-2}<x<y$：$\dot{x}<0$ 且 $\dot{y}<0$.

(R2) $x<y$, $x<y^{-2}$（包括 $x\leqslant 0$）：$\dot{x}<0$ 且 $\dot{y}>0$.

(R3) $y<x<y^{-2}$：$\dot{x}>0$ 且 $\dot{y}>0$.

(R4) $0<y<x$, $y^{-2}<x$：其中 $\dot{x}>0$ 且 $\dot{y}<0$.

(R5) $y<0$, $y^{-2}<x$：$\dot{x}>0$ 且 $\dot{y}<0$.

解在区域(R1)的边界线上离开该区域，然而，对始终停留在该区域内的任意解，$x(t)$ 和 $y(t)$ 都是递减的. 与一维方程的证明类似，它们趋于满足 $\dot{x}=0$ 和 $\dot{y}=0$ 的点（即轨线必然趋于不动点(1, 1)）. 由于一些轨线从左边离开，而另一些从右边离开，故至少有一条轨线渐近趋于不动点. [113]

除了 $\dot{x}>0$ 且 $y<0$ 之外，区域(R3)与区域(R1)相似，因此至少有一条轨线趋于不动点.

因边界线上的点或进入区域内或停留在边界线上，所以区域(R2)、(R4)和(R5)是正不变的，即从区域(R2)出发的轨线留在(R2)内，且变量 x 和 y 都是单调递减的. 因为在这些区域中没有不动点，所以当 t 趋于无穷时 $\|(x(t), y(t))\|$ 趋于 ∞；同理可知，当 t 趋于 ∞ 时从区域(R4)和(R5)出发的轨线也满足 $\|(x(t), y(t))\|\to\infty$.

离开区域(R1)和(R3)的轨线必进入区域(R2)、(R4)或(R5)，这给出了当 t 趋于无穷时轨线的性态.

当 t 趋于 $-\infty$ 时，区域(R2)和(R4)内的轨线或是离开或是趋于不动点(1, 1). 当 t 递减时从区域(R5)出发的轨线必然离开该区域并进入(R3)区域；另一方面，当 t 趋于 $-\infty$ 时，区域(R1)和(R3)内的轨线也满足 $\|(x(t), y(t))\|\to\infty$.

利用不动点的线性化（在 4.4 节讨论）可知，该不动点是一个鞍点. 当 t 趋于 ∞ 时在区域(R1)和(R3)内都只有一个轨道趋于(1, 1)；同理可知，当 t 趋于 $-\infty$ 时在区域(R2)和(R4)内也只有一条轨道趋于(1, 1). 零倾线图参见图 4.3.2.

图 4.3.3 给出了电脑绘制的一些轨线图，为绘出不动点(1, 1)的不稳定流形，取初始值为沿膨胀方向稍偏离不动点的(1.01, 1.003)和(0.99, 0.997). 为绘出不动点(1, 1)的稳定流形，取初始值为沿压缩方向稍偏离不动点的(1.01, 1.033)和(0.99, 0.967)，并且轨线随时间向后运行. 还取其他代表性的初始值以显示经过不动点附近的轨线的运行情形. ■

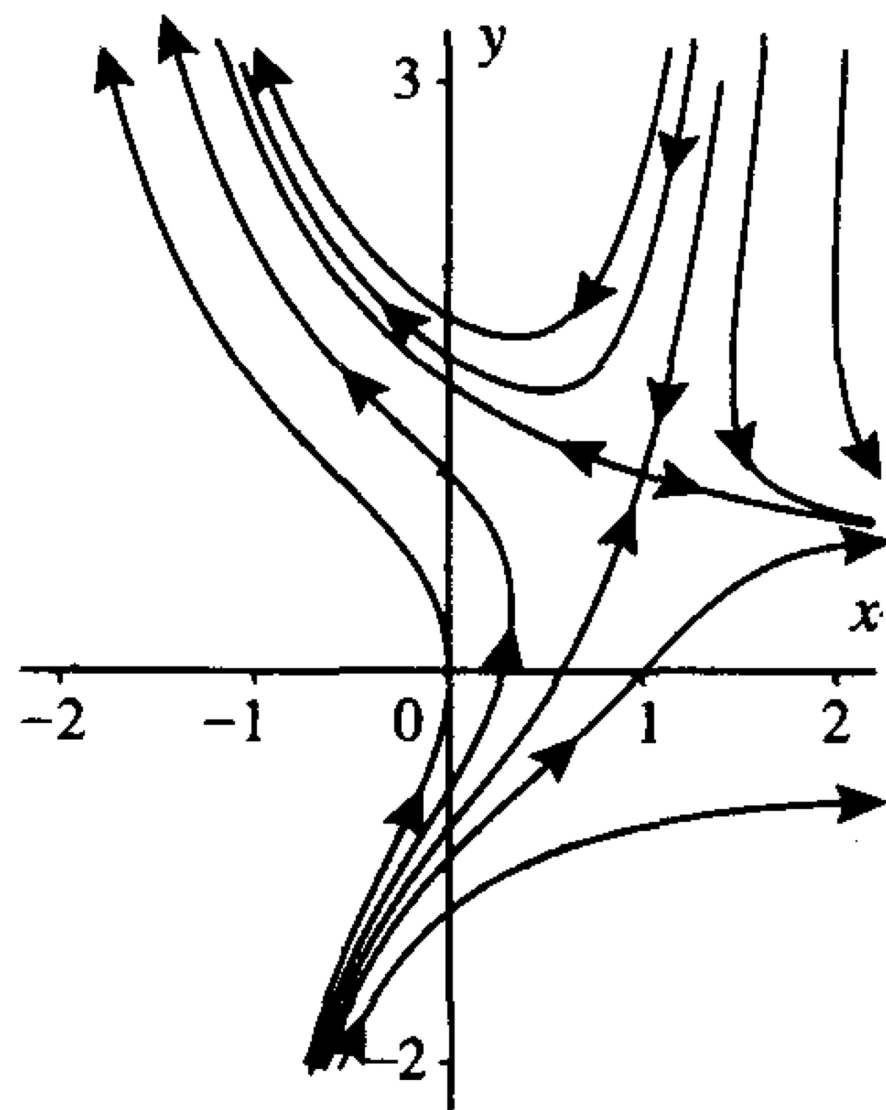


图 4.3.3　电脑绘制例 4.3.2 解的轨线图

例 4.3.3　考虑例子

$$\dot{x}=-x+y$$
$$\dot{y}=xy-1.$$

零倾线是

$$\{\dot{x}=0\}=\{y=x\} \quad 和$$
$$\{\dot{y}=0\}=\{y=1/x\}.$$

解非线性方程可得不动点(1, 1)和(-1, -1). 不动点(-1, -1)周围的轨线沿顺时针方向进入并离开由零倾线定义的四个区域中的一个，参见图4.3.4. 因此，根据零倾线和流的方向是不能确定不动点的稳定性的. 4.4节将利用不动点处的线性化来证明其渐近稳定性. ■

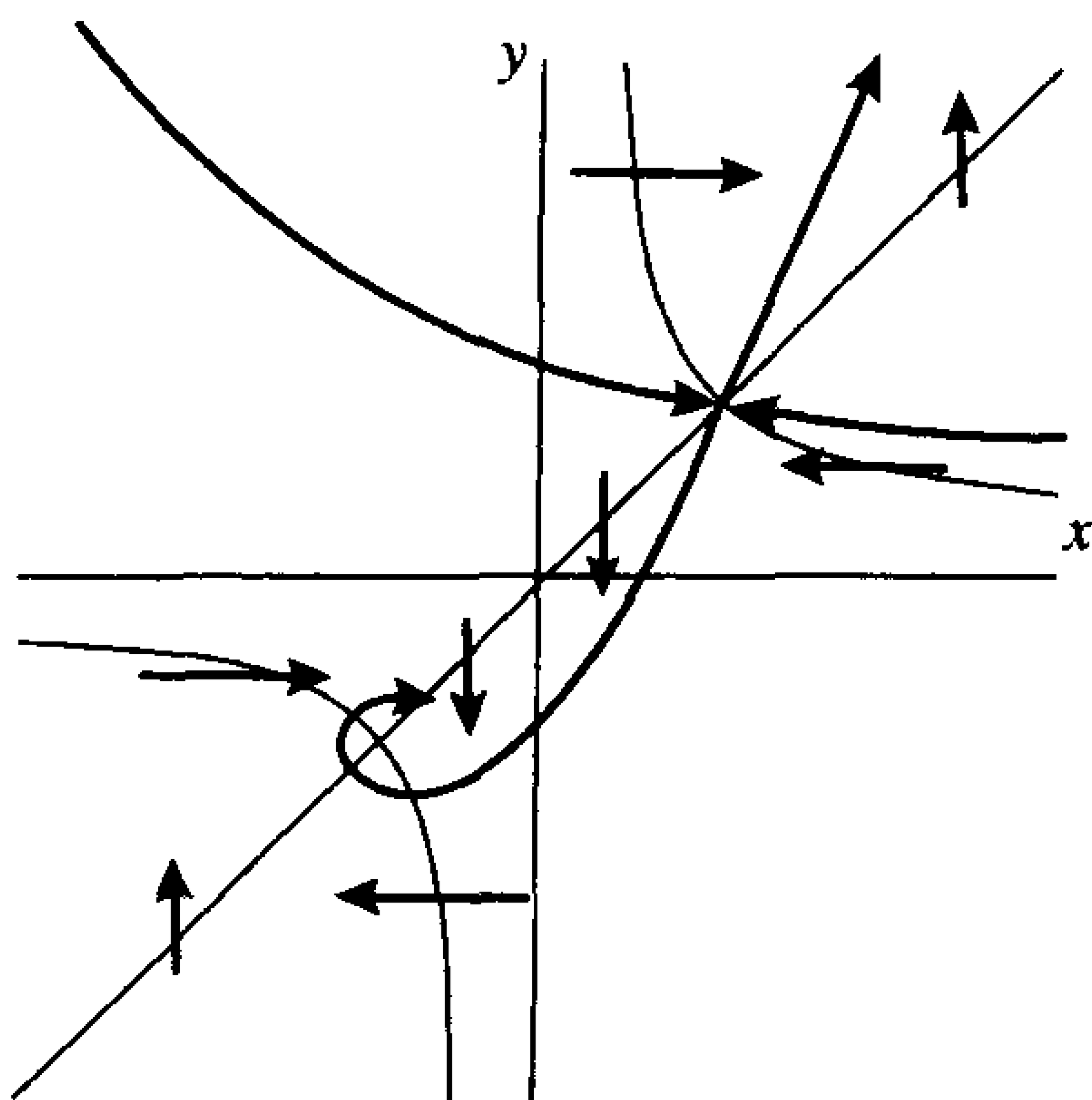


图4.3.4　例4.3.3零倾线图

4.4　不动点的线性化稳定性

一般来说，仅从零倾线位置以及不同区域内$\dot{x}$和$\dot{y}$的符号不足以完全获得轨线的性态. [114] 例4.3.3中的解循环穿过各区域，这一点就尤为明显. 另一个非常重要的技巧是线性化不动点附近的向量场. 在不动点附近，线性项是主项，它们经常决定非线性方程在不动点附近的性态，特别地，线性化系统常用来确定不动点的稳定性.

在例4.3.1中，原点的线性化系统是从方程$\dot{y}$中去掉$2x^3$项后得到的：

$$\dot{x}=-x$$
$$\dot{y}=-2y.$$

原点是线性系统的稳定结点. 对于吸引不动点，线性项能够完全控制非线性项，因此在这种不动点附近，非线性方程组与线性系统解的性态相似，特别地，非线性微分方程是渐近稳定的，参见图4.4.3.

例4.4.1　考虑微分方程组

$$\dot{x}=4y$$
$$\dot{y}=x+4x^3.$$

去掉项$4x^3$后可得到原点的线性化系统：

$$\dot{x}=4y$$
$$\dot{y}=x.$$

原点是特征值为±2的鞍点. 与特征值-2对应的特征向量是$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，而与特征值2对应的特征向量是$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

该线性系统有两条从不同方向沿直线趋向于原点的轨线：

[115]

$$\pm e^{-2t}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}.$$

定理4.4.5表明该非线性方程组有两条从相反的方向趋向于不动点的非线性轨线，且这两条轨线与下面的向量相切：

$$\pm\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}.$$

这两条轨线上的点组成了不动点的稳定流形 $W^s(\mathbf{0})$ (stable manifold of the fixed point $W^s(\mathbf{0})$)(即满足下面条件的所有点 $\boldsymbol{p}_0$ 的集合：当 t 趋于无穷时，其解 $\phi(t;\ \boldsymbol{p}_0)$ 趋于不动点，且 $\omega(\boldsymbol{p}_0)=\{\mathbf{0}\}$. 参见图 4.4.1.

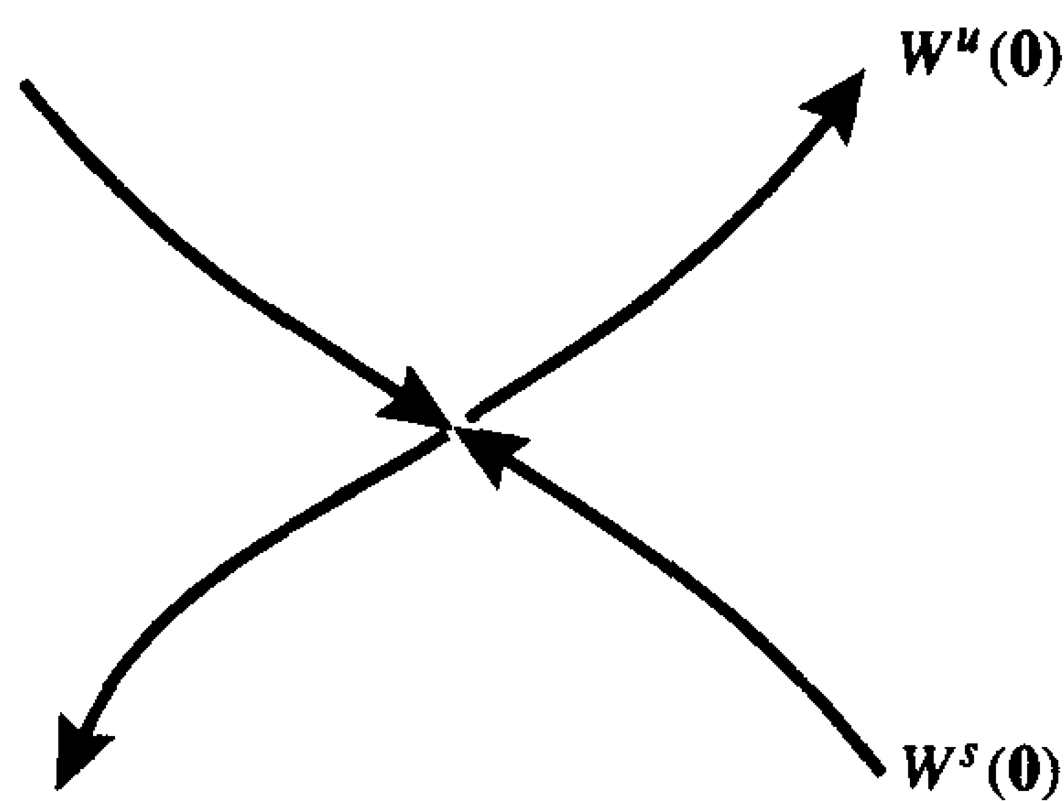


图 4.4.1　稳定和不稳定流形

同理可知，线性方程有两条轨线：

$$\pm e^{2t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},$$

当 t 趋于 $-\infty$ 时它们趋于不动点. 同样，当 t 趋于 $-\infty$ 时非线性方程有两条非线性轨线从相反的方向趋于不动点，并在原点与向量

$$\pm\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

相切. 这两条轨线上的点组成了不动点的不稳定流形 $W^u(\mathbf{0})$ (unstable manifold of the fixed point $W^u(\mathbf{0})$)(即满足下面条件的所有点 $\boldsymbol{p}_0$ 的集合：当 t 趋于 $-\infty$ 时解 $\phi(t;\ \boldsymbol{p}_0)$ 趋于不动点，且 $\alpha(\boldsymbol{p}_0)=\{\mathbf{0}\}$). ■

例 4.4.2　考虑微分方程组

$$\dot{x}=-x+y$$
$$\dot{y}=2-2xy^2.$$

零倾线是 $y=x$ 和 $xy^2=1$，唯一的不动点是 $x=1$ 和 $y=1$. 利用 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的符号不足以确定不动点附近的解的性态. 然而利用两个微分方程

$$\dot{x}=f(x,y)=-x+y$$
$$\dot{y}=g(x,y)=2-2xy^2,$$

在不动点的泰勒展式，即令 $u=x-1$，$v=y-1$，可得

$$\dot{u}=\dot{x}=f(1,1)+u\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+v\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)+\cdots=-u+v$$

$$\dot{v}=\dot{y}=g(1,1)+u\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)+v\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)+\cdots=-2u-4v+\cdots.$$

116

线性项系数矩阵的特征值是 -2 和 -3，相应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$. 该线性化系统在原点有一稳定结点. 在不动点附近线性项起决定作用，所以该非线性方程也有一个吸引的不动点. 而且，大部分解沿直线 $y-1=-(x-1)$ 渐近趋于不动点（即向量 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 的方向是渐近方向）. 参见图 4.4.2. 不动点(1, 1)的稳定流形 $W^s(1,\ 1)$ 包含不动点的一个领域(图 4.4.2 表

明它至少包含满足 $0\leq x\leq 2$ 和 $0\leq y\leq 2$ 的所有点）. 因此，$W^s(1,\ 1)$ 称为 $(1,\ 1)$ 的吸引域（basin of attraction）. ■

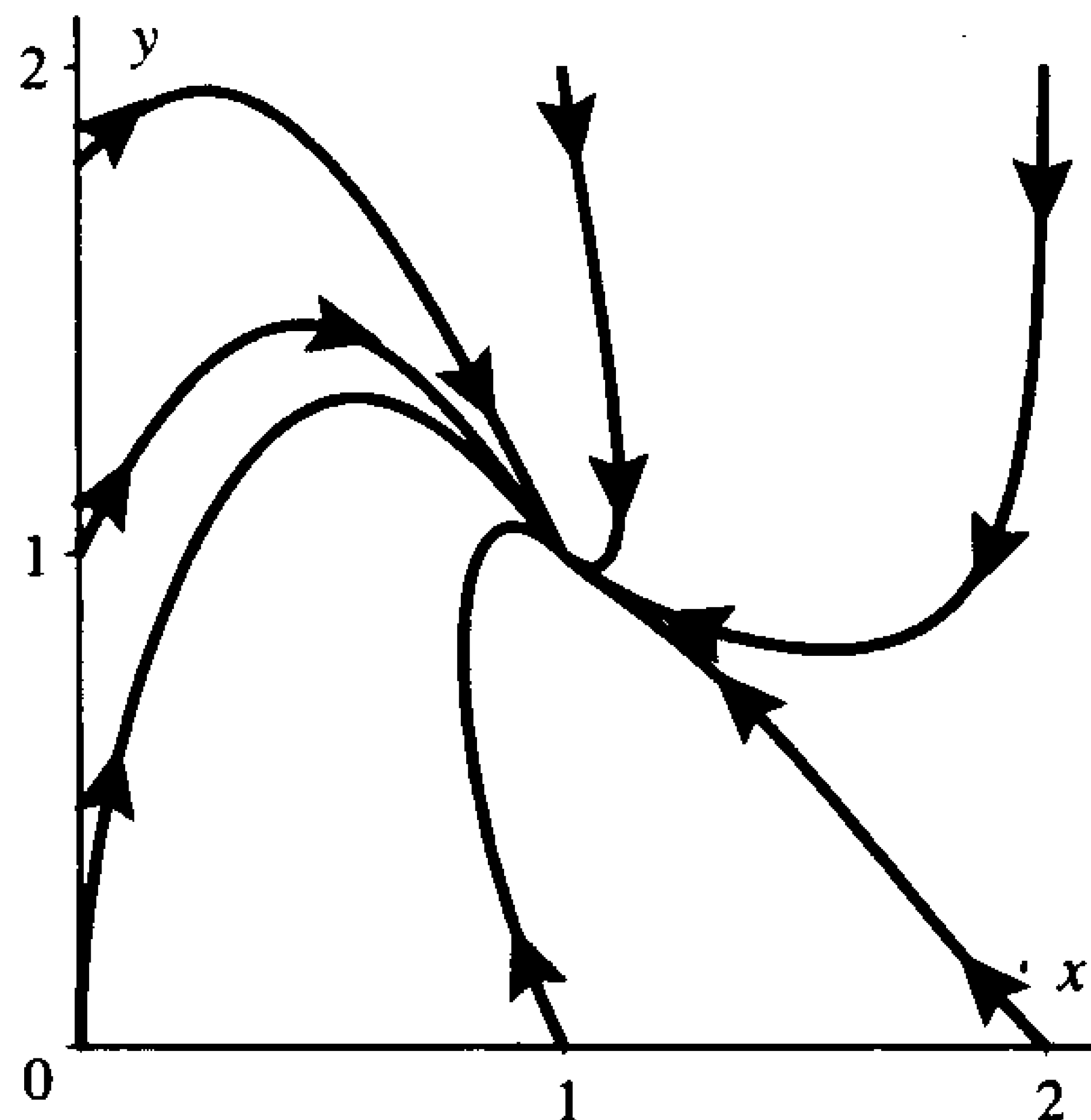


图 4.4.2　例 4.4.2 非线性汇图

对于一般的方程

$$\dot{x}=f(x,y)$$
$$\dot{y}=g(x,y),$$

其在不动点 $(x^*,\ y^*)$ 处的线性化系统是

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix},\tag{4.4.1}$$

其中，矩阵中所有的偏导数在点 $(x^*,\ y^*)$ 处取值. 比较线性化系统与非线性系统的解就是要比较线性化系统的坐标 $(u,\ v)$ 与非线性系统的坐标 $(x,\ y)=(u+x^*,\ v+y^*)$. 若

117

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\begin{bmatrix}f(x,y)\\ g(x,y)\end{bmatrix},$$

则令

$$D\boldsymbol{F}_{(x^*,y^*)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*)\end{bmatrix},$$

称之为偏导数矩阵或导数（matrix of partial derivative or derivative）.

对 n 个变量的情形，若

$$\boldsymbol{F}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{bmatrix}F_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ F_n(x_1,\cdots,x_n)\end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*)$ 是不动点，那么可设

$$D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*)\right)$$

为 $n\times n$ 阶偏导数矩阵或导数. 线性化系统是

$$\dot{\boldsymbol{u}}=D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{u}.$$

若 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的不动点，则把偏导数矩阵 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 的特征值称为不动点的特征值或 $\boldsymbol{x}^*$ 的特征值（the eigenvalue of the fixed point or the eigenvalue of $\boldsymbol{x}^*$）.

若矩阵 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 所有特征值的实部不为零，则称不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 是双曲的（hyperbolic）. 不动点的稳定流形 $W^s(\boldsymbol{x}^*)$（satble manifold of the fixed point $W^s(\boldsymbol{x}^*)$）是指当 t 趋于正无穷时趋于不动点的所有点的集合，即

$$W^s(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}_0: 当 t \to \infty 时, \boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{p}_0) \to \boldsymbol{x}^*\} = \{\boldsymbol{p}_0: \omega(\boldsymbol{p}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}\}.$$

这一定义用到 4.1 节介绍的 ω 极限集的符号. 如果当 t 趋于无穷时, 轨道收敛于同一点 $\boldsymbol{x}^*$, 则 ω 极限集等于这个点(即 $\omega(\boldsymbol{p}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}$). 不动点的不稳定流形 $W^u(\boldsymbol{x}^*)$(unsatble manifold of the fixed point $W^u(\boldsymbol{x}^*)$)是指当 t 趋于负无穷时趋于不动点的所有点的集合, 即

$$W^u(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}_0: 当 t \to -\infty 时, \boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{p}_0) \to \boldsymbol{x}^*\} = \{\boldsymbol{p}_0: \alpha(\boldsymbol{p}_0) = \{\boldsymbol{x}^*\}\}.$$

若不动点是双曲的, 则非线性系统与线性化系统不动点有相同的稳定性类型. 下面的结果准确地说明了这一点.

定理 4.4.3 考虑含有 n 个变量且具有双曲不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. 设 $\boldsymbol{F}$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ 和 $\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x})$ 都是连续的, 则非线性系统的不动点与其线性化系统在这一点具有相同的稳定性类型.

(a) 特别地, 若 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 所有特征值的实部都为负数, 则非线性系统的不动点是渐近稳定的(即, 若线性化系统在原点是渐近稳定的, 则非线性系统的不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 也是渐近稳定的). 在这种情况下, 吸引域 $W^s(\boldsymbol{x}^*)$ 是一个包含不动点的开集.

(b) 若 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 至少有一个特征值有正实部, 则非线性系统的不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 是不稳定的(线性化系统可能是鞍点、不稳定结点、不稳定焦点等).

(c) 若 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 的一个特征值有零实部, 则情况比较复杂. 特别是当 $n=2$ 时, 如果不动点是椭圆中心(特征值为 $\pm i\beta$)或者一个特征值是重数为 1 的零根, 则线性化系统不能确定不动点的稳定性类型.

118

注 4.4.4 非线性方程组的解和线性方程组的解非常相似, 就像在例 4.4.2 中的大多数轨线沿着与较弱特征值 -2 对应的特征向量的方向渐近趋于不动点(即与直线 $y-1=x-1$ 相切).

下面的定理考虑的是平面内鞍不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 附近的性态. 除了考虑稳定流形以外, 还考虑正半轨线恒在不动点附近的稳定流形中的那些点. 对于足够小的 $r>0$, 不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的长度为 r 的局部稳定流形(local stable manifold of size r of the fixed point)是 $W^s(\boldsymbol{x}^*)$ 中这样点的集合, 其半轨线与 $\boldsymbol{x}^*$ 的距离小于 r, 即

$$W_r^s(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}_0 \in W^s(\boldsymbol{x}^*): \| \boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{p}_0) - \boldsymbol{x}^* \| < r, 对一切 t \geq 0\}.$$

例 4.1.10 表明不动点的稳定流形上可能存在这样的点: 从该不动点附近出发, 并离开该不动点, 最终又返回并收敛于该不动点, 这样的点不在局部稳定流形上.

对于二维的情形, 鞍不动点的局部稳定流形是一条穿过不动点的曲线段, 可表示为定义于由稳定特征向量生成的直线上长度为 $2r$ 的区间上的曲线图; 在高维的情况里, 是线性方程所有压缩方向的子空间内一个球上的图像. 第 7 章将研究洛伦兹系统的二维稳定流形. 流形(manifold)是个数学术语, 它包括曲线、曲面和高维对象. 附录 B 对该术语进行了透彻的分析.

不动点的稳定子空间(stable subspace)是由线性化方程在不动点处具有负实部的特征值所

对应的特征向量张成的线性子空间，即

$$\mathbb{E}^s = \text{span}\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}\text{ 是 }\boldsymbol{DF}_{(\boldsymbol{x}^*)}\text{ 的特征向量},\boldsymbol{v}\text{ 的特征值有负实部}\}.$$

考虑这个子空间里所有长度小于 r 的向量，即

$$\mathbb{E}^s(r) = \{\boldsymbol{v}\in\mathbb{E}^s:\|\boldsymbol{v}\|\leqslant r\}.$$

同样，不动点的不稳定子空间(unstable subspace)是由线性化方程在不动点处具有正实部的特征值对应的特征向量张成的线性子空间，即

$$\mathbb{E}^u = \text{span}\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}\text{ 是 }\boldsymbol{DF}_{(\boldsymbol{x}^*)}\text{ 的特征向量},\boldsymbol{v}\text{ 的特征值都有正实部}\}.$$

考虑这个子空间里所有长度小于 r 的向量，即

$$\mathbb{E}^u(r) = \{\boldsymbol{v}\in\mathbb{E}^u:\|\boldsymbol{v}\|\leqslant r\}.$$

若不动点是双曲的，则$\mathbb{R}^n=\mathbb{E}^s+\mathbb{E}^u$. 长度为 r 的局部稳定流形是从$\mathbb{E}^s(r)$到$\mathbb{E}^u(r)$的某函数 σ^s 的图，即

$$W_r^s(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^* + (\boldsymbol{y},\sigma^s(\boldsymbol{y})):\boldsymbol{y}\in\mathbb{E}^s(r)\}.$$

类似地，对于足够小的 $r>0$，不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的长度为 r 的局部不稳定流形(local unstable manifold of size of r of the fixed point)是 $W^u(\boldsymbol{x}^*)$中这样点的集合，其负半轨与 $\boldsymbol{x}^*$ 的距离小于 r，即

$$W_r^u(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}_0\in W^u(\boldsymbol{x}^*):\|\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{p}_0)-\boldsymbol{x}^*\| < r,\text{对所有 } t\leqslant 0\}.$$

长度为 r 的局部不稳定流形是从$\mathbb{E}^u(r)$到$\mathbb{E}^s(r)$的某函数 σ^u 的图，即

$$W_r^u(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^* + (\sigma^u(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}):\boldsymbol{z}\in\mathbb{E}^u(r)\}.$$

对于二维的情形，鞍不动点的稳定和不稳定流形都是曲线，每条曲线将相平面分隔成两个区域. 因此，在二维的情形里，鞍不动点的稳定和不稳定流形常被称为分界线(separatrice). 汇的稳定流形就等于由收敛于它的所有点组成的开集，在这种情况下，稳定流形也被称为不动点的吸引域. 汇的不稳定流形就是不动点本身. 源的稳定流形是不动点，而不稳定流形则是由当 t 趋于负无穷时收敛于不动点的所有点组成的开集.

119

定理 4.4.5 (a)设 $\boldsymbol{x}^*$ 是二维微分方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的一个鞍不动点(也就是说特征值是实数，且一个为正数，一个为负数，即 $\lambda_s<0<\lambda_u$)，则对足够小的 $r>0$，不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的长度为 r 的局部稳定流形 $W_r^s(\boldsymbol{x}^*)$是过 $\boldsymbol{x}^*$ 且与特征值 λ_s 对应的特征向量 v^s 相切的曲线. 同理，长度为 r 的局部不稳定流形 $W_r^u(\boldsymbol{x}^*)$是过 $\boldsymbol{x}^*$ 且与特征值 λ_u 对应的特征向量 v^u 相切的曲线.

(b)设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 n 维微分方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的一个鞍不动点(也就是说所有的特征值都有非零实部，至少有一个特征值实部为正，一个特征值实部为负)，令$\mathbb{E}^s$ 和$\mathbb{E}^u$ 是前面定义的稳定与不稳定子空间，则对足够小的 $r>0$，不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的长度为 r 的局部稳定流形 $W_r^s(\boldsymbol{x}^*)$是个“曲面”，它是从$\mathbb{E}^s(r)$到$\mathbb{E}^u(r)$的某函数 σ^s 的图象并在 $\boldsymbol{x}^*$ 与子空间$\mathbb{E}^s$ 相切，即

$$W_r^s(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^* + (\boldsymbol{y},\sigma^s(\boldsymbol{y})):\boldsymbol{y}\in\mathbb{E}^s(r)\}.$$

同理可知，对于足够小的 $r>0$，不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的长度为 r 的局部不稳定流形 $W_r^u(\boldsymbol{x}^*)$是个“曲面”，它是从$\mathbb{E}^u(r)$到$\mathbb{E}^s(r)$的某函数 σ^u 的图像并在 $\boldsymbol{x}^*$ 与子空间$\mathbb{E}^u$ 相切，即

$$W_r^u(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}^* + (\sigma^u(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}):\boldsymbol{z}\in\mathbb{E}^u(r)\}.$$

(c)在任意维空间中，(全局)稳定流形是这些点的集合，其正半轨最终进入长度为 r 的局部稳定流形，即

$$W^s(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}:\phi(t;\boldsymbol{p}) \in W^s_r(\boldsymbol{x}^*),\text{对某个 } t \geqslant 0\}$$
$$= \bigcup_{t \leqslant 0} \phi(t;W^s_r(\boldsymbol{x}^*)).$$

同理可知，(全局)不稳定流形是这些点的集合，其负半轨最终进入长度为 r 的局部不稳定流形，即

$$W^u(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p}:\phi(t;\boldsymbol{p}) \in W^u_r(\boldsymbol{x}^*),\text{对某个 } t \leqslant 0\}$$
$$= \bigcup_{t \geqslant 0} \phi(t;W^u_r(\boldsymbol{x}^*)).$$

证明见[**87**].

上述定理只是指出稳定和不稳定流形的存在性，但并没有说明如何去确定它们. 一般来说，没有有效的方法可以得到这些曲线的解析表达式. 用不动点附近的幂级数来表示也是可能的，但计算太难而且也不太好用. 为了能用电脑得出一个数值近似值，在不动点附近特征向量的方向上取初始值 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{v}^u$，解 $\{\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0):\ t \geqslant 0\}$ 给出了不稳定流形的近似值. 为了能得出稳定流形的数值近似值，取初始值为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{v}^s$，与负的时间 t 对应的解可通过计算得到.

该定理也用来研究不动点附近的稳定和不稳定流形(曲线). 远离不动点的稳定流形不可能自交，但可以在相空间内环绕并以螺旋式趋于另一个不动点或周期轨线，它也可以与这个不动点或另一不动点的不稳定流形相连，这一情形发生在例 5.2.3 的无阻尼振动中. 120

例 4.4.6 分析系统

$$\dot{x} = -x + y$$
$$\dot{y} = xy - 1$$

的相图.

首先求不动点：由 $\dot{x} = 0$ 知 $x = y$，而由 $\dot{y} = 0$ 可得 $1 = xy = x^2$ 或 $x = \pm 1$，因此，有两个不动点：(1, 1)和(−1, −1).

由线性化可得

$$DF_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}.$$

在点(1, 1)，线性化矩阵为

$$DF_{(1,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

有特征方程 $\lambda^2 - 2 = 0$ 和特征值 $\lambda = \pm\sqrt{2}$，所以，(1, 1)是个鞍点，特征向量是$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \pm \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

在点(−1, −1)，线性化矩阵为

$$DF_{(-1,-1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

有特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ 和特征值 $\lambda = -1 \pm \mathrm{i}$，所以，(1, −1)是稳定焦点.

零倾线是$\{\dot{x}=0\}=\{y=x\}$和$\{\dot{y}=0\}=\{y=1/x\}$，参见图4.3.4. 从鞍点出来的轨道向下以螺旋式趋于稳定焦点. 鞍点有从两侧渐近趋于它的轨线，这些轨线向外延伸至无穷. 所有从鞍点稳定流形下方出发的轨线，最终都以螺旋式趋于稳定焦点，而所有从鞍点稳定流形上方出发的轨线，最终都离开并趋于无穷.

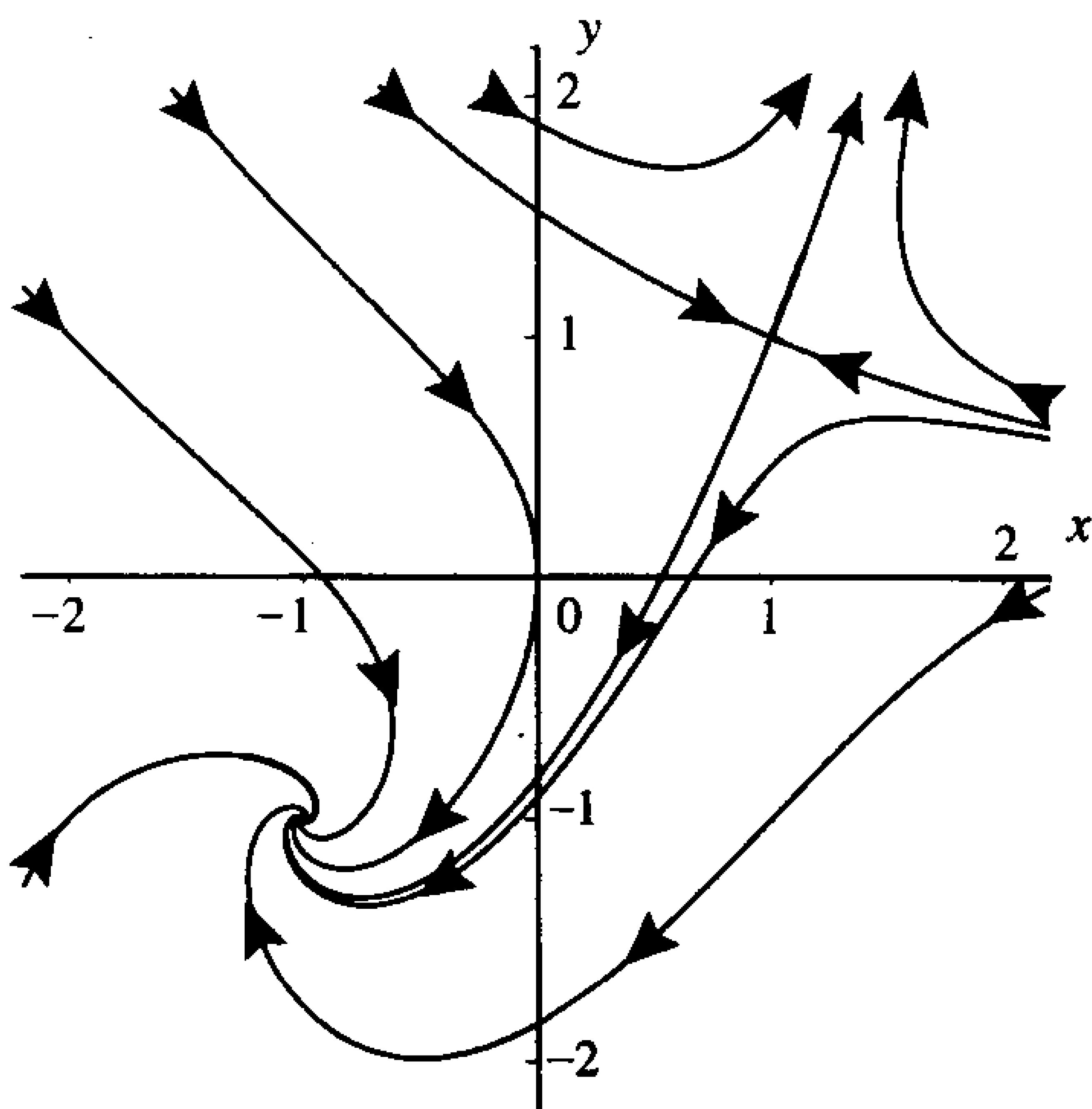


图4.4.3　例4.4.6相平面图

大部分相图可通过分析不动点的稳定性和寻找零倾线得到，电脑对理解这一性态有很大帮助. 在利用电脑程序绘制相图时，第一个必须解决的问题是确定一个可显示相图的"窗口"(window). 当然，它应该足够大，可以包括不动点并能显示解是如何渐近趋于不动点的，为显明重要特征这一窗口也不宜太大.

一旦窗口选定，只需多取几个初始值以显示相图的重要特点，这可利用试验法得出，此法尤其适用于对方程了解不多的情况. 变化初始值才有可能找到鞍点稳定流形附近的解，并进而获得相图其他部分的性态，由图4.4.3可见对这个例子初始值进行的选择. ■

例4.4.7(线性中心)　考虑非线性微分方程组

$$\dot{x}=-y+ax(x^2+y^2)$$
$$\dot{y}=x+ay(x^2+y^2).$$

对任意参数a，该系统在原点的偏导数矩阵的特征值都是$\pm i$，因此，原点是该线性化微分方程的中心. 可证通过改变参数a的值，该非线性微分方程组的不动点可以是吸引的、排斥的或是L稳定的.

将其化为极坐标，由$r^2=x^2+y^2$可得

$$r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}=x(-y+axr^2)+y(x+ayr^2)$$
$$=ar^2(x^2+y^2)=ar^4\quad\text{或}$$
$$\dot{r}=ar^3.$$

同理可知，$\tan(\theta)=\dfrac{y}{x}$，且有

$$\sec^2(\theta)\,\dot{\theta}=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}=\frac{x^2+axyr^2+y^2-axyr^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\quad\text{或}$$
$$\dot{\theta}=1.$$

若$a<0$，则当$r>0$时$\dot{r}<0$，原点是吸引的，因此，原点虽不是线性吸引的，但其吸引性是由微分方程的三次项所引起的. 同理，若$a>0$，则当$r>0$时$\dot{r}>0$，且由三次项可知原点是排斥的. 最后满足$a=0$的方程给出了一个线性中心. 这表明出现中心的线性系统不足以确定不动点的稳定性类型. ■

4.5 竞争种群

本节研究两个种群，它们相互作用并彼此对对方种群的发展有着积极或消极的影响．如一个种群的情形，$\dot{x}/x$ 和 $\dot{y}/y$ 分别表示单位种群的增长率，以这种增长率为两个种群的函数的一般方程组为

$$\frac{\dot{x}}{x} = f(x,y)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = g(x,y),$$

122

或

$$\dot{x} = xf(x,y)$$

$$\dot{y} = yg(x,y).$$

一个经典的模型 f 与 g 均是 x 和 y 的线性函数，从而产生 Lotka-Volterra 方程(Lotka-Volterra equation)：

$$\dot{x} = x(B_1 + A_{1,1}x + A_{1,2}y)$$

$$\dot{y} = y(B_2 + A_{2,1}x + A_{2,2}y).$$

考虑两种情形．在第一种情形里，每个种群对另一种群的增长率起消极作用，所以 $A_{1,2}$，$A_{2,1} < 0$(常假设种群对自身的发展也起消极作用，所以有 $A_{1,1}$，$A_{2,2} < 0$)，称这一情形为**竞争种群**(competitive species)．

在第二种情形里，一个种群对另一种群(被掠食者)的增长率起积极作用，而另一种群对第一个种群(掠食者)的增长率起消极作用．所以有 $A_{2,1} > 0$ 且 $A_{1,2} < 0$，这一情形被称为**捕食-食饵系统**(predator-prey system)，将在第 5 章讨论，因为与本章所用方法相比，求其解的方法与下一章所用的方法更为相似，参见 5.1 节．

竞争种群

首先来看每一种群对另一种群的增长率起消极作用且依赖关系为线性的竞争系统：

$$\frac{\dot{x}}{x} = K - x - ay$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = L - bx - y,$$

或

$$\dot{x} = x(K - x - ay)$$

$$\dot{y} = y(L - bx - y).$$

这里只考虑所有参数都为正的情况．当种群较小时，常数 K 和 L 分别表示 x 和 y 的增长率，假设这些增长率为正．每一种群对自身及另一种群的增长率都有消极影响，已假设(或者说已设定这样的变量)第一个方程中 x 和第二个方程中 y 的系数都是 -1．

由 $\dot{x} = 0$ 可知零倾线是 $x = 0$ 或 $K - x - ay = 0$，而由 $\dot{y} = 0$ 可知零倾线是 $y = 0$ 或 $L - bx - y = 0$．欲求不动点，若 $x = 0$，则 $y = 0$ 或 $y = L$，也有 $y = 0$，$x = K$ 的不动点．最后，还有一不动点(x^*，

y^*)，它是两个方程

$$0 = K - x^* - ay^*$$
$$0 = L - bx^* - y^*$$

的解. 很自然感兴趣的是非负种群，所以只有当 $x^* > 0$ 且 $y^* > 0$ 时，这个不动点才有意义. 只有直线在第一象限内相交才会出现这种情形，因为这些直线与 x 轴和 y 轴的截距分别是 K，K/a，L/b 和 L，所以若

123

$$\frac{L}{b} < K \text{ 且 } L > \frac{K}{a}, \quad \text{或者}$$
$$\frac{L}{b} > K \text{ 且 } L < \frac{K}{a}.$$

那么在第一象限内有一个不动点. 因此，有四个不动点(0, 0)，(K, 0)，(0, L)和(x^*，y^*).

偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} (K - x - ay) - x & -ax \\ -by & (L - bx - y) - y \end{bmatrix}.$$

I. **第一种情况**内不动点存在且

$$L < bK \quad \text{且} \quad aL > K.$$

则零倾线在第一象限内相交，所以 $x^* > 0$ 且 $y^* > 0$. 在不动点(K, 0)处的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} -K & -aK \\ 0 & L - bK \end{bmatrix}.$$

由于 $L - bK < 0$，所以(K, 0)是稳定结点. 类似地，在(0, L)处的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} K - aL & 0 \\ -bL & -L \end{bmatrix},$$

且(0, L)也是稳定结点. 最后，在(x^*，y^*)处，

$$\begin{bmatrix} -x^* & -ax^* \\ -by^* & -y^* \end{bmatrix}$$

的行列式是 $x^* y^* (1 - ab)$. 因为 $L < bK < b(aL)$，所以有 $1 - ab < 0$，从而不动点是鞍点.

零倾线将第一象限划为 4 个区域，参见图 4.5.1. 在 $\dot{y} = 0$ 右边，$\dot{x} = 0$ 之下且与(K, 0)相邻的底部区域的点的运动方向是右下. 因为它们不能离开此区域，所以必趋于吸引不动点(K, 0).

同理可知，在 $\dot{x} = 0$ 之上，$\dot{y} = 0$ 之下且与(0, L)相邻的区域内的点的运动方向是左上，而且收敛于不动点(0, L).

124

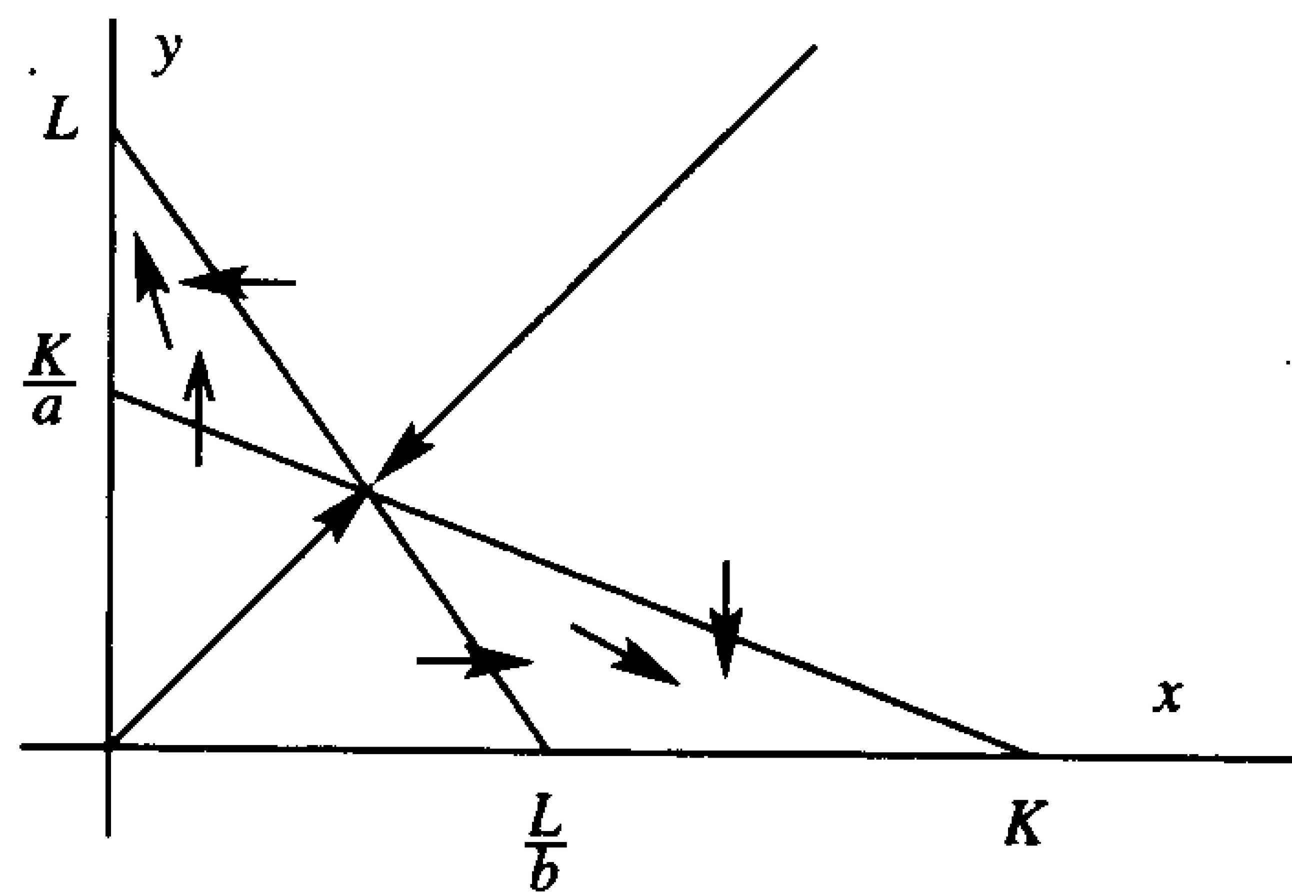


图 4.5.1　竞争排斥图

至于在 $\dot{x} = 0$ 和 $\dot{y} = 0$ 之下且与(0, 0)相邻的区

域内的点，由于$\dot{x}$和$\dot{y}$均为正，所以解或是离开或是进入刚刚分析过的两个区域中的一个，否则它们必停留在该区域并趋向于不动点(x^*, y^*)（即它们必须在(x^*, y^*)的稳定流形之上）. 同理可知，在$\dot{x}=0$和$\dot{y}=0$之上并在它们右边的点或在(x^*, y^*)的稳定流形之上，或是进入轨线趋于$(K, 0)$的区域，或进入轨线趋于$(0, L)$的区域. 因此，稳定流形$W^s(x^*, y^*)$将第一个象限分割成$(K, 0)$的吸引域和$(0, L)$的吸引域. 而$W^s(x^*, y^*)$上的点趋于鞍点(x^*, y^*)，因此，会产生竞争排斥，当t趋于无穷时，对大多数初始值都会导致种群之一灭绝.

II. **第二种情况**内不动点存在且

$$L > bK \quad 且 \quad aL < K.$$

同样，零倾线在第一象限内相交，所以有$x^* > 0$且$y^* > 0$. 参见图 4.5.2. 因为$L > bK > baL$且$1 - ab > 0$，所以在(x^*, y^*)处的偏导数系数矩阵为正，迹为负，即(x^*, y^*)是渐近稳定的. 事实上，两个特征值均为实数. $(K, 0)$和$(0, L)$都是鞍点，并沿各自轴的方向吸引而沿第一象限内的方向排斥. $\dot{x}=0$和$\dot{y}=0$两线间的区域不变，且该区域内的轨线单调趋于(x^*, y^*). 另两个区域中的解或是直接趋向于(x^*, y^*)或是进入上面两个区域. 因此，所有轨线最终趋于(x^*, y^*)（即(x^*, y^*)的吸引域是第一象限的开集）. $(K, 0)$的稳定流形恰恰正是正x轴；同理可知，$W^s(0, L)$是正y轴，因此，满足所有初始条件的两种群竞争共存.

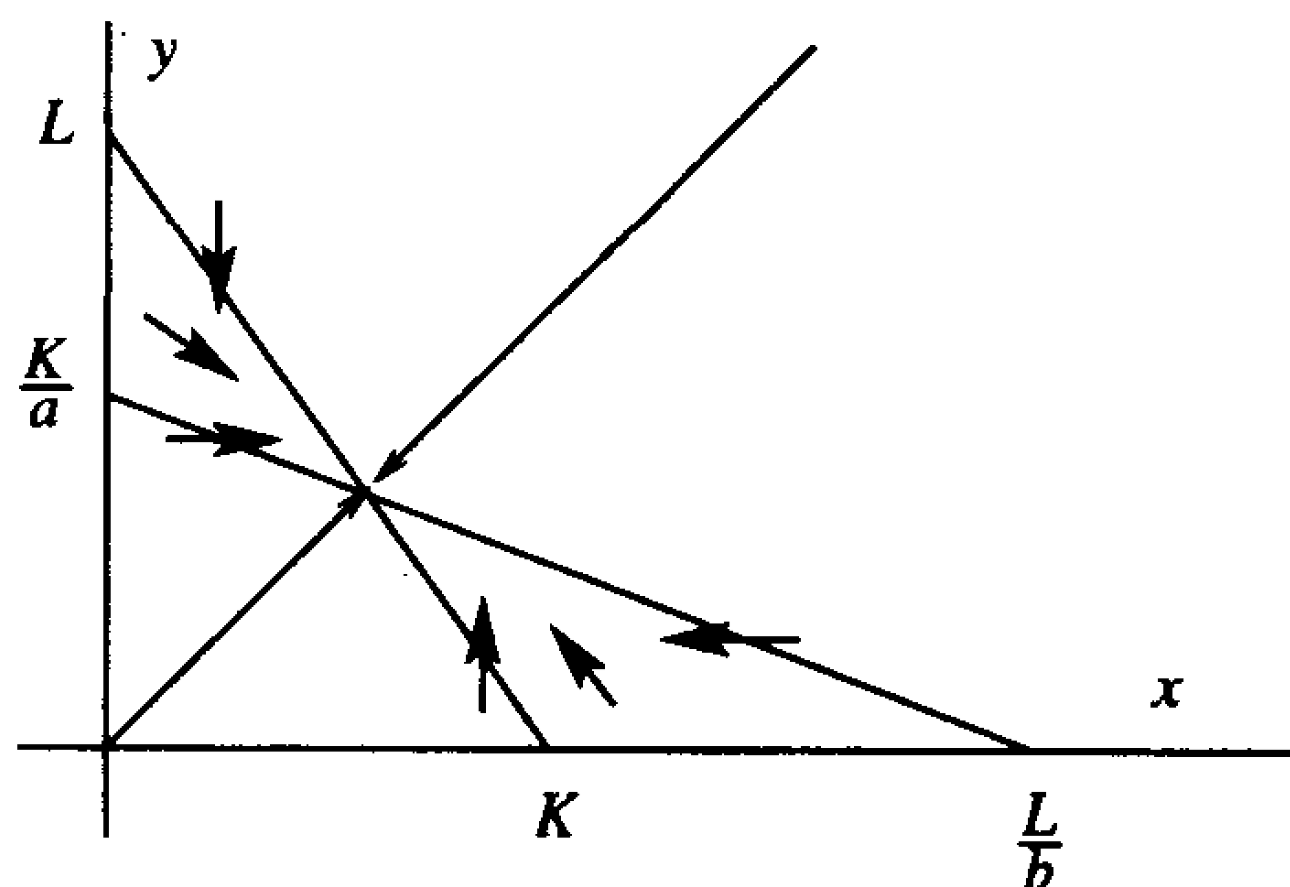


图 4.5.2 竞争共存图

三个竞争种群

本小节并不考虑一般情况的三个种群，而是考虑一类 Lotka-Volterra 系统. 对此类系统，大多数点的ω极限集不是单个不动点而是不动点及其稳定与不稳定流形所成的不动点环. 基于对两个种群的了解，似乎可以猜测任意轨线的ω极限集可能是单个不动点，然而，Hofbauer 和 Sigmund 的专著[**52**]的一个例子表明这种猜测是错误的.

125

考虑三个种群的竞争系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3)\\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - \beta x_1 - x_2 - \alpha x_3)\\ \dot{x}_3 &= x_3(1 - \alpha x_1 - \beta x_2 - x_3),\end{aligned}$$

其中$0 < \beta < 1 < \alpha$，$\alpha + \beta > 2$. 只考虑坐标为非负数的点：

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

不动点是$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$，$\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$，$\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$和$\mathbf{x}^*$，其中$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1/(1 + \alpha + \beta)$. 在不动点$\mathbf{x}^*$处的偏导数矩阵是

$$DF_{(\mathbf{x}^*)} = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}.$$

由对称性可知特征值是 -1 和

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = \frac{1}{1+\alpha+\beta}(-1-\alpha e^{2\pi/3}-\beta e^{\pi/3}),$$

而且 λ_2 和 λ_3 的实部是

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta}\left(-1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta-1}{1+\alpha+\beta}>0.$$

-1 对应的特征向量是(1, 1, 1)，所以，$\boldsymbol{x}^*$ 有一个一维稳定流形和一个二维不稳定流形. 对角线 Δ 上的点 $\boldsymbol{x}$ 满足 $x_1=x_2=x_3$. 因为 Δ 上的点都满足 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=\dot{x}_3$，所以 Δ 是不变的，而 $\boldsymbol{x}^*$ 的稳定流形由对角线上分量都为正数的点组成，即

$$W^s(\boldsymbol{x}) = \{(x_1,x_2,x_3):x_1=x_2=x_3>0\}.$$

在不动点 $\boldsymbol{u}_1$ 处的偏导数矩阵是

$$\boldsymbol{DF}_{(\boldsymbol{u}_1)} = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

则特征值是 $-1<0$，$1-\alpha<0$ 和 $1-\beta>0$. 因此，该不动点有一个二维的稳定流形和一个一维的不稳定流形. 另两个不动点 $\boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3$ 有相似的特征值和相同维数的稳定和不稳定流形.

首先证明大多数轨道趋于坐标平面 $\{x_1=0\}$，$\{x_2=0\}$ 和 $\{x_3=0\}$. 令

$$P = x_1x_2x_3 \quad 和$$
$$S = x_1+x_2+x_3.$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{S} &= x_1+x_2+x_3-[x_1^2+x_2^2+x_3^2+(\alpha+\beta)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]\\ &\leqslant x_1+x_2+x_3-[x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]\\ &= S-S^2 = S(1-S).\end{aligned}$$

126

因此，任何轨道必渐近趋于集 $S=1$(除非 $S=0$)，而且一定进入并停留在 $S\leqslant 2$ 的集合内，这表明所有的轨道都有界. 对于 P，有

$$\dot{P} = \dot{x}_1x_2x_3+x_1\dot{x}_2x_3+x_1x_2\dot{x}_3 = P[3-(1+\alpha+\beta)S].$$

为了解趋于集合 $P(\boldsymbol{x})=0$ 的解，通过计算可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(PS^{-3}) = PS^{-4}\left(1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]\leqslant 0.$$

若 $P(\boldsymbol{x})>0$ 且 $\boldsymbol{x}$ 不在对角线 Δ 上，上面的导数严格为负. 由于轨道是有界的，在 5.3 节将证明 PS^{-3} 是一个严格的李雅普诺夫函数，且轨道都趋于其满足 $P(\boldsymbol{x})S^{-3}(\boldsymbol{x})=0$ 的最小值(即趋于至少有一个坐标变量为 0 的坐标平面).

在坐标平面 $\{x_3=0\}$ 上，零倾线 $\dot{x}_2=0$ 在零倾线 $\dot{x}_1=0$ 之上，从而所有初始条件满足 $x_1>0$ 和 $x_2>0$ 的轨道都趋于不动点 $\boldsymbol{u}_2$，因此

$$W^S(\boldsymbol{u}_2) \supset \{(x_1,x_2,x_3):x_3=0,x_1\geqslant 0,x_2>0\}\subset\{x_3=0\}.$$

由特征值可知，不动点 $\boldsymbol{u}_1$ 有一维不稳定流形，而且在坐标平面 $\{x_3=0\}$ 内有一维不稳定流形，

因此，$W^u(\boldsymbol{u}_1)$包含在这一平面内且

$$W^u(\boldsymbol{u}_1) \subset W^S(\boldsymbol{u}_2) \subset \{x_3 = 0\}.$$

坐标平面$\{x_1=0\}$和$\{x_2=0\}$是相似的，且

$$W^u(\boldsymbol{u}_2) \subset W^S(\boldsymbol{u}_3) \subset \{x_1 = 0\} \quad 和$$

$$W^u(\boldsymbol{u}_3) \subset W^S(\boldsymbol{u}_1) \subset \{x_2 = 0\}.$$

因此，三个不动点 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3$ 形成由稳定流形和不稳定流形相连而成的不动点环.

取三个坐标都为正的任意初始值(x_1^0, x_2^0, x_3^0)，它的 ω 极限集 $\omega(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$必属于集

$$P^{-1}(0) \cap S^{-1}(1) = \{(x_1,x_2,x_3):P(x_1,x_2,x_3) = 0 \text{ 且 } S(x_1,x_2,x_3) = 1\}.$$

因为三个不动点的稳定流形不进入所有坐标都为正的第一卦限，所以 $\omega(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$不可能只是一个不动点，必为正不变集. 事实上，轨道相继在每个不动点附近循环并重复这一过程，因此，ω 极限集就是整个三角集：

$$\omega(x_1^0,x_2^0,x_3^0) = P^{-1}(0) \cap S^{-1}(1).$$

所以，ω 极限集不是一个不动点而是由从一个不动点到另一个不动点的不稳定流形所成的圈. 127

4.6 应用

4.6.1 恒化器模型

简单的恒化器模型

恒化器是一种用于控制在实验条件下培养微生物的实验室仪器. 在这种仪器里，营养物质被持续注入富含微生物的容器内，而含细胞、营养物质以及实验副产品的相同容量的液体流出容器. 因为流进与流出容器的液体容量相同，所以容器内液体的容量保持恒定.

在第一个简单的恒化器模型中，在流出容器的液体中微生物的浓度趋于一个恒定值(平衡)，这正是进行化学反应所需要的. 流出容器浓度恒定的微生物可用于进一步试验，或者说平衡浓度可用于研究细胞的生长速度或者是代谢产品的形成速度.

6.2.1 节(Brusselator)和 6.8.1 节(Belousov-Zhabotinsky 化学反应的 Field-Noyes 模型)将给出一些关于化学过程的例子，这些过程趋于流出液体的浓度的周期水平. 这些例子至少需要三种化学物质，即使 6.2 节中的例子只包含两个变量. 人们已发现在某些情况下液体的浓度实际上是混沌的.

设 S 是营养物质的浓度，而 x 是微生物的浓度，微生物消耗营养物质的速度 $r(S)$是营养物浓度与微生物浓度 x 的乘积函数，一个广泛使用的模型是：

$$r(S) = \frac{mS}{a + S},$$

其中 $m>0$ 且 $a>0$，这是 Monod 在 1950 年提出的，它满足 $r(0)=0$，且当 S 趋于无穷时 $r(S)$趋于极限值 m. 若 $S^{(0)}$是注入容器的营养物质的浓度，利用这个模型，原微分方程可化为

$$\dot{S} = (S^{(0)} - S)D - \frac{\beta mSx}{a + S}$$

$$\dot{x} = \frac{mSx}{a+S} - Dx,$$

其中 D 是由流进和流出容器的液体速度所确定的常数，因而其值是可调节的．假设所有参数为正数且 $m>D$，上面的条件意味着对足够大的营养物质 S，微生物消耗的速度 $r(S)$ 大于液体从容器内的流出速度．初始条件满足 $x(0)>0$ 和 $S(0)\geqslant 0$．零倾线是

$$\{\dot{x}=0\} = \left\{S = \frac{aD}{m-D}\right\} \quad 和$$

128

$$\{\dot{S}=0\} = \left\{x = \frac{D(S^{(0)}-S)(S+a)}{\beta m S}\right\}.$$

当 $S=S^{(0)}$ 时，第二条零倾线满足 $x=0$，而且，零倾线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left(-\frac{D}{\beta m}S + S^{(0)} - a + \frac{DaS^{(0)}}{\beta m S}\right)$$

$$= -\frac{D}{\beta m} - \frac{DaS^{(0)}}{\beta m S^2} < 0,$$

从而当 S 趋于 0 时，x 趋于 ∞．因此，当且仅当

$$\lambda = \frac{aD}{m-D} < S^{(0)}$$

时在第一象限内有一个不动点．

定理 4.6.1　对于上述微分方程组，设 $m>D$ 且 $\lambda<S^{(0)}$，则内不动点由下式确定：

$$S^* = \lambda \quad 和 \quad x^* = \frac{S^{(0)}-\lambda}{\beta},$$

而且是渐近稳定的．仅有的另一不动点由 $S=S^{(0)}$ 和 $x=0$ 给出，且是一个鞍点．事实上，初始值满足 $x_0>0$ 和 $S_0>0$ 的所有轨线都趋于内不动点 (S^*, x^*)．

证明　唯一的内不动点在定理中已给出．该不动点处的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} -D-\dfrac{\beta(m-D)x^*}{a+S^*} & -\dfrac{\beta m S^*}{a+S^*} \\ \dfrac{(m-D)x^*}{a+S^*} & 0 \end{bmatrix}.$$

其迹为负，而行列式为正．因为迹是特征值的和而行列式是特征值的乘积，所以两个特征值都有负实部(即不动点必渐近稳定)．在这种情况下，在第二个不动点 $(S^{(0)}, 0)$ 处的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} -D & \dfrac{\beta m S^{(0)}}{a+S^{(0)}} \\ 0 & \dfrac{mS^{(0)}}{a+S^{(0)}} - D \end{bmatrix}.$$

因为 $\lambda<S^{(0)}$，特征值是

$$-D<0 \text{ 且 } \frac{mS^{(0)}}{a+S^{(0)}}-D>0,$$

所以该不动点是一个不稳定的鞍点. ■

下面的定理给出了内不动点不存在时的结论，具体证明过程留给读者.

定理 4.6.2 对于上述微分方程组，设 $m>D$ 且 $\lambda>S^{(0)}$，则在第一个象限内没有内不动点，而且不动点 $(S^{(0)}, 0)$ 是渐近稳定的.

相关内容请参考有关种群生物学的文献[**20**]和[**113**].

129

竞争同一种营养物质的两种微生物

下面考虑一个容器内存在浓度分别为 x 和 y 的两种微生物的简单的恒化器问题，这两种微生物竞争同一营养物质但又不直接相互影响. 用 D 表示液体流过容器的速度，那么系统可化为

$$\dot{S}=(S^{(0)}-S)D-\frac{\beta_1 m_1 Sx}{a_1+S}-\frac{\beta_2 m_2 Sy}{a_2+S}$$

$$\dot{x}=\frac{m_1 Sx}{a_1+S}-Dx$$

$$\dot{y}=\frac{m_2 Sy}{a_2+S}-Dy.$$

这里只对 $S\geqslant 0$，$x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$ 时的情况进行考虑.

与其考虑三个变量的情况，不如将变量减少为两个，定义新变量为

$$z=S^{(0)}-S-\beta_1 x-\beta_2 y,$$

导数为

$$\dot{z}=-(S^{(0)}-S)D+\frac{\beta_1 m_1 Sx}{a_1+S}+\frac{\beta_2 m_2 Sy}{a_2+S}-\beta_1\frac{m_1 Sx}{a_1+S}+\beta_1 Dx-\beta_2\frac{m_2 Sy}{a_2+S}+\beta_2 Dy$$
$$=-Dz.$$

因此，解 $z(t)$ 衰减于 0，即

$$z(t)=z(0)e^{-Dt}.$$

既然我们只对方程的长期性态感兴趣，所以取 $z=0$，用 x 和 y 来表示 S. 要注意的是，这里只考虑 $S\geqslant 0$ 时的情况，所以只需考虑

$$\beta_1 x+\beta_2 y=S^{(0)}-S\leqslant S^{(0)}.$$

在集 $z=0$ 上，x 和 y 的微分方程成为

$$\dot{x}=x\left(\frac{m_1(S^{(0)}-\beta_1 x-\beta_2 y)}{a_1+S^{(0)}-\beta_1 x-\beta_2 y}-D\right)$$

$$\dot{y}=y\left(\frac{m_2(S^{(0)}-\beta_1 x-\beta_2 y)}{a_2+S^{(0)}-\beta_1 x-\beta_2 y}-D\right).$$

因为 $\beta_1 x+\beta_2 y\leqslant S^{(0)}$，所以上式的分母为正数.

这里只考虑这样的参数，使每一种生物体单独存在时其浓度趋于非零极限. 基于这一简单的恒化器模型，可设

$$m_1 > D$$

$$m_2 > D$$

$$\lambda_1 = \frac{a_1 D}{m_1 - D} < S^{(0)} \quad 和$$

$$\lambda_2 = \frac{a_2 D}{m_2 - D} < S^{(0)}.$$

给这些生物体重新编号，设

130

$$\lambda_1 < \lambda_2.$$

下面利用只含有 x 和 y 两个变量的微分方程的零倾线来分析其相图，利用简单的代数知识可知零倾线为

$$S^{(0)} - \lambda_1 = \beta_1 x + \beta_2 y \quad 和$$

$$S^{(0)} - \lambda_2 = \beta_1 x + \beta_2 y.$$

这两条线是平行的，而且由 $\lambda_1 < \lambda_2$ 可知，第一条线在第二条线外面，因此，零倾线和向量的方向如图 4.6.1 所示. 不动点是 $(x^*, 0)$ 和 $(0, y^*)$，其中

$$x^* = \frac{S^{(0)} - \lambda_1}{\beta_1}, \quad y^* = \frac{S^{(0)} - \lambda_2}{\beta_1}.$$

利用与 4.5 节的竞争系统相似的相平面分析法可知，当 t 趋于无穷时，满足 $x_0 > 0$ 且 $y_0 > 0$ 的任意轨线 $\phi(t; (x_0, y_0))$ 趋于在 $(x^*, 0)$ 处的不动点.

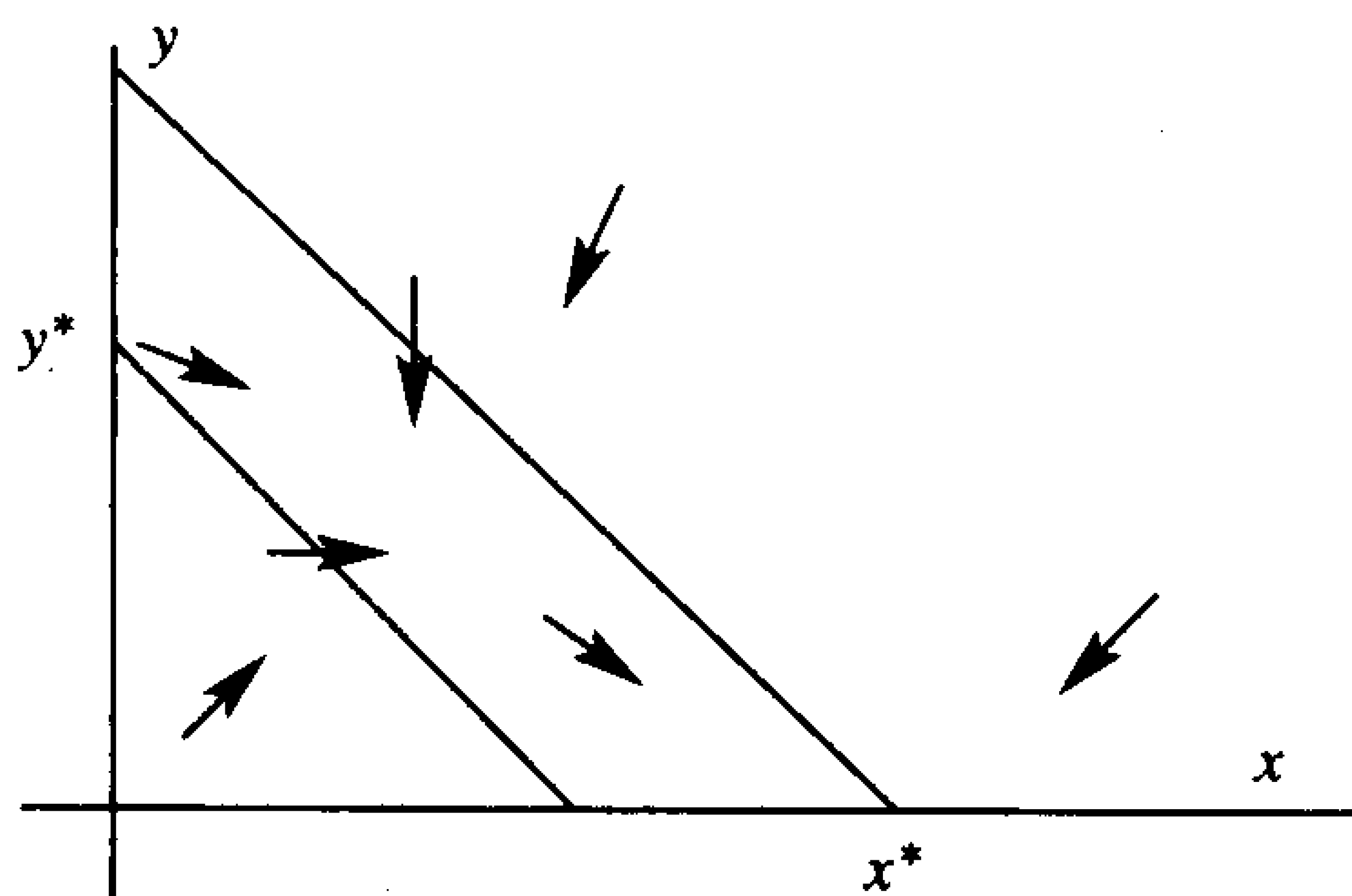


图 4.6.1 竞争恒化器模型的零倾线图

对竞争恒化器模型的进一步讨论请参阅 [**113**]，该书还研究食物链问题，此时设生物体 x 依赖于第一种营养物质 S，而第二种生物体 y 依赖于第一种生物体 x.

4.6.2 传染病模型

现在介绍一种传染病模型，其中易感染人群为 S，已被感染人群为 I，已复原人群为 R. 因变量可用于不同种群，模型称为传染病的 SIR 模型(SIR model of epidemics). 下面介绍易感染人群的生育速度恒为 μK 的模型(若总人口数为常数 K 的话，生育后代的速度就为 μ)假设每种种群的死亡率均为 $-\mu$，易感染人群被感染的感染率为 βSI，这与两种种群之间的交往成正比. 被感染人群复原量为 γI，在感染人群中被致命的疾病夺取生命的速度为 $-\alpha I$，整理后可得微分方程组

131

$$\dot{S} = \mu K - \beta SI - \mu S$$

$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I - \mu I - \alpha I$$
$$\dot{R} = \gamma I - \mu R.$$

注意到总人数的变化是

$$\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = \mu(K - S - I - R) - \alpha I.$$

因此，若去掉 $-\alpha I$ 项，总人数 K 保持不变.

因为前两个方程不含 R，所以可分别求解，然后利用它们去求 R. 令 $\delta = \alpha + \gamma + \mu$，则微分方程组化为

$$\dot{S} = \mu K - \beta SI - \mu S$$
$$\dot{I} = \beta SI - \delta I.$$

方程的零倾线是

$$I = \frac{\mu K}{\beta S} - \frac{\mu}{\beta}, \text{此时}\{\dot{S} = 0\} \quad \text{和}$$

$$S = \frac{\delta}{\beta} \text{ 或 } I = 0, \text{此时}\{\dot{I} = 0\}.$$

因此，不动点是

$$S = K, I = 0 \quad \text{和} \quad S^* = \frac{\delta}{\beta}, \quad I^* = \frac{\mu K}{\delta} - \frac{\mu}{\beta}.$$

当 $\beta K/\delta > 1$ 时 $I^* > 0$，而当 $\beta K/\delta < 1$ 时 $I^* < 0$.

为判定不动点的稳定性，考虑偏导数矩阵

$$\begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \delta \end{bmatrix}.$$

若 $\beta K/\delta < 1$，则仅有的具有非负坐标的不动点是 $S = K$ 和 $I = 0$，偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} -\mu & -\beta K \\ 0 & \beta K - \delta \end{bmatrix}.$$

它有负特征值 $-\mu$ 和 $\beta K - \delta$. 不难看出不动点会吸引所有满足 $S_0 \geqslant 0$ 且 $I_0 \geqslant 0$ 的轨线，参见图 4.6.2，因此疾病已消灭，即不再传染.

下面设 $\beta K/\delta > 1$，由 $\beta K - \delta > 0$ 可知不动点 $S = K$ 和 $I = 0$ 变为一个鞍点，所以在 (S^*, I^*) 处的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S^* \\ \beta I^* & 0 \end{bmatrix}.$$

该矩阵的迹 $-\beta I^* - \mu < 0$，行列式 $\beta^2 I^* S^* > 0$，因此该不动点是渐近稳定的，而且是稳定焦点或稳定结点. 由零倾线和向量场方向可知，初始值满足 $S_0 > 0$ 和 $I_0 > 0$ 的解都趋于不动点 (S^*, I^*)，因此传染病达到一种稳定的状态，参见图 4.6.3.

该系统是文献[**20**]（7.4 节）考虑的模型之一，对该模型及其他模型的详细讨论请参考[**20**].

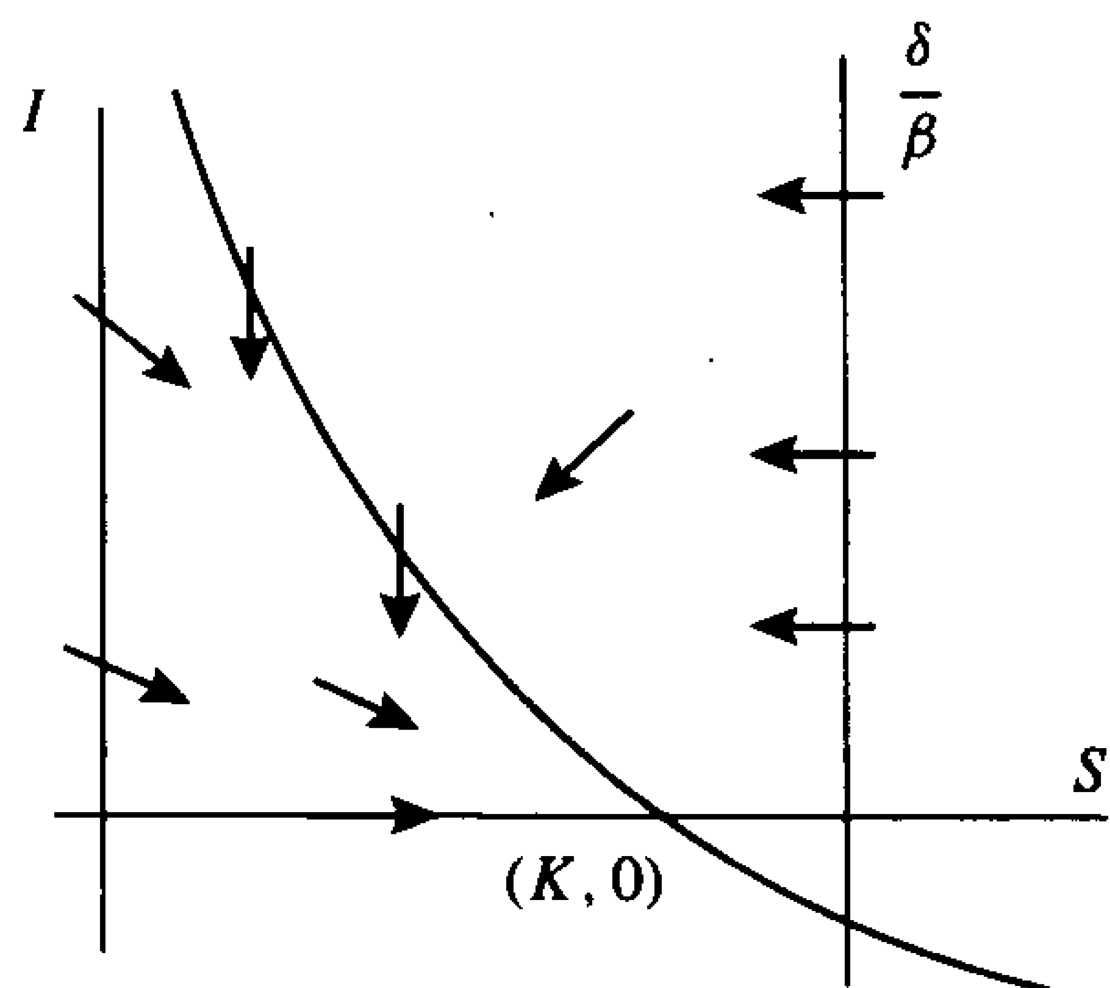


图 4.6.2　$\beta K/\delta<1$ 时传染病模型的零倾线图

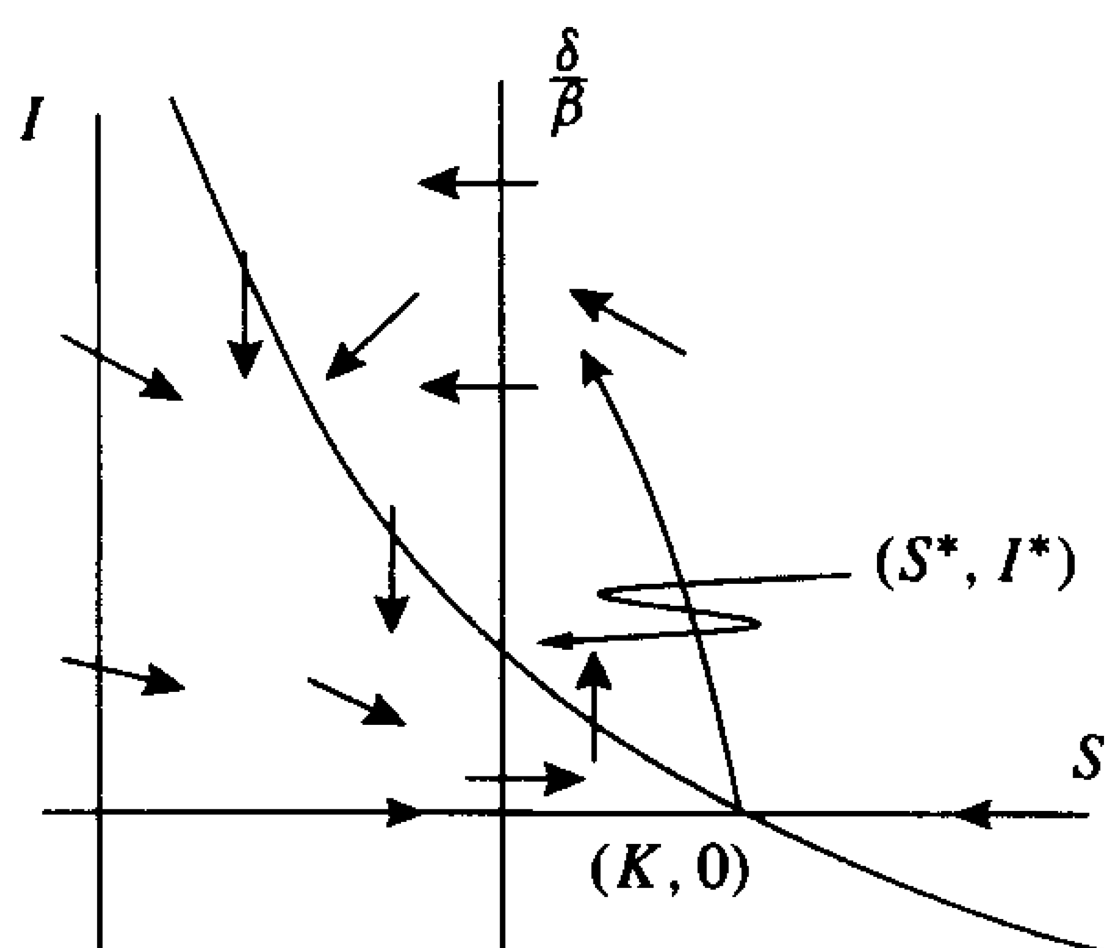


图 4.6.3　$\beta K/\delta>1$ 时传染病模型的零倾线

4.7　理论与证明

不动点的稳定性

这一节利用 2.5 节提出的矩阵标准型来证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征值都有负实部的话，则原点是指数吸引的. 首先看一个例子，它说明欧几里得范数并不总是严格递减的.

例 4.7.1　考虑常系数线性微分方程组

$$\dot{x}=-x-9y$$
$$\dot{y}=x-y.$$

其特征值是 $-1\pm3\mathrm{i}$，通解为

133

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix}\cos(3t)&-3\sin(3t)\\\frac{1}{3}\sin(3t)&\cos(3t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}.$$

欧几里得范数并不总是严格递减的，其导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)^{1/2}&=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2x\dot{x}+2y\dot{y})\\&=(x^2+y^2)^{-1/2}(-x^2-y^2-8xy).\end{aligned}$$

沿着直线 $y=-x$，导数大于 0 且范数递增，而沿直线 $y=x$ 的导数小于 0 且范数递减. 所以，欧几里得范数并不是单调趋于 0，而解的长度却是指数趋于 0 的：

$$\begin{aligned}\left\|\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}\right\|&\leqslant\mathrm{e}^{-t}\left\|\begin{bmatrix}\cos(3t)&-3\sin(3t)\\\frac{1}{3}\sin(3t)&\cos(3t)\end{bmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}\right\|\\&\leqslant3\mathrm{e}^{-t}\left\|\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}\right\|.\end{aligned}$$

这里利用了矩阵与向量的乘积的范数小于或等于矩阵的范数与向量长度的乘积. 附录 C 对矩阵的范数进行了简要介绍. 最后一个不等式中常数的准确值并不重要，因为矩阵中的元素是周期

的，所以范数有最大值，实际上可取这个最大值为 3，因此欧几里得范数以特征值 $-1\pm 3\mathrm{i}$ 的负实部确定的速度趋于 0，而系数则由特征向量确定. ■

下面的定理给出了一般性结果.

定理 4.7.2 考虑微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是实的 $n\times n$ 阶矩阵，则下面几个条件是等价的：

(i) 存在常数 $a>0$ 和 $C\geqslant 1$ 使得当 $t\geqslant 0$ 时，满足初始值 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 的解满足

$$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0\|\leqslant C\mathrm{e}^{-at}\|\boldsymbol{x}_0\|.$$

(ii) $\boldsymbol{A}$ 的特征值都具有负实部.

证明 首先由(i)证明(ii). 假设(ii)不正确，则有一个特征值 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 有非负实部 $\alpha\geqslant 0$.（若特征值为实数，则 $\beta=0$.）则必有下列形式的解：

$$\mathrm{e}^{\alpha t}(\sin(\beta t)\boldsymbol{u}+\cos(\beta t)\boldsymbol{w}).$$

由 $\alpha\geqslant 0$ 可知此解不可能趋于 0，这与(i)矛盾. 也就是说若(ii)不正确，则(i)也不正确，或者说若(i)正确，则(ii)也正确.

再由(ii)来证明(i). 设 $\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^n$ 是广义特征向量的基，它们的长度为 1（单位向量）. 令与之相应的特征值为 $\lambda_j=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j$，所以解 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}^j$ 包含与 t 有关的项，例如 $t^k\mathrm{e}^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$ 和 $t^k\mathrm{e}^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)$，其中 k 小于 $\boldsymbol{v}^j$ 的特征值的重数，所以 $0\leqslant k\leqslant n$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ 都满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<-a<0$，令 $\varepsilon>0$ 使得对于 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ 有 $\mathrm{Re}(\lambda)<-a-\varepsilon$. 根据解的形式可知存在 $C_j'\geqslant 1$ 使得

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}^j\|&\leqslant(1+t^n)\mathrm{e}^{\alpha_j t}C_j'\|\boldsymbol{v}^j\|\leqslant(1+t^n)\mathrm{e}^{-at-\varepsilon t}C_j'\|\boldsymbol{v}^j\|\\&\leqslant\mathrm{e}^{-at}(t^n\mathrm{e}^{-\varepsilon t})C_j'\|\boldsymbol{v}^j\|\leqslant\mathrm{e}^{-at}C_j\|\boldsymbol{v}^j\|,\end{aligned}$$

134

其中 $(t^n\mathrm{e}^{-\varepsilon t})C_j'\leqslant C_j$ 对所有的 $t\geqslant 0$ 都成立. 任意初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 均可写作 $\boldsymbol{v}^j$ 的组合：

$$\boldsymbol{x}_0=\sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{v}^j,$$

所以解为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0=\sum_{j=1}^n y_j\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}^j,$$

且

$$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\mathrm{e}^{-at}\sum_{j=1}^n|y_j|C_j\|\boldsymbol{v}^j\|.$$

令 $C'=\max\{C_j\}$，则有

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0\|&\leqslant\mathrm{e}^{-at}C'\sum_{j=1}^n|y_j|\cdot\|\boldsymbol{v}^j\|\leqslant\mathrm{e}^{-at}C'\sum_{j=1}^n|y_j|\\&\leqslant\mathrm{e}^{-at}C'n\max\{|y_j|:1\leqslant j\leqslant n\}\leqslant\mathrm{e}^{-at}C'n\sqrt{\sum_{j=1}^n|y_j|^2}.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{V}$ 是列为向量 $\boldsymbol{v}^j$ 的矩阵，$\boldsymbol{y}$ 是分量为 y_j 的向量，则

$$\boldsymbol{x}_0=\sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{v}^j=\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}$$

$$y = V^{-1}x_0 \quad 且$$

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2} \leqslant \|V^{-1}\| \cdot \|x_0\|.$$

结合上面的不等式可得

$$\|e^{At}x_0\| \leqslant e^{-at}C'n\|V^{-1}\| \cdot \|x_0\| = Ce^{-at}\|x_0\|,$$

其中 $C = C'n\|V^{-1}\|$. ■

一维微分方程

定理 4.2.2　考虑$\mathbb{R}$上的微分方程$\dot{x} = f(x)$，其中$f(x)$有连续导数. 设$x(t) = \phi(t; x_0)$是具有初始值x_0的解，并把含0的最大区间定义为(t^-, t^+).

(a)进一步假设当$0 \leqslant t < t^+$时，解$\phi(t; x_0)$是有界的(即存在常数$C > 0$使得对满足$0 \leqslant t < t^+$的所有t都有$|\phi(t; x_0)| \leqslant C$)，那么当$t$趋于$t^+$时，$\phi(t; x_0)$必收敛于一个不动点或是$f(x)$没有定义的点.

135

(b)同样，若当$t^- < t \leqslant 0$时解$\phi(t; x_0)$是有界的，则当t趋于t^-时$\phi(t; x_0)$必收敛于一个不动点或是$f(x)$没有定义的点.

(c)设对于$\mathbb{R}$中的所有x，$f(x)$都有定义. (i)若$f(x_0) > 0$，则假设存在不动点$x^* > x_0$，事实上可令x^*是比x_0大的最小不动点；(ii)若$f'(x_0) < 0$，则假设存在不动点$x^* < x_0$，事实上可令x^*是比x_0小的最大不动点. 则$t^+ = \infty$且当t趋于无穷时$\phi(t; x_0)$收敛于x^*.

证明　该定理指出当t趋于t^+或t^-时微分方程定义在实数集上的有界解趋于一个不动点或是趋于$f(x)$没有定义的点.

下面只给出(a)和(c)的证明，(b)的证明类似. 由解的唯一性可知，解不可能与满足$f(x) = 0$的点相交，因此$\phi(t; x_0)$必停留在$f(x)$定号的区域内. 设$f(\phi(t; x_0)) > 0$，则$\phi(t; x_0)$单调递增且有上界. 由实数的性质可知，当t趋于t^+(最大定义区间的右端点)时$\phi(t; x_0)$必收敛于一个极限值，设这一极限值为x_∞. 因为$\phi(t; x_0)$收敛于x_∞且$f(\phi(t; x_0)) > 0$，所以$f(x_\infty) \geqslant 0$或者是没有定义. 若$f(x_\infty) = 0$或者是没有定义，则已被证明. 若$f(x_\infty) > 0$，则当t从$-\delta$变化到δ时，$\phi(t; x_\infty)$也从$x_- = \phi(-\delta; x_\infty) < x_\infty$变化到$x_+ = (\delta; x_\infty) > x_\infty$. 但一定存在$t_1$使得$x_- < \phi(t_1; x_0) < x_\infty$，所以$x_\infty < x_+ = \phi(2\delta; x_-) < \phi(2\delta + t_1; x_0)$，因此从$x_0$出发的轨线经过$x_\infty$，这与$f(x_\infty) > 0$矛盾，得证. ■

下面引理的证明与上述证明过程非常相似.

引理 4.2.3　设$g(t)$对于所有的$t \geqslant 0$都有定义，且有界，$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) > 0$且$g'(t)$是一致连续的，则当$t$趋于无穷时，$g'(t)$趋于0且$g(t)$有极限.

证明　同样，当t趋于无穷时，$g(t)$必趋向于极限值g_∞. 因为它是递增的，所以对所有的$t \geqslant 0$都有$g(t) < g_\infty$. 又因为对于所有的t都有$g'(t) > 0$，所以$\liminf_{t \to \infty} g'(t) \geqslant 0$. 若$\limsup_{t \to \infty} g'(t) = L > 0$，则存在时间序列$t_n$使得$g'(t_n) \geqslant L/2$. 根据一致连续可知存在$\delta > 0$，使得当$t_n \leqslant t \leqslant t_n + \delta$时，$g'(t) \geqslant L/4$，从而$g(t_n + \delta) \geqslant g(t_n) + \delta L/4$. 又对足够大的$n$有$g(t_n) \geqslant g_\infty - \delta L/8$，所以

$$g(t_n+\delta) \geqslant g(t_n) + \delta L/4 \geqslant g_\infty - \delta L/8 + \delta L/4 = g_\infty + \delta L/8 > g_\infty.$$

这与对所有的 $t \geqslant 0$ 都有 $g(t) < g_\infty$ 矛盾. ■

定理 4.2.4　考虑微分方程 $\dot{x}=f(x)$ 的不动点 x^*，其中 f 和 f' 都是连续的.

(a) 若 $f'(x^*)<0$，则不动点 x^* 是吸引的.

(b) 若 $f'(x^*)>0$，则不动点 x^* 是排斥的.

(c) 若 $f'(x^*)=0$，则该导数不能确定稳定性类型.

证明　(a) 若 $f'(x^*)<0$，则存在包含 x^* 的区间 $(x^*-\delta,\ x^*+\delta)$，使得对该区间内的所有 x 都有 $f'(x)<0$，则对满足 $x^*-\delta<x<x^*+\delta$ 的任意 x 以及 x^* 与 x 之间的某一 z_x 有 $f(x)=f(x^*)+f'(z_x)x=f'(z_x)x$. 因此当 $x^*-\delta<x<x^*$ 时 $f(x)>0$，而当 $x^*<x<x^*+\delta$ 时 $f(x)>0$.

取满足 $x^*-\delta<x_0<x^*$ 的初始值 x_0，由 $f(x)>0$ 可知解 $\phi(t;\ x_0)$ 是递增的. 由 3.1 节提出的唯一性可知，解不可能与 x^* 点相交，因此必在区间 $(x^*-\delta,\ x^*)$ 内，其中 $f'(x)>0$. 因此解必是递增的且收敛于 x^*. 这表明 x^* 从左边吸引；类似可证其从右边吸引，所以它是一个吸引不动点.　136

(b) $f'(x^*)>0$ 的情形与前面的证明相似，留给读者自己证明.

(c) 4.2 节的例题表明：若 $f'(x^*)=0$，则不动点可能是吸引的、排斥的或从一侧吸引或者是其他情形，因此其导数不能确定稳定性类型.

不动点的线性化稳定性

下面证明所有特征值都有负实部的不动点是渐近稳定的. ■

定理 4.4.3a　令 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的不动点，其中 $\boldsymbol{F}$ 是 C^2（实际上 $\boldsymbol{F}$ 是 C^1 时该定理也成立，但证明中用到 C^2）. 设 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 所有特征值的实部都为负数，那么 $\boldsymbol{x}^*$ 是渐近稳定的.

证明　考虑 $\boldsymbol{F}$ 在不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 处的泰勒展开式，令 $\boldsymbol{A}=D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$，取变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*$，由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)=0$ 可知

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_s + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),$$

其中，当 $\|\boldsymbol{y}\| \leqslant \delta_0$ 时，$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\| \leqslant \boldsymbol{M}\|\boldsymbol{y}\|^2$，沿着解 $\boldsymbol{y}(t)$ 考虑

$$\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t)),$$

可得依赖于时间的线性方程：

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}(t),$$

它有解

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{G}(s)\,\mathrm{d}s.$$

对于矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 有标量 $K \geqslant 1$ 使得 $\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\| \leqslant \boldsymbol{K}\mathrm{e}^{-\alpha t}$，所以

$$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\| \cdot \|y\| \leqslant K\mathrm{e}^{-\alpha t}\|\boldsymbol{y}\|.$$

若 $\|\boldsymbol{y}\|$ 足够小，则 $\boldsymbol{M}\|\boldsymbol{y}\|^2 \leqslant m\|\boldsymbol{y}\|$，其中 m 适当小. 所以

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \leqslant K\mathrm{e}^{-\alpha t}\|\boldsymbol{y}_0\| + \int_0^t K\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\boldsymbol{M}\|\boldsymbol{y}(s)\|^2\mathrm{d}s$$

$$\leq K\mathrm{e}^{-\alpha t}\|\boldsymbol{y}_0\| + \int_0^t K\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} m\|\boldsymbol{y}(s)\|\mathrm{d}s,$$

上式两端分别乘以 $\mathrm{e}^{\alpha t}$ 可得

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\|\boldsymbol{y}(t)\| \leq K\|\boldsymbol{y}_0\| + \int_0^t mK\mathrm{e}^{\alpha s}\|\boldsymbol{y}(s)\|\mathrm{d}s.$$

考虑 $\phi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\|\boldsymbol{y}(t)\|$，可得满足 $\phi(0) = K\|\boldsymbol{y}_0\|$ 的微分不等式 $\phi'(t) \leq mK\phi(t)$，所以 $\phi(t) \leq \phi(0)\mathrm{e}^{mKt} = K\|\boldsymbol{y}_0\|\mathrm{e}^{mKt}$. 事实上，这可由格朗沃尔不等式证明，因此

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\|\boldsymbol{y}(t)\| \leq K\|\boldsymbol{y}_0\|\mathrm{e}^{mKt} \quad 和$$

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \leq K\|\boldsymbol{y}_0\|\mathrm{e}^{(mK-\alpha)t}.$$

若 $\|\boldsymbol{y}_0\| \leq \delta_0/K$ 足够小且 m 也足够小使得 $mK-\alpha<0$，则

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \leq K\|\boldsymbol{y}_0\|\mathrm{e}^{(mK-\alpha)t} \leq K\|\boldsymbol{y}_0\| \leq \delta_0,$$

137 且 $\|\boldsymbol{y}(t)\|$ 指数趋于0. 容易看出它是 L 稳定的，因为对于任意的 $\varepsilon>0$，若

$$\|\boldsymbol{y}_0\| \leq \delta = \min\{\varepsilon/K, \delta_0/K\},$$

则对所有的 $t\geq 0$，解的模都小于 ε 和 δ_0. ■

以前曾提到鞍点有不稳定流形；证明略，具体可见[87]. 下面的定理断言鞍点是不稳定的.

定理 4.7.3 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是平面微分方程组的鞍不动点，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是不稳定的.

注 4.7.4 对于不稳定的不动点的相似结论也成立，留作练习. 这一结论对任意维的情形也成立，为使符号和细节简单，下面只给出含两个变量的情形.

证明 将变量 $\boldsymbol{x}$ 换为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*$，可设原点是不动点，二维微分方程的鞍不动点有实特征值. 也可利用特征向量进行坐标变换把方程化为如下形式：

$$\dot{x} = ax + R(x,y)$$
$$\dot{y} = -by + S(x,y),$$

其中 a, $b>0$. 令 $m=\min\{a, b\}$，再设 $R(x, y)$ 和 $S(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的偏导数是0，即包含二次或更高次的项，所以可找到常数 $C>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $\|(x, y)\| \leq \delta$ 时，

$$|R(x,y)| + |S(x,y)| \leq C(x^2+y^2).$$

为证明轨线是远离不动点的，利用检验函数

$$L(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}.$$

若 $L(x, y)\geq 0$（即 $|y|\leq|x|$）且 $\|(x, y)\| \leq \delta$，则当 $|x| \leq m/(2C)$ 时，

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= x\dot{x} - y\dot{y} = x(ax + R(x,y)) - (-by + S(x,y)) \\
&= ax^2 + by^2 + xR(x,y) - yS(x,y) \\
&\geq m(x^2+y^2) - |x||R(x,y)| - |y||S(x,y)| \\
&\geq m(x^2+y^2) - |x|(|R(x,y)| + |S(x,y)|) \\
&\geq m(x^2+y^2) - |x|C(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

$$= (m - C|x|)(x^2 + y^2) \geqslant \frac{m}{2}(x^2 + y^2) > 0.$$

由导数为正可知，轨线 $\phi(t;(x_0, y_0))$ 停留在满足 $L(x, y) \geqslant 0$ 的区域内，除非 $|x(t)| = m/(2C)$ 或 $\|\phi(t;(x_0, y_0))\| = \delta$，因此可在不动点附近找到初始值，使得从其出发的轨线与不动点的距离至少为 $\min\{\delta, m/(2C)\}$，这说明不动点是不稳定的. ■

138

相图的共轭

在很大程度上，不动点处的线性化方程确定了不动点的相图. 如果有坐标变换把一个系统的轨线转化为另一个系统的轨线且保持时间不变，则这两个微分方程组就是共轭的. 有时，坐标变换只是保持轨线的指向，并不是保持时间不变，具有这种关系的两个系统称为是拓扑等价的. 本节给出更精确的定义，特别需要明确坐标变换有多少阶导数. 定理的证明超出了本书的范围，这里仅给出定理叙述并提供参考书目供读者查阅.

定义 4.7.5　对整数 $r \geqslant 1$，如果 $\boldsymbol{F}$ 是连续的且有直到 r 阶的连续偏导数，则非线性微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 是 C^r 的. 如果对所有阶的偏导数都存在(即对于所有的 r，$\boldsymbol{F}$ 都是 C^r 的)，则称 $\boldsymbol{F}$ 是 C^∞ 的.

定义 4.7.6　令 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的两个开集. 从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的同胚(homeomorphism) $\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 上的连续映射，其中 $\boldsymbol{h}$ 有从 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{U}$ 的连续逆映射 $\boldsymbol{k}$(即 $\boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{U}$ 上的恒等映射，$\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{k}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 上的恒等映射). 所以说 $\boldsymbol{h}$ 是一一对应的(即若 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2)$，则 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$).

对整数 $r \geqslant 1$，若从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的同胚 $\boldsymbol{h}$ 和它的逆 $\boldsymbol{k}$ 均有直到 r 阶的连续偏导数，则称 $\boldsymbol{h}$ 为 C^r 微分同胚(diffemorphism). 可证对所有点 $\boldsymbol{x}$，$\det(D\boldsymbol{h}_{(\boldsymbol{x})}) \neq 0$.

同胚(微分同胚)可看作是连续(可微的)的坐标变换.

定义 4.7.7　称两个流 $\phi(t;\cdot)$ 和 $\psi(t;\cdot)$ 在开集 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 上是拓扑共轭的(topologically conjugate)，如果存在从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的同胚 $\boldsymbol{h}$ 使得

$$\boldsymbol{h} \circ \phi(t;\boldsymbol{x}_0) = \psi(t;\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0)).$$

这样的映射 $\boldsymbol{h}$ 是连续坐标变换.

称两个流 $\phi(t;\cdot)$ 和 $\psi(t;\cdot)$ 是拓扑等价的(topologically equivalent)，如果存在从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的同胚 $\boldsymbol{h}$ 将 $\phi(t;\cdot)$ 的轨线变为 $\psi(t;\cdot)$ 轨线，并对时间 t 保持轨线的指向不变，但不必是相同的时间.

对整数 $r \geqslant 1$，若有从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的 C^r 微分同胚 $\boldsymbol{h}$ 使得

$$\boldsymbol{h} \circ \phi(t;\boldsymbol{x}_0) = \psi(t;\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0)).$$

那么称这些流在开集 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 上是 C^r 共轭的(C^rconjugate). 这样的映射 $\boldsymbol{h}$ 是可微坐标变换.

若有从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的 C^r 微分同胚 $\boldsymbol{h}$ 将系统内 $\phi(t;\cdot)$ 的轨线变为 $\psi(t;\cdot)$ 的轨线，并对时间 t 保持轨线的指向不变，那么称这两个流在开集 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 上是 C^r 等价的(C^requivalent).

很快就要叙述的称为 Grobman-Hartman 定理的一个一般定理指出：具有双曲不动点的非线性系统与它的线性化流是拓扑共轭的. 遗憾的是拓扑共轭并未告诉我们多少相图的特征. 原点是渐近稳定的任何两个同维线性系统在 $\mathbb{R}^n$ 上都是拓扑共轭的，见书[**87**]. 特别是，原点是稳定焦点的线性系统与原点是稳定结点的线性系统是拓扑共轭的. 因此，一个连续的坐标变换并

不能保持轨线以螺旋式或非螺旋式趋于不动点，但是可微的坐标变换却可以保持这些特征，但遗憾的是，可微坐标变换的存在性定理需要更多的假设条件.

139

下面叙述这些结果.

定理 4.7.8(Grobman-Hartman)　令$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$是$C^1$非线性微分方程，有双曲不动点$\boldsymbol{x}^*$和流$\phi(t;\ \cdot)$. 令其偏导数矩阵为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{DF}_{(\boldsymbol{x}^*)}$，而$\psi(t;\ \boldsymbol{x}_0)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$是不动点在原点的线性化系统的流，那么存在包含$\boldsymbol{x}^*$的开集$\boldsymbol{U}$和包含原点的开集$\boldsymbol{V}$使得$\boldsymbol{U}$上的流$\phi(t;\ \cdot)$与$\boldsymbol{V}$上的流$\psi(t;\ \cdot)$拓扑共轭.

该定理的证明难度较大，这里略去，具体证明过程可参阅[**87**].

为得到一个可微坐标变换，需要考虑一些特殊情况或增加更多的前提条件. Sternberg 在更多导数的情况下给出了一个结果，但前提是特征值满足“非共振”(nonresonance)条件.

定理 4.7.9(Sternberg)　令$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$是$C^\infty$的微分方程组，有双曲不动点$\boldsymbol{x}^*$和流$\phi(t;\ \cdot)$，令$\lambda_1$，…，$\lambda_n$是其在不动点处的特征值，设每个特征值$\lambda_j$的重数为1，并对任意的$k$和满足$\sum_j m_j\geqslant 2$的任意非负整数$m_j$有

$$m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\cdots+m_n\lambda_n\neq\lambda_k$$

(上式称为特征值的非共振条件). 则存在含$\boldsymbol{x}^*$的开集$\boldsymbol{U}$和含原点的开集$\boldsymbol{V}$使得$\boldsymbol{U}$上的流$\phi(t;\ \cdot)$与$\boldsymbol{V}$上线性化系统的流是C^∞共轭的.

该定理的证明比 Grobman-Hartman 定理的证明还要困难，详见[**49**]. 该定理也需要特征值的非共振条件. 下面两个定理给出了没有特征值非共振条件时C^1共轭的结果.

定理 4.7.10(Hartman)　令$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$是$C^2$的非线性微分方程组，有渐近稳定不动点$\boldsymbol{x}^*$和流$\phi(t;\ \cdot)$，则存在含$\boldsymbol{x}^*$的开集$\boldsymbol{U}$和含原点的开集$\boldsymbol{V}$使得$\boldsymbol{U}$上的流$\phi(t;\ \cdot)$与$\boldsymbol{V}$上线性化系统的流是$C^1$共轭的.

定理 4.7.11(Belickii)　令$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$是$C^2$的微分方程组，有双曲不动点$\boldsymbol{x}^*$和流$\phi(t;\ \cdot)$，设任意三个特征值满足$\lambda_k\neq\lambda_i+\lambda_j$，则存在含$\boldsymbol{x}^*$的开集$\boldsymbol{U}$和含原点的开集$\boldsymbol{V}$使得$\boldsymbol{U}$上的流$\phi(t;\ \cdot)$与$\boldsymbol{V}$上线性化系统的流是$C^1$共轭的.

参见[**13**].

练习

4.1　不动点的稳定性

4.1.1　对下面的矩阵$\boldsymbol{A}$，对线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的稳定性进行分类，包括渐近稳定、$L$稳定(但不是渐近稳定)、或不稳定：

(a)$\begin{bmatrix}-6&-3\\2&-1\end{bmatrix}$　(b)$\begin{bmatrix}5&-5\\2&-1\end{bmatrix}$　(c)$\begin{bmatrix}1&5\\-2&-1\end{bmatrix}$　(d)$\begin{bmatrix}1&-2\\8&-7\end{bmatrix}$

140

4.1.2　指出上题中每个系统是否有稳定结点、退化稳定结点等.

4.1.3　设矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值都有负实部，且$\boldsymbol{B}(t)$是依赖于时间t并满足$\|\boldsymbol{B}(t)\|\leqslant\delta$的矩阵. 证明：如果$\delta>0$足够小，则当$t$趋于无穷时$\dot{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(t)]\boldsymbol{x}$的所有解都趋于0. 提示：利用定理 4.7.2 和引理 3.3.4 中的格朗沃尔不等式.

4.2 一维微分方程

4.2.1 考虑微分方程

$$\dot{x} = x^2 - 9.$$

a. 指出每一不动点的稳定性类型.

b. 在实轴上绘出相图.

c. 取几个代表性的初始值 x_0，绘出(t, x)平面内 $x(t) = \phi(t;\ x_0)$的曲线图.

4.2.2 考虑微分方程

$$\dot{x} = x(x-1)(2-x) = -x^3 + 3x^2 - 2x.$$

a. 指出每个不动点的稳定性类型.

b. 在实轴上绘出相图.

c. 取几个代表性的初始值 x_0，绘出在(t, x)空间内的 $x(t) = \phi(t;\ x_0)$的曲线图. 叙述什么样的初始值的解收敛于哪个不动点.

4.2.3 考虑微分方程

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - H,$$

其中 $x \geqslant 0$，它是由逻辑斯谛方程和单位时间内捕获鱼的数量 H 所决定的一个鱼群模型. 最后一个因素常被称为*捕获量*(harvesting)，在这一方程里，捕获量被称为*固定速率或固定产量*(constant rate or constant yield)，原因是捕获鱼的数量并不依赖于鱼群的当前总量 $x(t)$. 这里的参数 r，K 和 H 都为正数.

a. 设 $H < rK/4$，在实轴上绘出相图.

b. 若 $H < rK/4$，则鱼群的初始总量应在什么水平才不会死光？(若鱼群的总量为负，那么鱼群早已死光，这个系统中也就不再有鱼.)

c. 设 $H > rK/4$，随着时间 t 的增加鱼群会发生些什么情况？

4.2.4 考虑微分方程

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex,$$

其中 $x \geqslant 0$，它是由逻辑斯谛方程和单位时间内捕获鱼的数量 Ex 决定的一个鱼群模型，它依赖当时鱼群的数量. 这种收获量常被称为*恒定成果*(constant effort)，原因是捕获的鱼的数量与鱼群的总量成比例而且如果是相同的成果该方程是有现实意义的. 这里的参数 r，K 和 E 都为正数且满足 $E < r$.

a. 在实轴上绘出相图.

b. 长期行为中的捕获量对于现存鱼的稳定状态有什么影响？

4.2.5 考虑恰有 7 个不动点的微分方程 $\dot{x} = f(x)$(通常 $f(x)$是 C^1 函数).

a. 给出这样一个方程.

b. 稳定不动点可能有几个？对各种可能的情况画出相应函数 $f(x)$的草图；简要解释为什么不可能是其他数目呢？(记住一共只有 7 个不动点.)

4.2.6 考虑微分方程 $\dot{\theta} = \sin(\theta)$，其中 θ 是模 2π 的角变量，在线上和圆上画出其相图.

4.2.7 比较微分方程 $\dot{x} = -x^3$ 与线性方程 $\dot{x} = -x$ 收敛到不动点的解的收敛速度. 定性相图是相同的但收敛速度并不同. (可用解的解析式表达式或电脑模拟对解作为 t 函数的相图进行比较.)

4.3 二维微分方程和零倾线

4.3.1 考虑微分方程组

$$\dot{x} = x^2 - y$$

$$\dot{y} = x - y.$$

a. 求不动点.

b. 确定零倾线以及$\dot{x}$和$\dot{y}$在平面不同区域内的符号.

c. 利用(a)和(b)的结论，绘出大致相图；解释为什么；尤其确保该相图中包括压缩和膨胀方向以及不动点压缩最强的方向.

d. 利用电脑，取多个初始值绘出方向场和轨线图，充分显示相图的重要特点.

4.3.2　考虑微分方程组

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = xy - 1.$$

a. 求不动点.

b. 确定零倾线以及$\dot{x}$和$\dot{y}$在平面不同区域内的符号.

c. 利用(a)和(b)的结论，绘出大致相图；解释为什么；尤其确保该相图中包括压缩和膨胀方向以及不动点压缩最强的方向.

d. 利用电脑，取多个初始值绘出方向场和轨线图，充分显示相图的重要特点.

4.4　不动点的线性化稳定性

4.4.1　考虑微分方程组

$$\dot{x} = -x - y + 4$$
$$\dot{y} = 3 - xy.$$

a. 求不动点.

b. 确定在每个不动点处线性化系统的类型(鞍点、稳定焦点等).

[142]

c. 求零倾线，并确定零倾线上以及由零倾线所划分各区域中的$\dot{x}$和$\dot{y}$的符号.

d. 利用(a)～(c)的结论，绘出该系统的相图，并解释理由.

e. 利用电脑程序绘出系统具代表性初始条件的相图，多取一些初始值以反映系统的重要特征.

4.4.2　考虑微分方程组

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = xy - 1.$$

a. 求(两个)不动点.

b. 确定每个不动点处线性化系统的类型(鞍点、稳定焦点等).

c. 确定零倾线，并确定零倾线上以及由零倾线所划分各区域中$\dot{x}$和$\dot{y}$的符号.

d. 利用(a)～(c)的结论绘出系统的相图，并解释理由.

4.4.3　考虑阻尼振动方程$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \sin(\theta) = 0$，其中$c > 0$. 找出相应一阶微分方程的不动点，并进行分类.

4.4.4　考虑微分方程组

$$\dot{x} = -2x + y$$
$$\dot{y} = 4 - 2xy.$$

a. 求不动点.

b. 确定在每个不动点处线性化系统的类型(鞍点、稳定焦点等).

c. 确定零倾线，并确定零倾线上以及由零倾线所划分的各区域中的$\dot{x}$和$\dot{y}$的符号.

d. 利用(a)～(c)的结论绘出该系统的相图，并解释理由.

4.4.5　考虑微分方程组

$$\dot{x} = -\frac{x}{2} + y$$
$$\dot{y} = 1 - y^2.$$

a. 确定不动点以及每个不动点处的线性化类型(鞍点、稳定焦点等).

b. 确定零倾线.

c. 利用(a)和(b)的结论绘出该系统的相图，并解释理由.

4.4.6 考虑微分方程组

$$\dot{x} = xy$$
$$\dot{y} = 1 - y - (1 + y)x.$$

a. 确定不动点以及每个不动点处的线性化类型(鞍点、稳定焦点等).

b. 确定零倾线.

c. 利用(a)和(b)的结论绘出该系统的相图，并解释理由.

143

4.4.7 考虑微分方程组

$$\dot{x} = (x - 1)(y - 1)$$
$$\dot{y} = 3 - xy,$$

它在(1，3)和(3，1)处有不动点.

a. 确定每个不动点处的线性化方程的类型(鞍点、稳定节点等).

b. 确定零倾线，并确定零倾线上以及由零倾线所划分的各区域中$\dot{x}$和$\dot{y}$的符号.

c. 利用(a)和(b)的结论绘出该系统的相图，并解释你所画出的相图.

4.4.8 考虑微分方程组

$$\dot{x} = x^2 - y - 1$$
$$\dot{y} = y - y(x - 2).$$

a. 证明有三个不动点并对其进行分类.

b. 证明没有闭轨道(看经过两个不动点的三条直线上沿向量场的方向).

c. 画出该系统的相图.

4.4.9 考虑微分方程组

$$\dot{x} = x - y + x^2 - xy$$
$$\dot{y} = -y + x^2.$$

a. 证明有三个不动点并对其进行分类.

b. 用零倾线以及(a)中的结论画出系统的相图.

4.4.10 找出微分方程组：

$$\dot{x} = v,$$
$$\dot{v} = -x + \omega x^3,$$
$$\dot{\omega} = -\omega$$

的不动点，并对其进行分类.

4.4.11 找出洛伦兹方程：

$$\dot{x} = -10x + 10y,$$
$$\dot{y} = 28x - y - xz,$$
$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy$$

的不动点，并对其进行分类.

4.4.12 证明平面上微分方程组的不动点源是不稳定的. 提示：与定理4.7.3进行比较.

4.5 竞争种群

4.5.1 考虑一对竞争种群的微分方程组

$$\dot{x} = x(K - x - ay)$$
$$\dot{y} = y(L - bx - y).$$

设 $K > L/b$ 且 $K/a > L$.

a. 找出满足 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 的不动点，并确定每个不动点处的线性化方程的类型(稳定结点、稳定焦点、鞍点和不稳定结点等).

144

b. 绘出 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 时的相图，并画出零倾线.

c. 过 $x_0 > 0$，$y_0 > 0$ 的大多数解都趋于不动点吗？趋于哪个不动点？

4.5.2 考虑一对竞争种群的微分方程组，即

$$\dot{x} = x(K - ay)$$
$$\dot{y} = y(L - bx).$$

其中每一种群的生长都没有限制.

a. 找出满足 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 的不动点，并确定在每个不动点处的线性化方程的类型(稳定结点、稳定焦点、鞍点和不稳定结点等).

b. 绘出 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 时的相图及零倾线.

4.5.3 考虑对彼此的发展有积极影响的两种群，即微分方程组

$$\dot{x} = x(K + ay - cx)$$
$$\dot{y} = y(L + bx - ey),$$

其中所有的参数均为正，即 K，a，c，L，b，$e > 0$，并设 $c/a > b/e$.

a. 证明存在满足 $x^* > 0$ 且 $y^* > 0$ 的不动点(x^*, y^*).

b. 证明(a)中的不动点(x^*, y^*)是渐近稳定的. 提示：证明偏导数矩阵的迹 $\tau < 0$ 而行列式 $\Delta = (ce - ab)x^* y^* > 0$.

c. 画出 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 时的相图及零倾线. 对(x^*, y^*)的吸引域以及其他不动点的稳定和不稳定流形进行讨论.

4.5.4 考虑微分方程组

$$\dot{x} = x(3 - x - y)$$
$$\dot{y} = y(2 - x - y).$$

a. 求不动点并对其进行分类.

b. 利用零倾线和不动点的稳定性画出相图草图，并标明任一吸引不动点的吸引域.

4.6 应用

4.6.1 考虑接种疫苗人群的SIR模型：

$$\dot{S} = (1 - p)\mu K - \beta SI - \mu S$$
$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I - \mu I$$
$$\dot{V} = p\mu K + \gamma I - \mu V.$$

其中人口总数 V 包括(i)已复原具有免疫力的人群，(ii)已接种具有免疫力的人群. 满足 $0 < p < 1$ 的参数 p 是出生后马上进行了接种的人群所占的比例.

a. 证明$\frac{d}{dt}(S+I+V)=\mu(K-S-I-V)$且总人口衰减至$S+I+V=K$. 此外，为什么可以先考虑$(S, I)$的微分方程，然后求$V(t)$? 进一步考虑对两个变量$(S, I)$的微分方程.

b. 找出(对(S, I)的微分方程)满足$I^* \neq 0$的两个不动点：$(\bar{S}, \bar{I})=(\bar{S}, 0)$和$(S^*, I^*)$；参数值为何值时$I^*>0$?

c. 求偏导数矩阵.

145

d. 求不动点$(\bar{S}, 0)$处的偏导数矩阵，参数为何值时该不动点是渐近稳定的?

e. 求不动点(S^*, I^*)处的偏导数矩阵，迹和行列式? 参数为何值时该不动点是渐近稳定的?

4.6.2 对于传染病模型，令x和y分别表示健康人群和生病人群，假设微分方程组是

$$\dot{x} = -kxy$$

$$\dot{y} = kxy - ly,$$

其中k和l均为正.

a. 找出所有的不动点并对其进行分类.

b. 画出零倾线以及由零倾线所划分有界区域内向量场的方向.

c. 求第一象限内使传染病加重的点集(即，使$dy/dt>0$的点).

d. 用方程的商表示dy/dx；然后通过分离变量法求x和y的一个函数使其是系统的保守函数.

e. 绘出相图.

146

第5章　相图的函数分析方法

这一章继续讨论非线性微分方程组的相图，上一章中的系统可以利用零倾线和不动点处的线性化方程进行分析，而本章中的系统将利用一个实值函数或"能量函数"来分析. 5.1 节讨论关于两个种群的捕食者–食饵模型，这是对 Lotka-Volterra 方程的继续研究，本节讨论模型中一个种群对另一个种群的增长有正面的影响. 5.2 节讨论非线性振子，例如单摆，我们可以利用能量来分析它的相平面，当考虑摩擦时，系统的能量将减少，此时的能量就是我们所定义的李雅普诺夫函数的一个实例. 李雅普诺夫函数可以用于确定某类系统中使得轨线趋向于不动点的初始值的集合. 5.4 节引入了极限集的思想，在此之前我们曾经用它来讨论微分方程的长期行为或最终行为，为了利用极限集的性质证明常用的李雅普诺夫函数定理，本节给出了更加精确的极限集的概念，这些概念在第一部分的其他章节还将使用，下一章将用它来证明庞加莱–本迪克松周期轨道定理，第 7 章用它来定义混沌吸引子. 本章最后考察了由函数 G 的梯度所确定的系统，因为除不动点外函数 G 沿着系统的轨线严格递减，所以这类系统的任意有界轨线都趋向于不动点.

5.1　捕食者–食饵系统

4.5 节已经介绍了 Lotka-Volterra 方程，但主要考虑的是两个互相竞争的种群的情形. 在本节讨论的两个种群中，第一个种群的数量对第二个种群的数量有正面影响，第二个种群的数量对第一个种群的数量有负面影响，这种模型称为是*捕食者–食饵系统*(predator-prey system). 该类系统最简单的情形由以下方程给出：

147

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - by)\\ \dot{y} &= y(-c + ex),\end{aligned}$$

其中参数均为正数，即 a, b, c, $e>0$，x 表示食饵种群的数量，y 表示捕食者种群的数量，此处不考虑各种群的增长极限及种群数量对自身增长率的影响. 当周围没有捕食者时，食饵增长率为 a，当捕食者数量增加时，x 的增长率关于 y 线性减小；当周围没有食饵时，捕食者种群数量的增长率为 $-c$，当食饵数量增长时，y 的数量关于 x 线性增加.

此方程有两个不动点(0, 0)和$(c/e,\ a/b)$，可以通过分析被零倾线划分的区域中$\dot{x}$和$\dot{y}$的符号来确定闭轨或周期轨线的存在性. 在$(c/e,\ a/b)$处的偏导数矩阵为

$$\begin{bmatrix} a-by & -bx \\ ey & ex-c \end{bmatrix}_{x=c/e,\,y=a/b} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{bc}{e} \\ \dfrac{ae}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

该矩阵的特征方程是 $\lambda^2 + ac = 0$，对应的特征值 $\pm \mathrm{i}\sqrt{ac}$是两个纯虚数，因此$(c/e,\ a/b)$是线性化系统的椭圆形中心.

对于上述非线性系统，可以通过绕不动点运动一圈的方式来证明其轨道是封闭的，显然

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y(-c+ex)}{x(a-by)},$$

因此分离变量，得到

$$\left(\frac{a}{y}-b\right)\dot{y}=\left(-\frac{c}{x}+e\right)\dot{x}.$$

然后等式两边关于 t 进行积分，则有

$$K+a\ln(y)-by=-c\ln(x)+ex,\text{或}$$
$$K=(ex-c\ln(x))+(by-a\ln(y)),$$

其中 K 是任意常数. 从上式可以看出 K 是一个守恒量，可被看作是相平面中 x 和 y 的函数，这个函数可表示成 x 的函数和 y 的函数

$$f(x)=ex-c\ln(x)\text{ 与}$$
$$g(y)=by-a\ln(y)$$

的和. 进一步分析函数 f，可以看出

$$f'(x)=e-\frac{c}{x}\quad\text{与}\quad f''(x)=\frac{c}{x^2}>0.$$

因此 f 的图像是凸的，且在 c/e 处有唯一极小值，参见图 5.1.1. 同理，$g(y)$ 的图像也是凸的，且在 a/b 处有唯一极小值. 这表明从直线 $y=a/b$ 上出发的轨线绕不动点一周后必在某时刻 t_1 回到该直线，此时 $f(x)$ 的值必与它离开直线时的值相同. 故有 $x(t_1)=x(0)$，$y(t_1)=y(0)=a/b$，因此所有这些解都是周期的，而且不动点不仅是一个线性中心，还是一个被周期解环绕的非线性中心.

因为函数 $f(x)+g(y)$ 沿着轨线是常数，即该函数的每个等位线集对应于方程组的一条轨线，所以只要分析清楚第一象限中 $f(x)+g(y)$ 的等位曲线集就能更详细、更彻底地了解系统的相图. $f(x)+g(y)$ 的最小值是 $K_0=f(c/e)+g(a/b)$，此时等位线 $f(x)+g(y)=K_0$ 对应于不动点 $(c/e,\ a/b)$；当 $K<K_0$ 时，等位曲线 $f(x)+g(y)=K$ 是空集；当 $K>K_0$ 时，令 $K'=K-K_0$，对给定的 x，此时需要通过等式 148

$$g(y)-g(a/b)=K'-(f(x)-f(c/e))$$

求出 y 的值. 若 x 满足 $f(x)-f(c/e)>K'$，则等式右端为负，从而 y 无解；若 $f(x)-f(c/e)=K'$，则 x 有两个解 x_1，x_2，对每个 x_j 等式右端为零，此时只有解 $y=a/b$；若 $x_1<x<x_2$，则等式右端为正，此时 y 有两个解，其中一个比 a/b 大，一个比 a/b 小，因此等位线 $f(x)+g(y)=K>f(c/e)+g(a/b)$ 是环绕不动点的闭曲线，参照图 5.1.2 中的轨线.

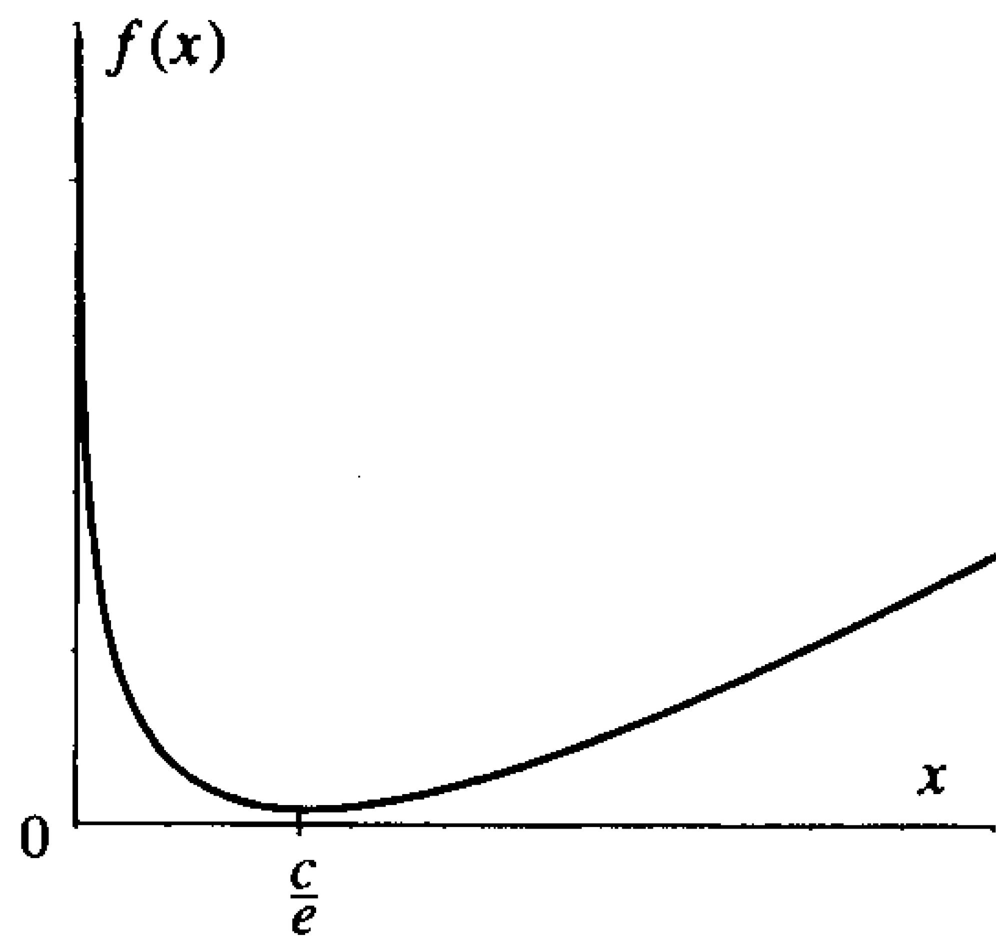


图 5.1.1　$f(x)$ 的图像

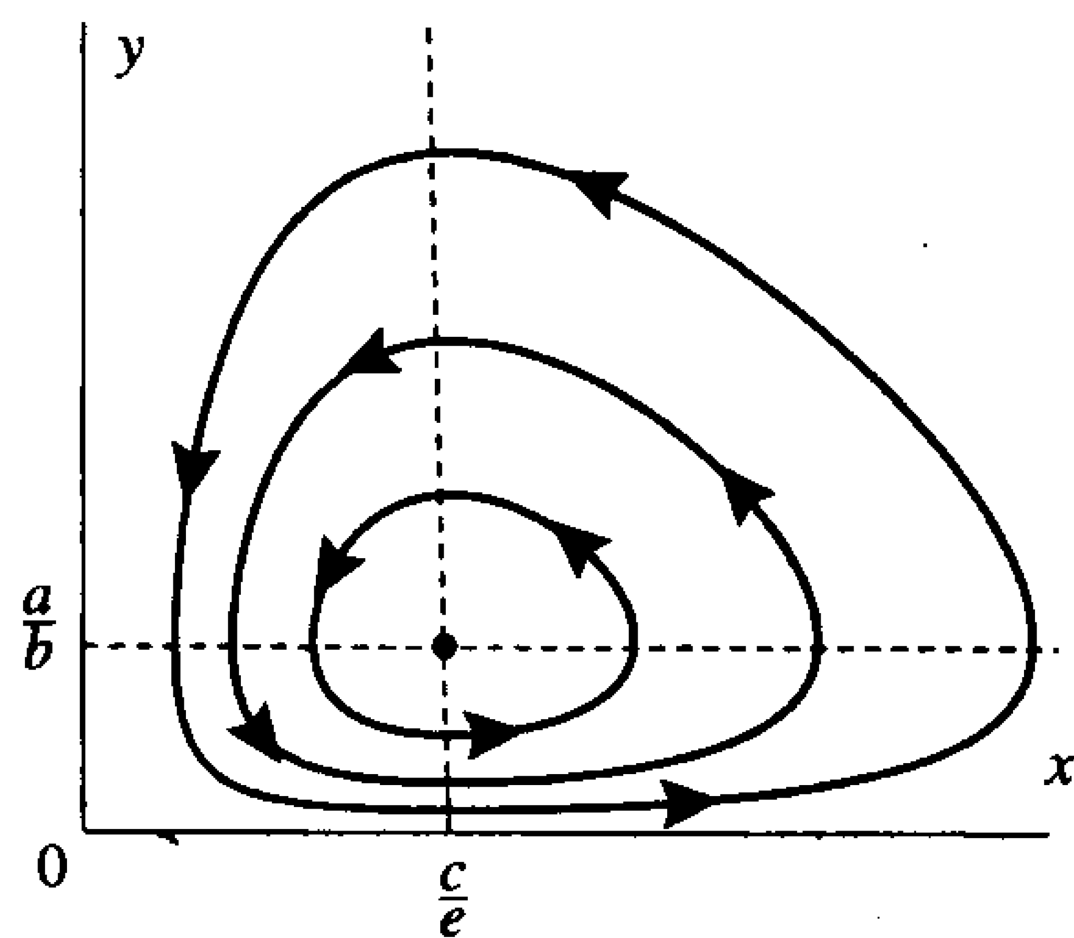


图 5.1.2　捕食者—食饵系统

5.2 无阻尼强迫振荡

本节讨论质量为 m，位置由变量 x 确定的质点的运动，要描述它的全部状态需要明确它的速度 $\dot{x}$. 假设质点在只与位置有关、与速度无关(即没有阻尼或摩擦)的力 $F(x)$ 的作用下运动. 149 因为质量乘以加速度等于作用在质点上的力，所以确定此运动的微分方程可表示为 $m\ddot{x}=F(x)$，若令 $y=\dot{x}$，则此方程化为只含一阶导数的微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= \frac{1}{m}F(x).\end{aligned}$$

尽管方程组中有位置和速度这两个自变量，仍称其只有一个自由度(one degree of freedom).

下面通过对微分方程进行“积分”来求系统沿着轨线所守恒的值(能量)，过程如下：用 $\dot{x}$ 去乘 $m\ddot{x}=F(x)$，得到

$$\begin{aligned}m\ddot{x}\dot{x} &= F(x)\dot{x},\\ m\dot{x}\ddot{x}-F(x)\dot{x} &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\int_{x_0}^{x}F(s)\,\mathrm{d}s\right] &= 0 \text{ 或}\\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2-\int_{x_0}^{x}F(s)\,\mathrm{d}s &= E,\end{aligned}$$

其中 E 沿着轨线是一常数. 力场的势能(potential energy)定义为力场相反数的积分：

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x}F(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此，沿着方程的解

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)$$

是一常数，$E(x,\dot{x})$ 称为能量(energy)或总能量(total energy)，它是势能 $V(x)$ 和动能(kinetic energy) $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 的和，因为存在沿着轨线取常值的函数，所以此类系统常被称为保守系统，此外，我们通常把 E 看成是相平面中 x 和 y 的函数.

在物理学上，势能被解释为把物体从位置 x_0 移到 x 所做的功(或所用的能量)，$\frac{1}{2}my^2$ 表示动能，它由质点速度决定，为方便起见，以后常把它的系数 m 取为 1，或将它并于 F 中.

形如 $m\ddot{x}=F(x)$ 的方程常被称为振子，这是因为质点的往反运动是周期的，有关振子的进一步讨论参看 5.6.1 节.

对于实值函数 $L(x)$，它取值为 C 的等位线集记为

$$L^{-1}(C) = \{\boldsymbol{x}:L(\boldsymbol{x}) = C\}.$$

设 $\boldsymbol{I}$ 是实数的任一集合(例如，一个区间)，将 $L(x)$ 在 $\boldsymbol{I}$ 中取值的点集记为

$$L^{-1}(\boldsymbol{I}) = \{\boldsymbol{x}:L(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{I}\}.$$

例 5.2.1（双井势能） 这个例子称为达芬方程，它有两个极小值点．考虑系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3.$$

150

系统有三个不动点：(0，0)，(±1，0)，偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{bmatrix},$$

在点(0，0)处该矩阵等于

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

在点(±1，0)处它等于

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

因此，(0，0)是鞍点，(±1，0)是中心．

此系统的势能是

$$V(x) = \int_0^x - s + s^3 \mathrm{d}s = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$

它在 $x=0$ 处取极大值，在 $x=\pm 1$ 处取极小值．因为势能函数有两个极小值点，所以此系统被称为双井势能．在临界点处势能的值为 $V(0)=0$，$V(\pm 1) = -1/4$，参见图 5.2.1 中 V 的图像．该系统的总能量是

$$E(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}y^2.$$

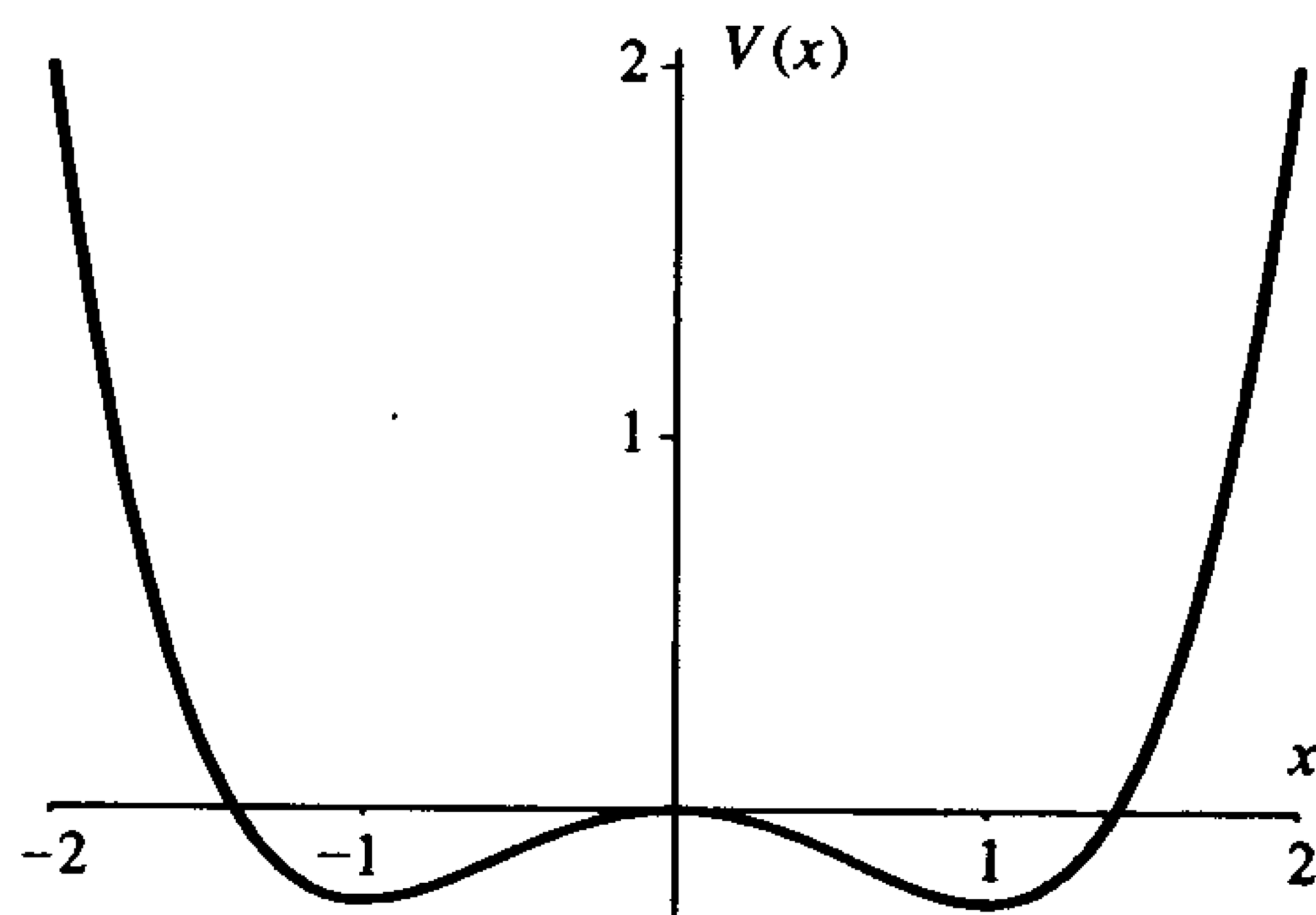


图 5.2.1 例 5.2.1 中的双井势能函数 V

下面分别考虑能量值 $C_2 > V(0) = 0$，C_1：$V(\pm 1) = -\frac{1}{4} < C_1 < 0 = V(0)$，$V_0 = -1/4$ 和 $V_1 = 0 = V(0)$（参见图 5.2.2）．

对能量值 $C_2 > 0$，取 $C_2 = 2$ 以便于分析，考虑等位线集

$$E^{-1}(2) = \left\{(x,y): E(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = 2\right\}.$$

151

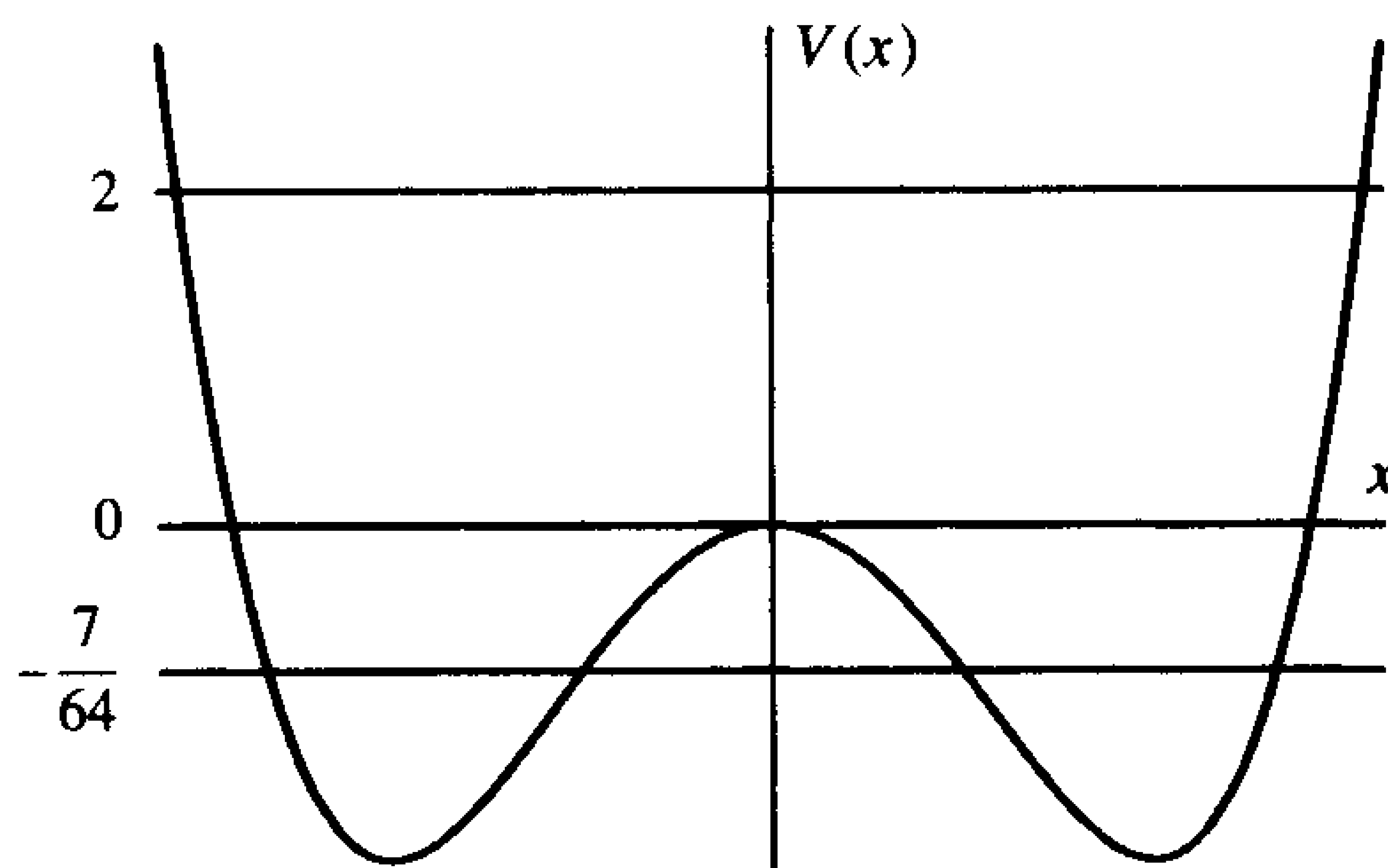


图 5.2.2　例 5.2.1 中势能函数的高度曲线(未按比例画)

因为 $y^2/2 \geqslant 0$，只要解满足 $V(x) \leqslant 2$ 的 x 的值即可. 解方程 $V(x)=2$，则有

$$2=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4},$$

$$0=x^4-2x^2+8,$$

$$0=(x^2-4)(x^2+1),$$

因此 $x=\pm 2$；当 $|x|>2$ 时，$V(x)>2$，从而 $E(x, y)=2$ 无解；当 $x=\pm 2$ 时，$V(\pm 2)=2$，从而 $y^2/2=2-V(\pm 2)=0$，即 $y=0$；当 $-2<x<2$ 时，$V(x)<2$，从而 y 有两个互为相反数的值 $y=\pm[4-2V(x)]^{1/2}$ 满足方程 $E(x, y)=2$，因此，等位线集 $E^{-1}(2)=\{(x, y): E(x, y)=2\}$ 是一条围绕三个不动点的闭曲线，此曲线的横坐标满足 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 图 5.2.3 画出了能量函数 $E(x, y)$ 的三维等位线图像，图 5.2.4 是 (x, y) 平面上的等位线 $E^{-1}(2)$ 的图像. 对其他的 $C_2>0=V(0)$，可得到类似的结果，只是 x 的端点不同而已.

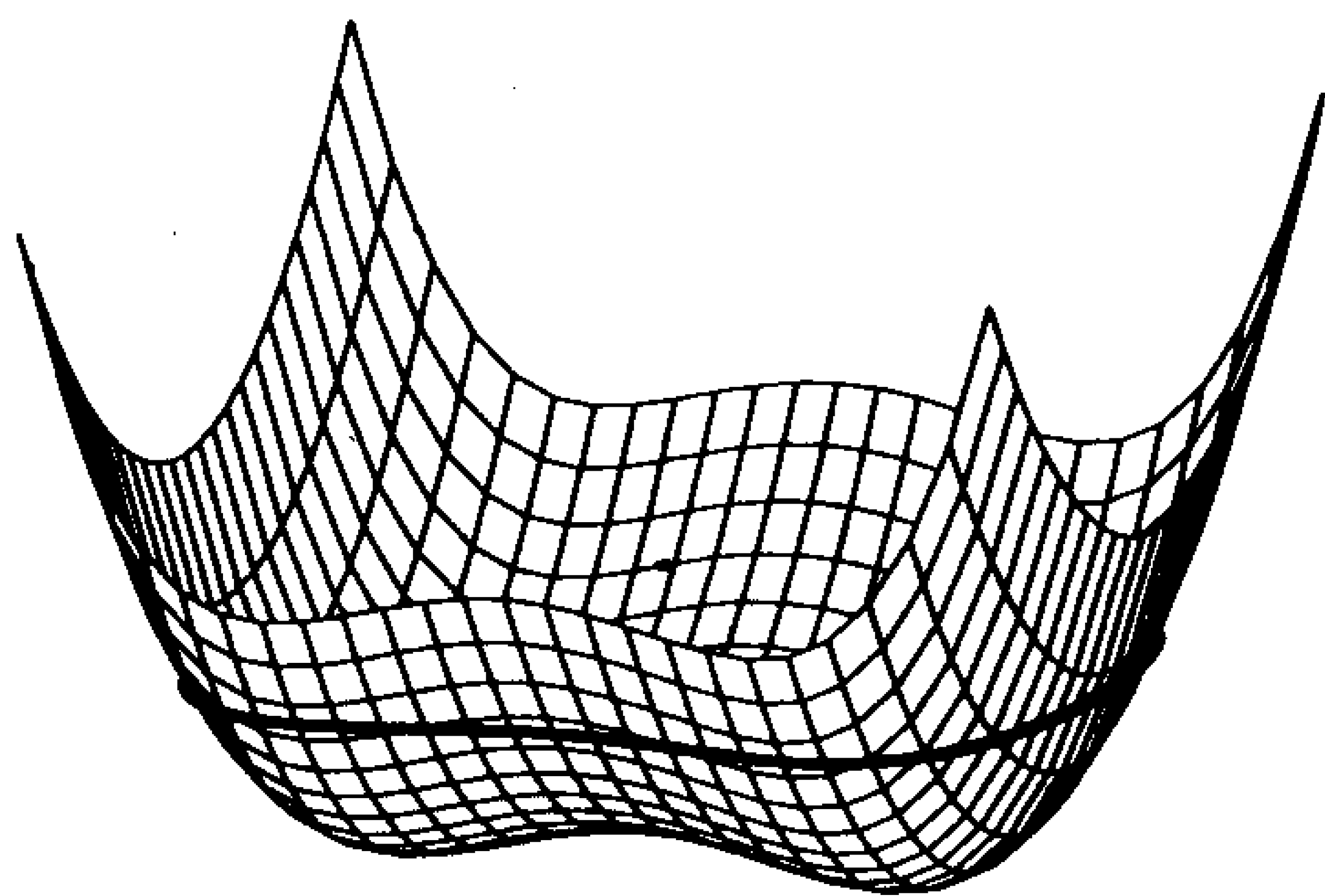


图 5.2.3　例 5.2.1 中能量函数三维图的等位线 $E^{-1}(2)$

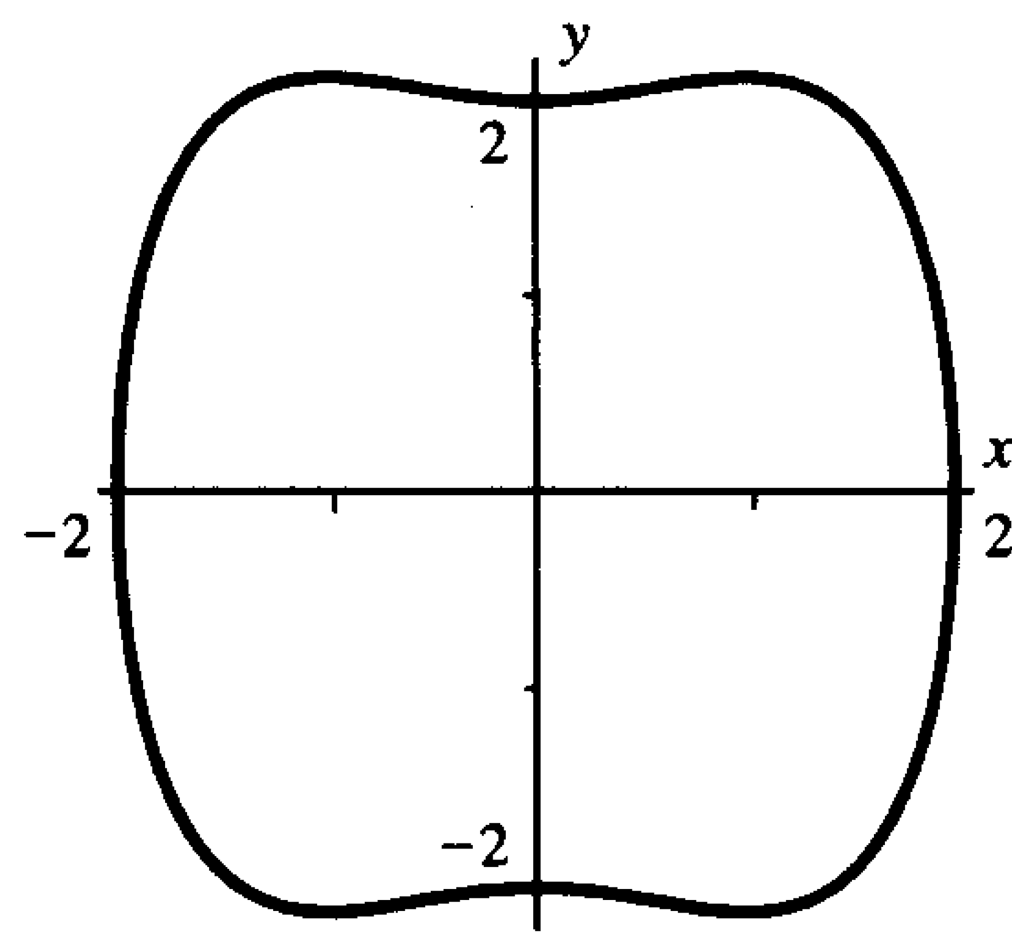


图 5.2.4　例 5.2.1 中等位线 $E^{-1}(2)$

152

对能量值 C_1: $V(\pm 1)=-\frac{1}{4}<C_1<0=V(0)$，特别地，取 $C_1=-7/64=V(\pm 1/2)=V(\pm\sqrt{7}/2)$，解不等式 $V(x)\leqslant -7/64$，则有

$$\frac{-7}{64}\leqslant -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4},$$

$$0 \geqslant x^4 - 2x^2 + \frac{7}{16}.$$

令不等式右端等于零，则有

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{7}{4}}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 7}}{4} = \frac{4 \pm 3}{4} = \frac{7}{4} \text{和} \frac{1}{4}.$$

从而 x 的取值范围是 $-\sqrt{7}/2 \leqslant x \leqslant -1/2$ 或 $1/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}/2$，当 $-\sqrt{7}/2 \leqslant x \leqslant -1/2$ 时，等位线 $E^{-1}(-7/64)$ 是一条围绕不动点 $(-1, 0)$ 的闭曲线；当 $1/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}/2$ 时，等位线 $E^{-1}(-7/64)$ 是一条围绕不动点 $(1, 0)$ 的闭曲线. 图 5.2.5 画出了 (x, y) 平面上等位线 $E^{-1}(-7/64)$ 的图像. 同理，对于其他 C_1：$-\frac{1}{4} < C_1 < 0$，$E^{-1}(C_1)$ 都是两条闭曲线的并集，其中一条围绕 $(-1, 0)$，另一条围绕 $(1, 0)$.

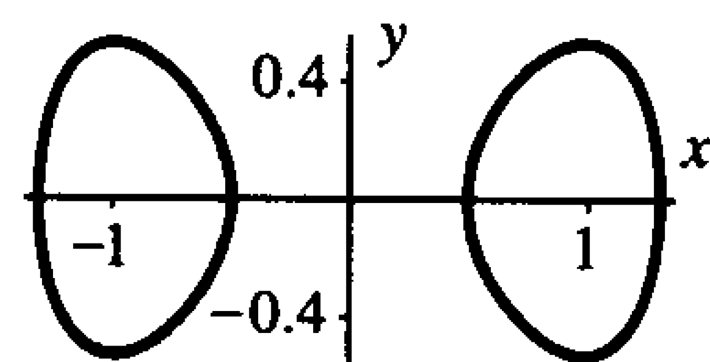


图 5.2.5 例 5.2.1 中等位线 $E^{-1}(-7/64)$

等位线集 $E^{-1}(-1/4)$ 就是两个点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$.

153

最后讨论等位线集 $E^{-1}(0)$，该集合点的横坐标 x 满足不等式 $V(x) \leqslant 0$，解此不等式，则有

$$0 \geqslant \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2},$$

$$0 \geqslant x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2).$$

因为 $x^2 \geqslant 0$，所以必有 $x^2 \leqslant 2$，从而 $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. 当 $x = 0$，$\pm\sqrt{2}$ 时，y 只能取 0；当 $-\sqrt{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \sqrt{2}$ 时，y 有两个值，因此，等位线 $E^{-1}(0)$ 是一条在 $x = 0$ 处相交的"8 形"曲线，参见图 5.2.6. 对 $E^{-1}(0)$ 上的点 $\boldsymbol{P}_0(x_0, y_0)$，$x_0 \neq 0$，当 t 趋向于 $\pm\infty$ 时轨线 $\phi(t; \boldsymbol{P}_0)$ 都趋于 $(0, 0)$. 这种当 t 趋向于 $\pm\infty$ 而渐近趋向于同一个点的轨线称为同宿轨 (homoclinic orbit)，粗略地说，同宿意为"自归"，因为无论时间向前还是向后此轨线归宿于同一个点，所以称它为同宿轨.

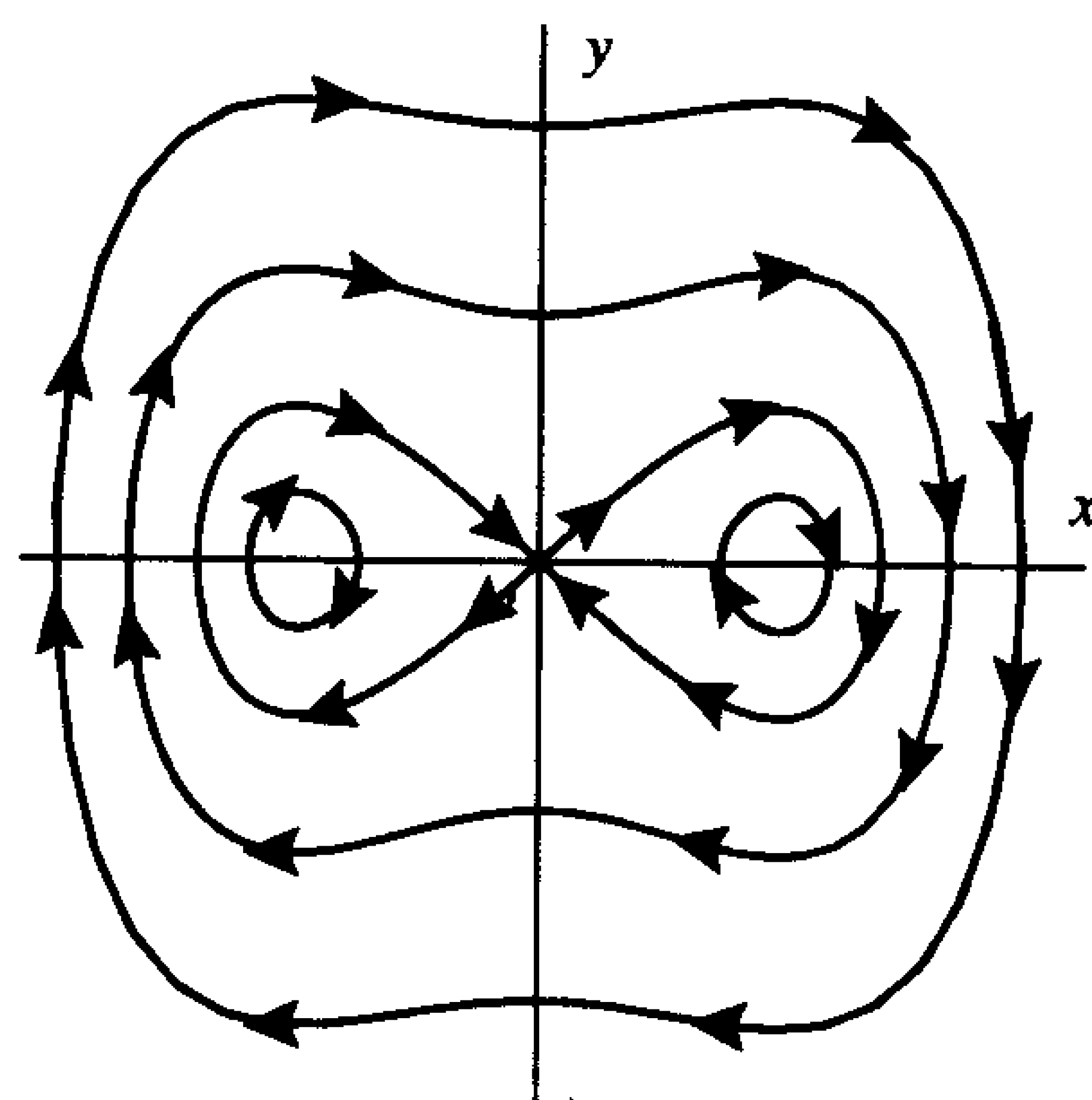


图 5.2.6 例 5.2.1 相图

因此，两不动点 $(\pm 1, 0)$ 被周期轨道环绕，而且存在环绕三个不动点的周期轨道，这两种轨道被两条同宿轨构成的等位线 $E^{-1}(0)$ 分开. ■

前面这些例子给出了分析无阻尼系统的步骤，参见表 5.2.1.

表 5.2.1　分析无阻尼系统的步骤

1. 分析势能函数.
   (a) 确定势能函数 V 的极小值和极大值.
   (b) 求出势能函数满足 $V'(x_j)=0$ 的临界点 x_j(包括极值点和可能的反射点)，确定临界值 $V(x_j)$ 的值，并按大小关系排列：$V_0<V_1\cdots<V_k$.
   (c) 画出 V 的略图.
2. 取一组数 $C_j(1\leqslant j\leqslant k-1)$ 满足 $C_{j-1}<C_j<V_j$，$C_{k+1}>V_k$.
   (a) 对每一个 C_j，利用函数 V 确定 x 的取值范围 $\{x: V(x)\leqslant C_j\}$.
   (b) 利用 C_j 得到的 x 的取值范围，来确定相平面上等位线集 $E^{-1}(C_j)$，注意，对于这些非临界值 C_j，若集合 $\{x: V(x)\leqslant C_j\}$ 的构成中有闭区间，则等位线集 $E^{-1}(C_j)$ 中对应该区间的分支是周期轨道.
3. 对 $E^{-1}(V_j)1\leqslant j\leqslant k$ 重复上一步的讨论.
   (a) 若 V_0 是最小值，则 $E^{-1}(V_0)$ 对应能量函数的不动点.
   (b) 若对应的 V_j 是极大值，则等位线集 $E^{-1}(V_j)$ 包含了鞍点稳定和不稳定流形.
      (i) 若集合 $\{x: V(x)\leqslant V_j\}$ 有分支是一个不含临界点的闭区间，那么 $E^{-1}(V_j)$ 的相应分支是同宿轨，这一点与情形 2b 相同.
      (ii) 若存在 V 的两个极大值点 x_1，x_2 满足 $V(x_1)=V(x_2)=V_j$，如果 $\{x: V(x)\leqslant V_j\}\supset[x_1, x_2]$ 且当 $x_1<x<x_2$ 时 $V(x)<V_j$，则 $E^{-1}(V_j)$ 包含两个鞍点 $P_1=(x_1, 0)$，$P_2=(x_2, 0)$ 及 y 为正的曲线和 y 为负的曲线，这样便存在以两鞍点中一个为 ω-极限集、以另一个为 α-极限集的两条轨线，这种轨线称为是异宿轨(heteroclinic orbits)，参看例 5.2.3 和图 5.2.8.

注 5.2.2　利用 Maple、Mathematica、Mathlab 等计算机程序可以帮助前面的分析画出实值函数 E 的等高线.

例 5.2.3(单摆)　考虑单摆系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\sin(x).$$

它的势能函数是

$$V(x) = \int_0^x \sin(s)\,ds = 1-\cos(x).$$

它在 $x=0$ 和 2π 的整数倍处取极小值，$V(0)=0=V(n2\pi)$，在 $x=\pm\pi$ 和 π 的奇数倍处取极大值，$V(\pi)=V(\pi+n2\pi)=2$，参见图 5.2.7. 可直接验证不动点 $(n2\pi, 0)$ 都是中心，不动点 $(\pi+n2\pi, 0)$ 都是鞍点，因此需要讨论能量值为 C_1：$0<C_1<2$，以及 C_2：$2<C_2$ 时的等位线集.

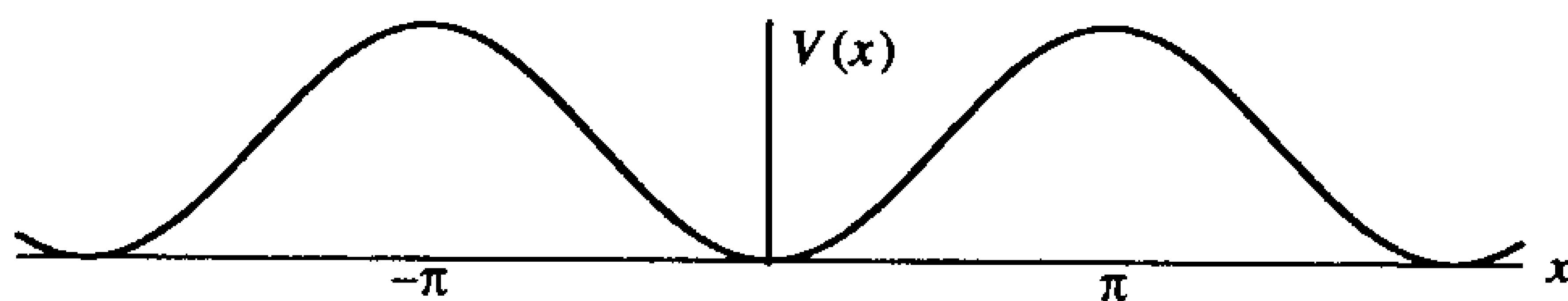


图 5.2.7　单摆：势能函数

154～155

对于常数 C_1：$0 < C_1 < 2$，等位线集 $E^{-1}(C_1)$在 $-\pi < x < \pi$ 上的部分是环绕(0，0)的曲线，且它在每个带性区域 $-\pi + n2\pi < x < \pi + n2\pi$ 上不断重复，因此(0，0)被周期轨道环绕.

等位线集 $E^{-1}(2)$ 在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上的部分是两条分别从$(-\pi，0)$、$(\pi，0)$出发的曲线的并集. 当 t 趋向于∞时，上面一条轨线渐近趋于$(\pi，0)$，当 t 趋向于 $-\infty$ 时，它渐近趋于$(-\pi，0)$；下面一条轨线在 t 趋向于正负无穷时正好渐近趋于相反的不动点，而且这个图像将在每个带性区域 $-\pi + n2\pi < x < \pi + n2\pi$ 上不断地重复. 我们称上面这种当 t 趋向于正负无穷时趋于不同的不动点的轨线为异宿轨(heteroclinic orbits).

因为对一切 x，势能函数 $V(x) \leqslant 2$，所以当 $C_2 > 2$ 时，对于等位线集 $E^{-1}(C_2)$上每一个 x 都有两个 y 值与之对应，从而 $E^{-1}(C_2)$是两条曲线的并集，其中一条有 $y > 0$，另一条有 $y < 0$，且沿上面一条当 t 趋向于∞时 x 单增地趋向于∞，沿下面一条当 t 趋向于∞时 x 单减地趋向于 $-\infty$. 若把 x 看作周期角变量(此时视单摆系统是柱面系统——译者注)，则这两条轨线都是周期的且各自沿着一个方向一圈一圈地运动，而且两条轨线的旋转方向恰好相反，这种轨线称为是旋转解(rotary solutions)(参见图 5.2.8). 正如第 1 章所注明的：单摆在原点附近有周期轨道，在远处有非周期旋转轨道.

如第 1 章所述，环绕原点的轨道的周期依赖于振幅，图 5.2.9 画出了三个不同振幅的周期解，这一点也是适用于例 5.2.1.

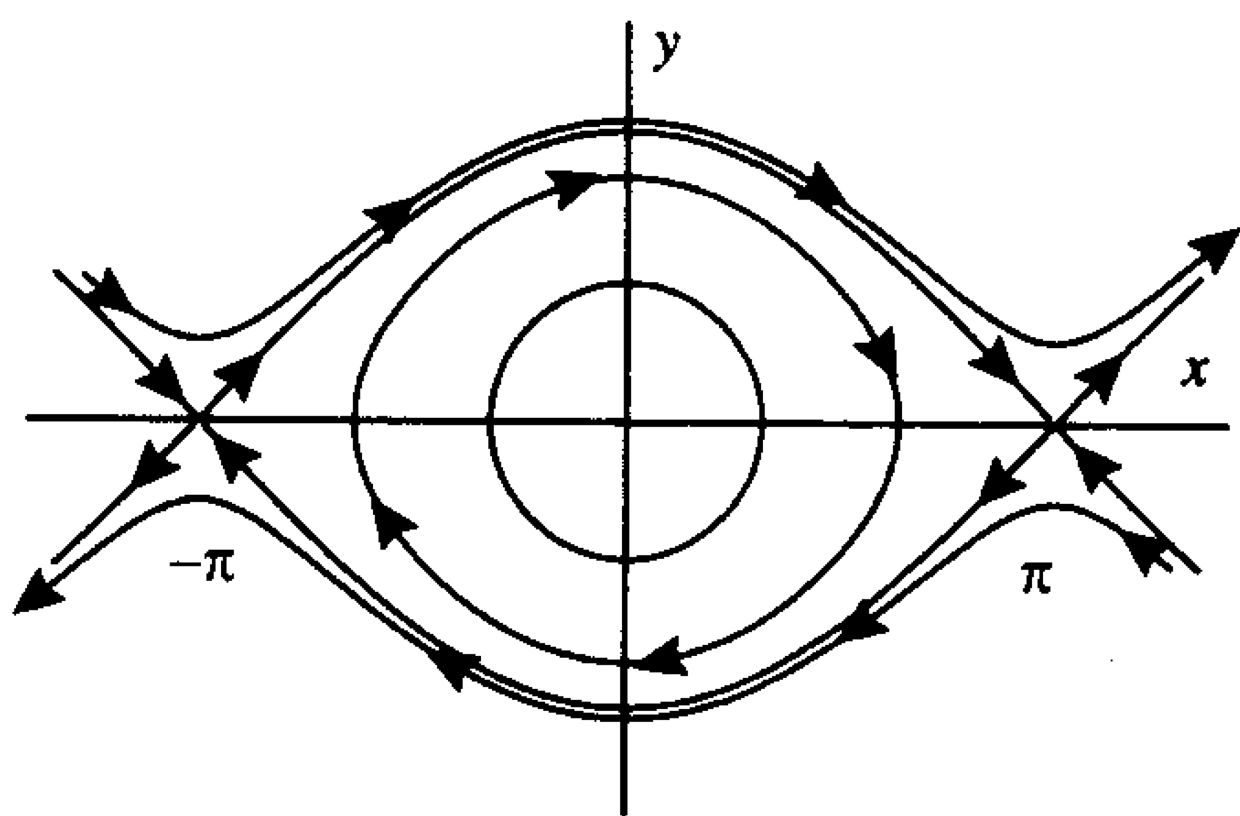


图 5.2.8　单摆：相图

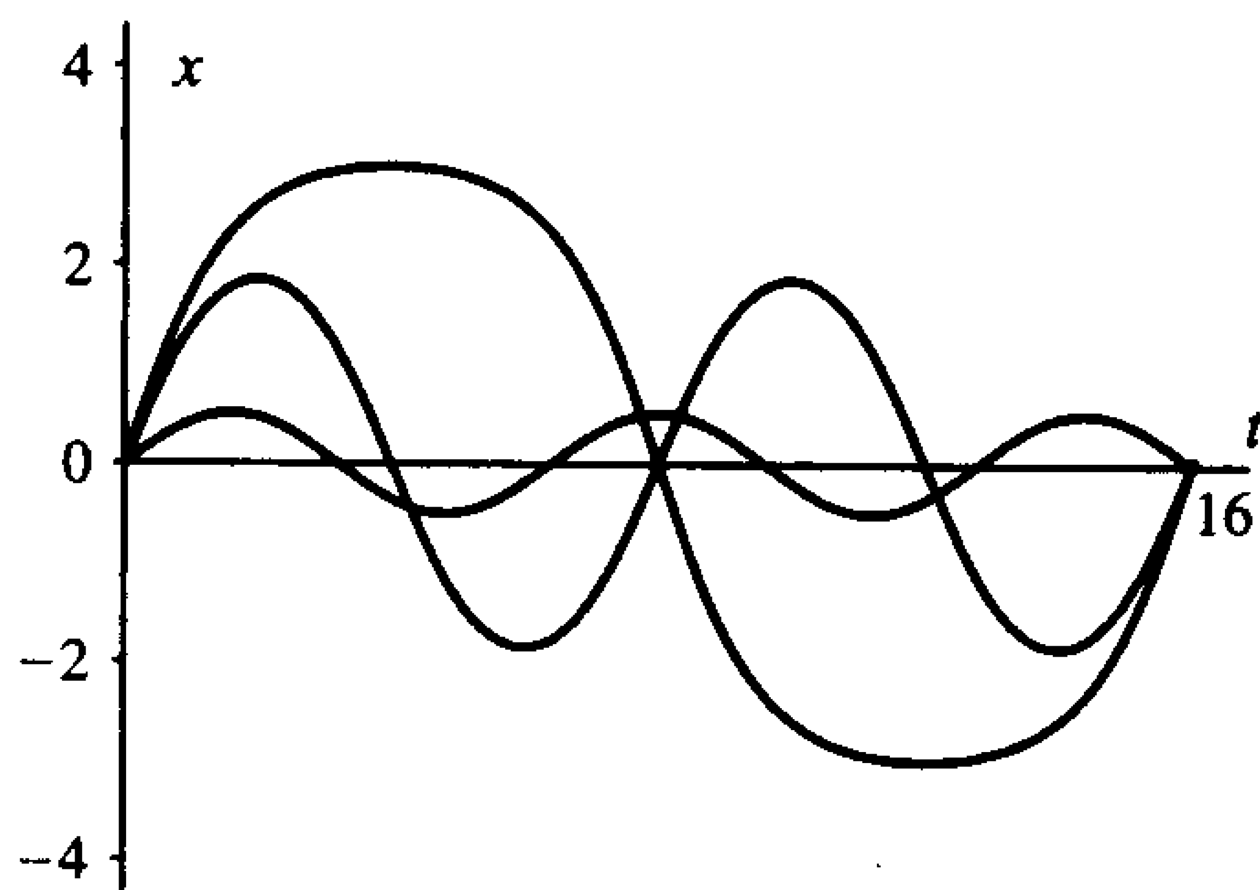


图 5.2.9　单摆不同振幅的解的时距曲线图表明了周期的差异

■

注意，对于如下形式的系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = F(x),$$

它在不动点$(x^*，0)$处的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F'(x^*) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x^*) & 0 \end{bmatrix},$$

156

特征方程是 $\lambda^2 + V''(x^*) = 0$，特征值为 $\lambda = \pm\sqrt{-V''(x^*)}$，因此如果 x^* 是 $V(x)$的满足 $V''(x^*) > 0$ 的极小值，那么该不动点有一对纯虚特征值，从而它是线性化系统的中心. 事实上，结合本节的讨论可知此不动点被周期轨道所环绕，因而它是个非线性中心. 如果 x^* 是 $V(x)$的满足 $V''(x^*) < 0$ 的极大值，那么该不动点有一个正实特征值和一个负实特征值，从而此不动点既是

线性化系统鞍点，又是非线性系统的鞍点．下面是本节的最后一个例子．

例 5.2.4　考虑系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -(x + x^2).$$

它的势能函数是

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

总能量函数为

$$E(x,y) = V(x) + \frac{y^2}{2}.$$

系统的不动点是 $(0, 0)$ 和 $(-1, 0)$，势能函数的临界点是 $x = 0, -1$，且 $V(0) = 0$，$V(-1) = 1/6$．因为 $V(0) = 0$ 是势能函数的极小值，所以 $(0, 0)$ 是微分方程的中心；因为 $V(-1) = 1/6$ 是极大值，所以 $(-1, 0)$ 是微分方程的鞍点，参看势能函数的图像图 5.2.10．

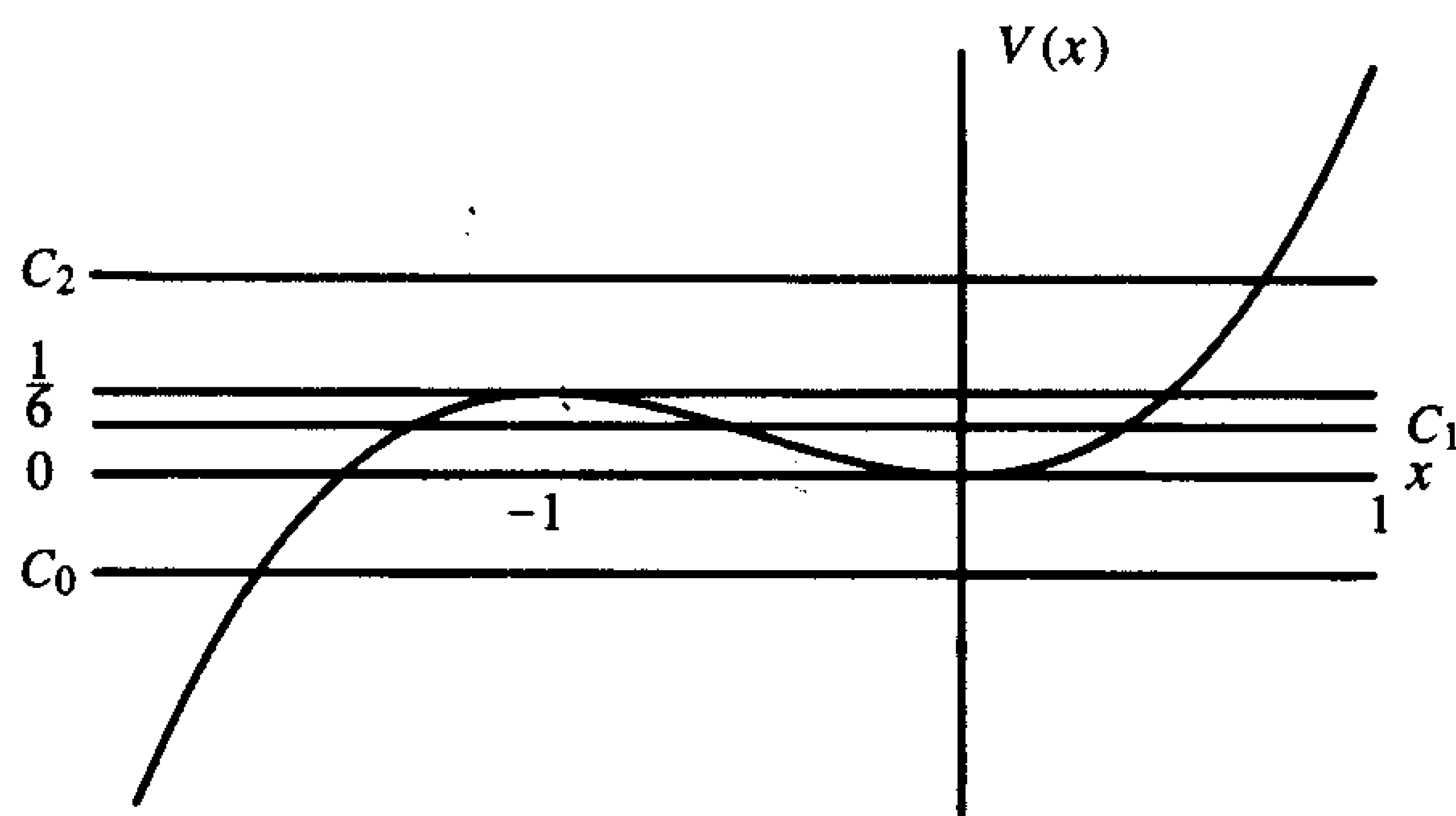


图 5.2.10　例 5.2.4 的势能函数

下面讨论能量值为 $C_0 < 0 = V(0)$，C_1：$V(0) = 0 < C_1 < 1/6 = V(-1)$ 以及 $C_2 > 1/6$ 时的等位线集．

首先考虑 C_1：$0 < C_1 < 1/6$，有三个点 x_1，x_2，x_3 满足 $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3$ 使得 $V(x) = C_1$，集合

$$\{x: V(x) \leqslant C_1\}$$

是区间 $(-\infty, x_1]$ 与闭区间 $[x_2, x_3]$ 的并．在等位线集 $E^{-1}(C_1)$ 中，与 $x = x_1, x_2, x_3$ 对应的 y 值为 0，与 $x < x_1$ 和 $x_2 < x < x_3$ 对应的 y 值有两个，因此在 $E^{-1}(C_1)$ 中与 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 对应的是一环绕 $(0, 0)$ 的闭曲线，与 $x < x_1$ 对应的是平面上开口向左的非闭曲线，这条轨线来自无穷又趋向于无穷，参见图 5.2.11．

157

对 $C_2 > 1/6$，$C_0 < 0$，集合

$$\{x: V(x) \leqslant C_0\} \quad 和 \quad \{x: V(x) \leqslant C_2\}$$

都表示从负无穷到某个 $x_j = V^{-1}(C_j)$ 的区间，对于

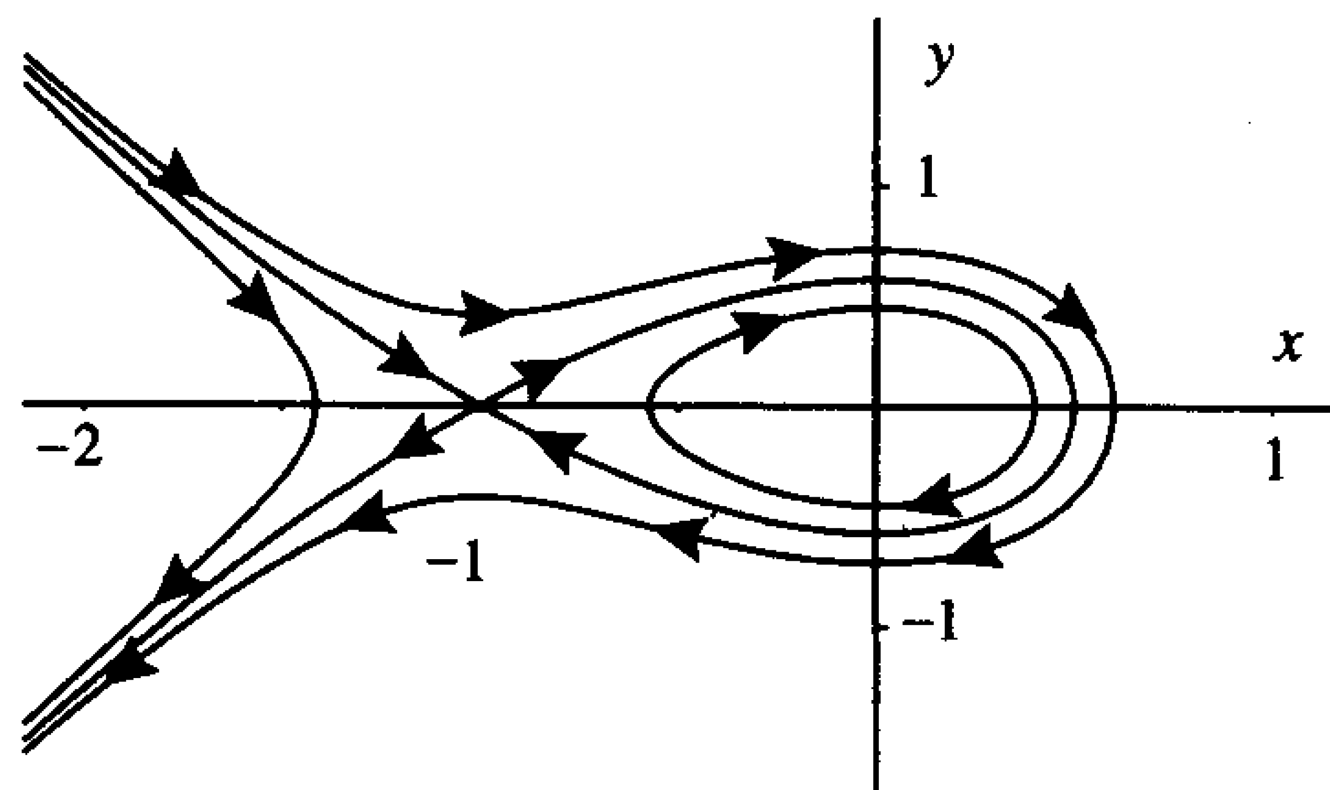


图 5.2.11　例 5.2.4 的相图

$j=1$或 2，等位线集 $E^{-1}(C_j)$是一条当 $x=x_j$ 时与轴 $y=0$(即 x 轴)相交的曲线，沿着它当 t 趋向于 $\pm\infty$ 时横坐标趋向于 $-\infty$，参见图 5.2.11.

对能量值 1/6，势能函数在极大值点 $x=-1$ 处与直线 $y=1/6$ 相切，因为

$$0=V(x)-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-1)=\frac{1}{6}(x+1)^2(2x-1).$$

可知当 $x=-1$ 和 1/2 时，势能函数等于 1/6. 等位线集 $E^{-1}(1/6)$与 $x=0.5$，-1 对应的只有 $y=0$；对每个 $x<1$ 或 $-1<x<0.5$ 都有两个 y 值与之对应，因此 $E^{-1}(1/6)$中在 $x=-1$ 右侧有一个同宿轨，在 $x=-1$ 左侧有一条位于 $W^s(-1,0)$上的从 $x=-\infty$ 过来的无界轨道及一条位于 $W^u(-1,0)$上的趋向于 $x=-\infty$ 的无界轨道，参见图 5.2.11，下一节的图 5.3.3 画出了等位线集 $E^{-1}(0)$和 $E^{-1}(1/6)$. ■ 158

5.3 阻尼系统的李雅普诺夫函数

上一节讨论了能量守恒的物理系统，在这种系统上加上一个阻尼项(或摩擦力)后，其能量会减少而不再守恒，这时系统称为是**耗散的**(dissipative).

阻尼项是质点运动引起的阻力，因此阻尼函数 $G(x,y)$一定依赖于速度 y，而不一定依赖于质点的位置 x. 考虑到阻尼会使质点的速度慢下来，从而 y 取正值将导致阻尼 $G(x,y)$取负值. 最简单的情况是阻尼只线性地依赖于速度而与位置无关，即下面的微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=F(x)-by.\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

首先在上一节讨论的单摆系统上加一个阻尼项，利用能量函数来寻找原点的吸引区域 $W^s(\mathbf{0})$，然后提炼出这个例子的思想来定义李雅普诺夫函数.

例 5.3.1(阻尼摆) 考虑带线性阻尼项的单摆方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-\sin(x)-by,\end{aligned}$$

其中 $b>0$，项 $-by$ 表示阻尼(当 $b=0$ 时，就回到无阻尼的情形). 系统的不动点满足 $y=0$，$x=n\pi$，n 表示任意整数，线性化矩阵是

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\cos(x) & -b\end{bmatrix}.$$

可直接验证当 $x=\pm\pi$ 时特征值是 $\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4}}{2}$，且不动点仍是鞍点；当 $x=0$ 或是 π 的偶倍数时 $-\cos(0)=-1$，特征方程是 $\lambda^2+b\lambda+1=0$，从而特征值是

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}=-\frac{b}{2}\pm i\sqrt{1-(b^2/4)}.$$

当 $0<b<2$ 时特征值是复数，当 $b\geqslant 2$ 时特征值取实值；可见无论在哪种情况下，不动点都是吸引的. 虽然线性化不能确定吸引区域的大小，但可以知道附近的轨线都趋向于不动点.

为进一步了解吸引区域的情况，考虑无阻尼时系统的能量函数

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + (1 - \cos(x)).$$

它沿着解关于 t 的导数是：

$$\dot{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y^2}{2} + (1 - \cos(x))\right] = y\dot{y} + \sin(x)\dot{x}$$

159

$$= y[-\sin(x) - by] + \sin(x)y = -by^2 \leqslant 0.$$

在 $y=0$ 或离开直线 $\boldsymbol{Z} = \{(x, 0)\}$ 以外，E 关于时间的导数就是负的，因此除速度为零的时刻外，能量是严格递减的. 沿一条轨线（非不动点）当 $y=0$ 时由方程表达式可知 $\dot{y} \neq 0$，从而轨线要穿过 $y=0$ 且 E 继续减少. 因此，沿初始值满足 $E(x_0, y_0) < 2$ 和 $-\pi < x_0 < \pi$ 的整条轨线能量是递减的，当它穿过 $y=0$ 的一瞬间 $\dot{E}=0$，接着 E 又开始下降，向着在(0, 0)处的 E 最小值逼近，因此轨线渐近地趋向于不动点(0, 0)，参见图 5.3.1 和图 5.3.2，从而这些初始值都在(0, 0)的吸引区域内.

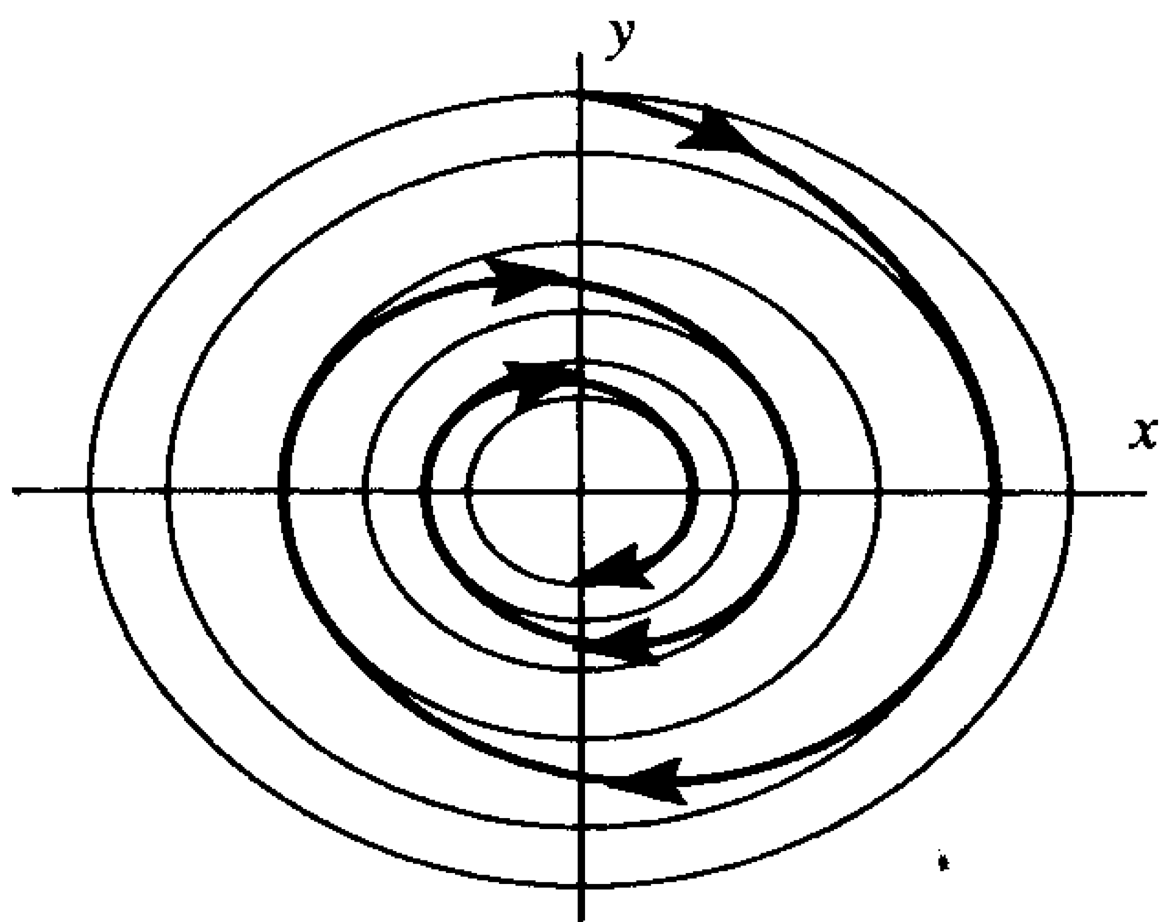


图 5.3.1　例 5.3.1 中阻尼摆穿过等位线集 $E(x, y)$ 的轨线

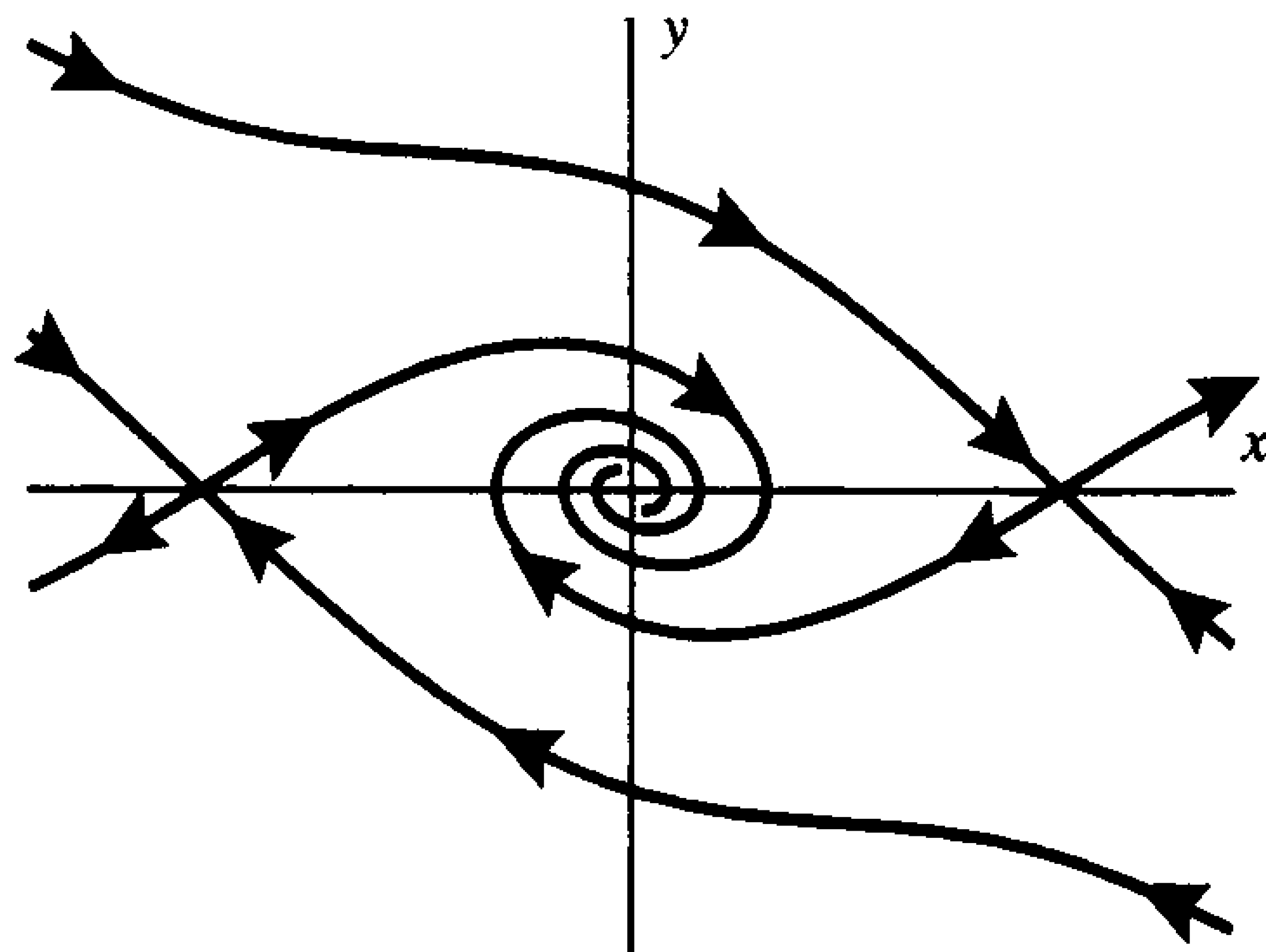


图 5.3.2　例 5.3.1 的相图

■

定义 5.3.2　设 $\boldsymbol{x}^*$ 是微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的不动点，若实值函数 L 满足以下条件：存在 $\boldsymbol{x}^*$ 的邻域 $\boldsymbol{U}$ 使得 L 在 $\boldsymbol{U}$ 上有定义且(i)对所有的 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ 有 $L(\boldsymbol{x}) > L(\boldsymbol{x}^*)$；(ii)对所有的 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$ 有 $\dot{L}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$，则称 L 是方程的一个弱李雅普诺夫函数(week Lyapunov function). 注意这里我们允许 L 关于 t 的导数等于零. 特别地，保守系统的能量函数在它的极小值点附近是一个弱李雅普诺夫函数. 又若 L 在某一开邻域 $\boldsymbol{U}$ 上是一个弱李雅普诺夫函数且满足 $\dot{L}(\boldsymbol{x}) < 0$，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$，则称 L 是 $\boldsymbol{U}$ 上的李雅普诺夫函数(Lyapunov function)或严格的李雅普诺夫函数(strict

160

Lyapunov function).

定义 5.3.3　设 S 是一集合，若对任意的 $\boldsymbol{x}_0 \in S$，$\phi(t, \boldsymbol{x}_0) \in S$ 对所有 $t \geqslant 0$ 都成立，则称 S 是正不变的(positively invariant).

在利用李雅普诺夫函数来讨论方程组的相图时，需要找到或构造出李雅普诺夫函数 L，但不必为确定 $\dot{L}$ 而求方程的解，特别地，对单摆问题，就不必求出方程的显示解.

下面的定理阐述了利用弱李雅普诺夫函数或李雅普诺夫函数来判断不动点稳定性的结果.

定理 5.3.4　设 x^* 是微分方程 $\dot{x}=F(x)$ 的不动点.

(a) 设 L 是 x^* 某邻域 U 上的弱李雅普诺夫函数，则 x^* 是 L 稳定的(L-stable).

(b) 设 L 是 x^* 某邻域 U 上的(严格)李雅普诺夫函数，则 x^* 是吸引的；若有 $L_0>L(x^*)$ 使得集合

$$U_{L_0}=\{x\in U:L(x)\leqslant L_0\}$$

是包含于 U 的内部的有界集，则集合 U_{L_0} 包含于 x^* 的吸引域中.

证明　(a) 设 $x(t)=\phi(t;\ x_0)$ 是一条轨线，若当 $0\leqslant s\leqslant t$ 时 $x(s)\subset U$，则有

$$L(x(t))-L(x_0)=\int_0^t\dot{L}(x(s))\mathrm{d}s\leqslant 0,$$

从而解不能穿越 L 取值较小的等位线而到达 L 取值较大的等位线. 对给定的 $\varepsilon>0$，可取 L_0 充分小，使得集合

$$U_{L_0}=\{x\in U:L(x)\leqslant L_0\}\subset\{x:\|x-x^*\|<\varepsilon\},$$

从而此集合一定是正不变的；另一方面，存在 $\delta>0$ 使得

$$\{x:\|x-x^*\|<\delta\}\subset U_{L_0}.$$

因此满足 $\|x_0-x^*\|<\delta$ 的初始值 x_0 一定属于 U_{L_0} 且对 $t\geqslant 0$ 有 $\phi(t;\ x_0)\subset U_{L_0}$，从而 $\|\phi(t;\ x_0)-x^*\|<\varepsilon$，其中 $t\geqslant 0$. 又因为 ε 可以任意小，所以不动点是 L 稳定的.

(b) 现在假设 $\dot{L}<0$，取 $x_0\in U_{L_0}\setminus\{x^*\}$，若 $\phi(t;\ x_0)$ 不收敛于 x^*，则对 $t\geqslant 0$ 有 $\dot{L}(\phi(t;\ x_0))\leqslant -K<0$，从而当 t 趋于 ∞ 时，$L(\phi(t;\ x_0))\leqslant L(x_0)-Kt$ 趋于 $-\infty$；另一方面，考虑到 U_{L_0} 是正不变的，即 $\phi(t;\ x_0)\subset U_{L_0}$，其中 $t\geqslant 0$，所以由李雅普诺夫函数定义可知 $L(\phi(t;\ x_0))$ 始终大于 $L(x^*)$，这显然是矛盾的，从而 $\phi(t;\ x_0)$ 收敛于 x^*，即 x^* 是吸引的. ■

例 5.3.5　考虑系统

$$\dot{x}=-y-x^3$$
$$\dot{y}=x-y^3.$$

取 $L(x,\ y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，即到原点距离平方的一半，则

$$\dot{L}=x\dot{x}+y\dot{y}=-x^4-y^4,$$

除(0, 0)之外恒为负，因此当 t 增加时到原点距离的平方严格递减，且轨线一定以不动点(0, 0)为极限，从而(0, 0)是渐近稳定的，收敛区域是全平面. ■

定理 5.3.4 只说明有阻尼单摆是 L 稳定的，而没有证明它是渐近稳定的，为了理解导致有阻尼单摆渐近稳定的关键因素，我们需要更仔细地考虑满足 $\dot{L}=0$ 的点.

161

定理 5.3.6　设 x^*，L 和 U 如上一定理所述，其中 L 设为弱李雅普诺夫函数，定义

$$Z_U=\{x\in U:\dot{L}(x)=0\}.$$

并设 U 充分小使得对任意的 $x_1\in Z_U\setminus\{x^*\}$，轨线 $\phi(t;\ x_1)$ 从 x_1 向前走时立即从 Z_U 进入 $U\setminus Z_U$(也就是说 $\{x^*\}$ 是 Z_U 中最大的正不变集)，则 x^* 是渐近稳定的.

进一步，若存在 $L_0>L(x^*)$ 使得集合

$$U_{L_0} = \{x \in U : L(x) \leqslant L_0\}$$

是包含于 U 的有界集，则集合 U_{L_0} 包含于 x^* 的吸引区域中，即 $U_{L_0} \subset W^s(x^*)$.

该定理的证明过程将在5.7节给出，5.7节还用极限集给出了另一种证法.

该定理有时用来证明以下问题：尽管一个不动点是线性化系统的中心(特征值的实部为零)，但它作为非线性系统的不动点却是渐近稳定的. 当要强调一个不动点是线性化系统的中心时，就称这个吸引的不动点为弱吸引的(weakly attracting)；当要强调一个不动点对于非线性系统和线性化系统都是吸引的时候，就称这种不动点为强吸引的（strongly attracting). 在6.4节讨论安德罗诺夫–霍普夫分叉时要用到这些术语.

若改变时间导数的符号，就得到下面有关不动点不稳定流形的结果.

定理5.3.7　设 x^*，L 和 U 如上一定理所述，但假设对于 $x \in U$,

$$\dot{L}(x) \geqslant 0$$

又设当 $x \in U \setminus \{x^*\}$ 时有 $L(x) > L(x^*)$，定义

$$Z_U = \{x \in U : \dot{L}(x) = 0\}.$$

并设 U 充分小使得对任意 $x_1 \in Z_U \setminus \{x^*\}$，轨线 $\phi(t;\ x_1)$ 从 x_1 向后走时立即从 Z_U 进入 $U \setminus Z_U$ (也就是说 $\{x^*\}$ 是 Z_U 中最大的负不变集)，则 x^* 的不稳定流形包含 x^* 的某整个邻域，即 x^* 是弱排斥的.

进一步，若存在 $L_0 > L(x^*)$ 使得集合

$$U_{L_0} = \{x \in U : L(x) \leqslant L_0\}$$

是包含于 U 的有界集，则集合 U_{L_0} 包含于 x^* 的不稳定流形中，即 $U_{L_0} \subset W^u(x^*)$.

例5.3.8　考虑在例5.2.4加上一个阻尼项后的系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -(x + x^2) - 0.3y.$$

考虑没有阻尼项 $-0.3y$ 时系统的能量，能量函数取为

$$L(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

162　其中 $V(x) = x^2/2 + x^3/3$ 是势能函数，该系统的不动点满足：$y = 0$，$x = 0$，-1.

因为 $L(0,\ 0) = 0$，所以关于 U 所做的一个假设是 $L(x,\ y) \geqslant 0$. 沿曲线

$$\left\{(x,y) : y = \pm|x|\sqrt{-1 - \frac{2}{3}x}, x \leqslant -\frac{3}{2}\right\} \tag{5.3.2}$$

有 $L(x,\ y) = 0$，因为在曲线(5.3.2)左侧，$V(x)$ 是递减的，必须考虑它右侧的点，我们用 U_1 来表示曲线 $L^{-1}(0)$ 右侧点的集合，参见图5.3.3.

如上所述，$\dot{L} = -0.3y^2 \leqslant 0$，所以 $\dot{L}$ 为零的集合是

$$Z_U = \{(x,0) \in U\}.$$

为使不动点(0，0)成为 Z_U 的最大不变集，需要从 U 中除去(−1，0)，考虑到 $L(-1,\ 0) = 1/6$,

所以取

$$U = \left\{ (x,y) \in U_1 : 0 \leqslant L(x,y) < \frac{1}{6}, x > -1 \right\}.$$

由定理 5.3.6 知，对任意 $L_0 < 1/6$，U_{L_0}都包含在 $\mathbf{0} = (0, 0)$ 的吸引区域中，又因为 $L_0 < 1/6$ 可以任意取，即整个 U 包含在 $\mathbf{0}$ 的吸引区域中，这里的 U 恰好等于无阻尼系统例 5.3.4 中同宿轨的内部区域，因此这个区域中的点都属于吸引区域，图 5.3.4 给出了轨线和吸引区域的图像.

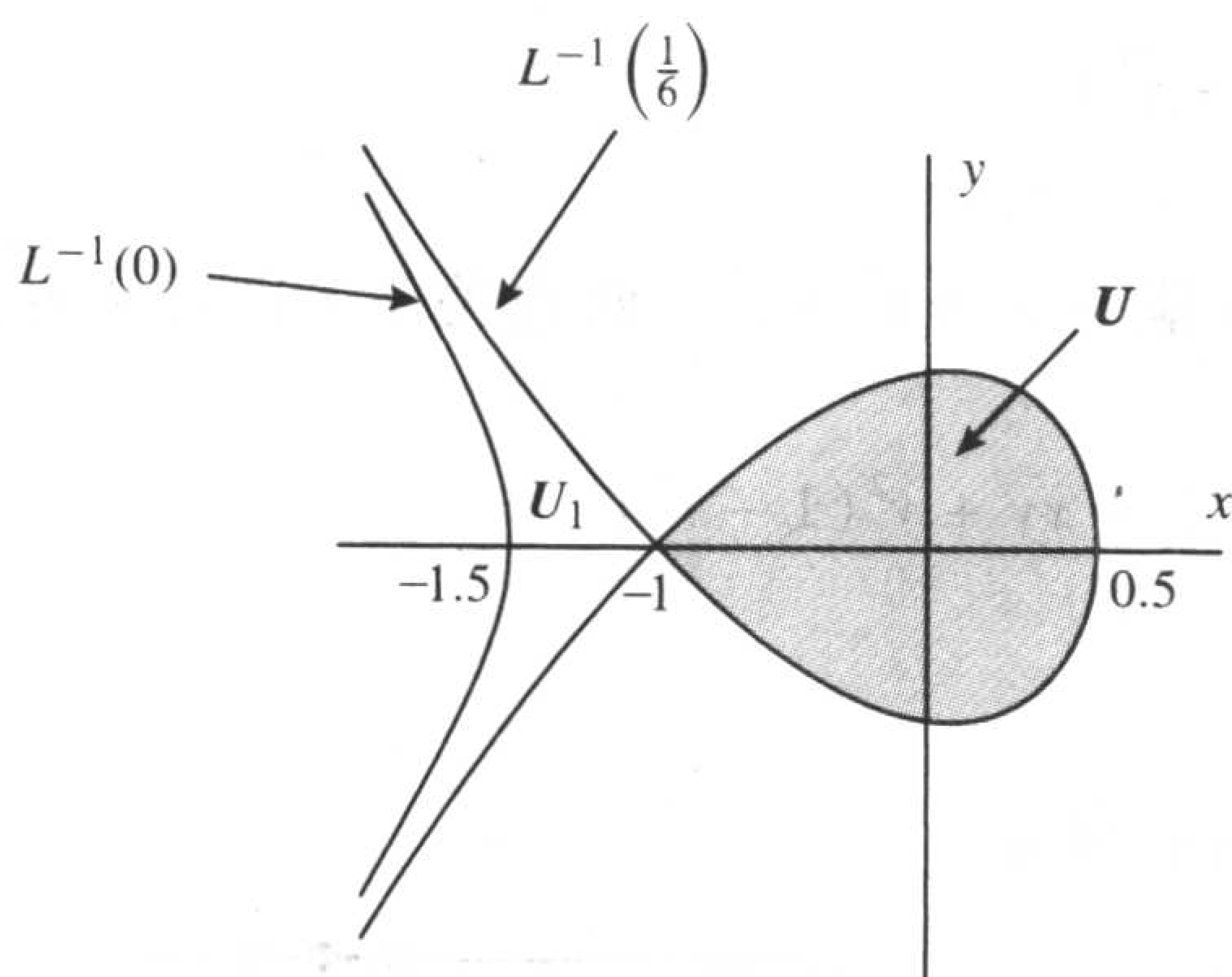


图 5.3.3　例 5.3.8 中的等位线集 $L(x, y) = 0$ 和 $L(x, y) = \frac{1}{6}$

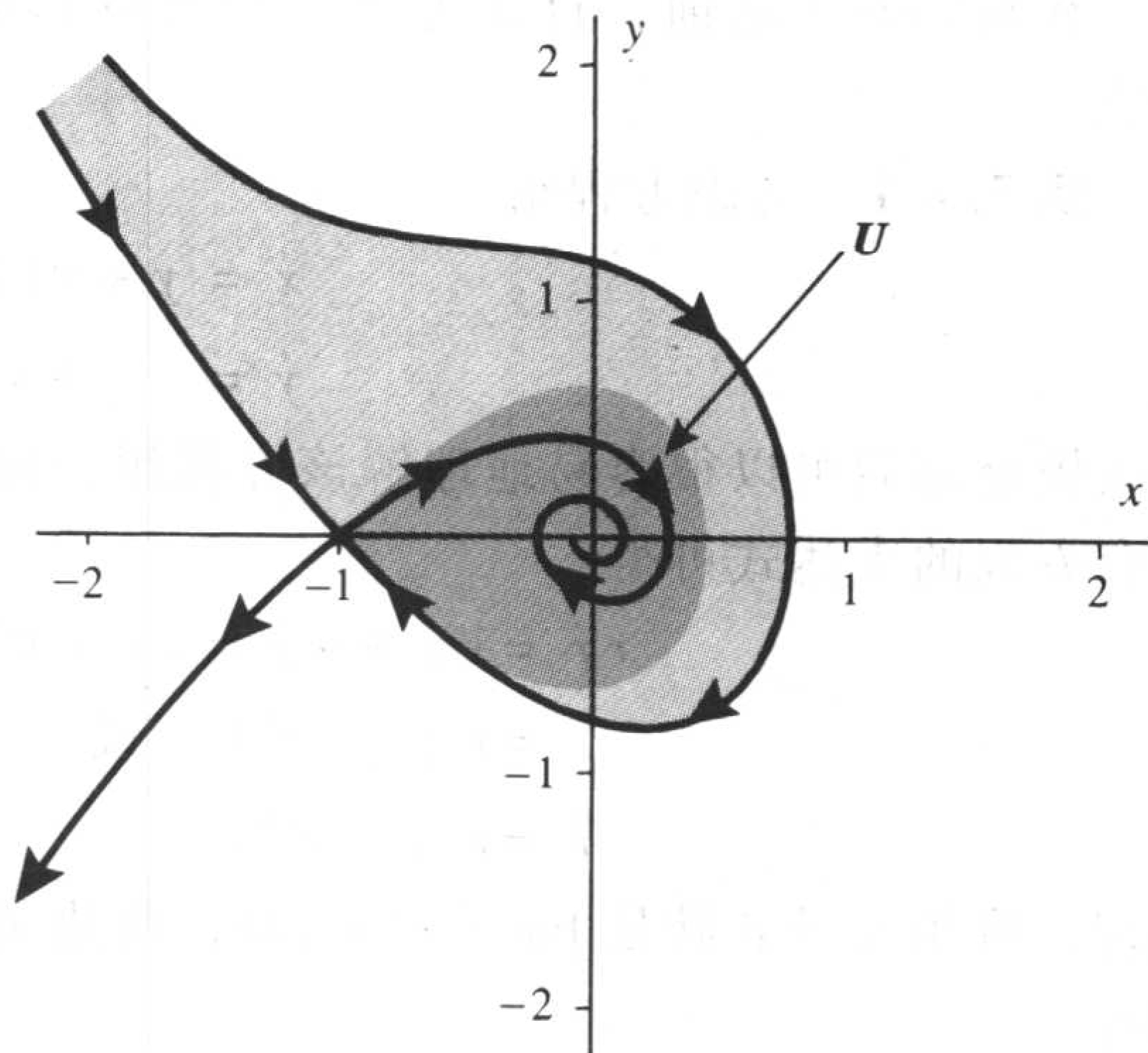


图 5.3.4　例 5.3.8 的吸引区域

■

注 5.3.9　只有特殊类型的方程才有李雅普诺夫函数，而且也没有寻找李雅普诺夫函数的一般方法．对于无阻尼系统加上阻尼项后得到的新系统，上面已经给出了一种构造李雅普诺夫函数的方法；如果所要讨论的方程是由一个具有李雅普诺夫函数 L 的方程添加阻尼项后得到的，则有时可以对 L 进行轻微改动后得到新方程的李雅普诺夫函数，在 LaSalle 与 Lefschetz 的书[**60**]中有很多这样的例子.

对其他类型的方程，我们可以寻找这样一个实值函数 L：它在相空间不同部分关于时间的导数$\dot{L}$取不同的符号．这种函数既可以用来分析相图，又可以用来寻找正不变区域．如果关于时间的导数$\dot{L}$在等位线 $L^{-1}(C)$ 上非零（从而$\dot{L}$不变号），则轨线都沿着同一方向穿过该曲线．任何有助于分析相图的函数称为是检验函数(test function)．设 L 是一实值函数，若存在常数 C 使得(i)$L^{-1}(C)$有界（不趋向于无穷），(ii)在等位线 $L^{-1}(C)$ 上$\nabla L(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$，(iii)在 $L^{-1}(C)$ 内部的点 L 的值小于 C，(iv)$\dot{L}(\boldsymbol{x}) < 0$，则称 L 是限制函数(bounding function)．显然 $L^{-1}(C)$的内部是正不变的，所以从 $L^{-1}(C)$ 内部出发的轨线向前运动时被它所界.

5.4　极限集

在画相图时，我们比较关心轨线的长期行为，在很多情况下，轨线趋向于一个不动点，第6章和第7章将分别考虑有周期轨道的系统和有混沌行为的系统的轨线的长期行为. 4.1节引入了α极限集和ω极限集的概念，这一节将讨论这些极限集的性质，并利用这些性质来解释定理5.3.6. 在此定理的证明过程中，尽管最后表明ω极限集只是一个不动点，但一开始我们并不知道这一点.

在叙述概念之前，首先考虑一个有周期轨道的系统，这个例子在第6章的开头还将继续讨论.

例5.4.1　考虑方程组

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2)$$
$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

163～164

引入极坐标后可以很容易地理解该方程组，极坐标r满足$r^2 = x^2 + y^2$，两边关于t进行微分并结合方程的表达式可得

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = xy + x^2(1 - r^2) - xy + y^2(1 - r^2)$$
$$= r^2(1 - r^2) \quad 或$$
$$\dot{r} = r(1 - r^2).$$

同理，取角变量θ满足$\tan(\theta) = y/x$，两边关于t进行微分，则有

$$\sec^2(\theta)\,\dot{\theta} = x^{-2}[-x^2 + xy(1 - r^2) - y^2 - xy(1 - r^2)]$$
$$= -r^2/x^2, \quad 于是$$
$$\dot{\theta} = -1.$$

因此，解沿逆时针方向、以相同的角速度绕原点旋转，关于r的方程有一个吸引的不动点$r = 1$和一个排斥的不动点$r = 0$. 从而在平面坐标下的方程有一个半径为1的圆形周期轨道，和一个排斥的不动点——原点，参见图5.4.1a.

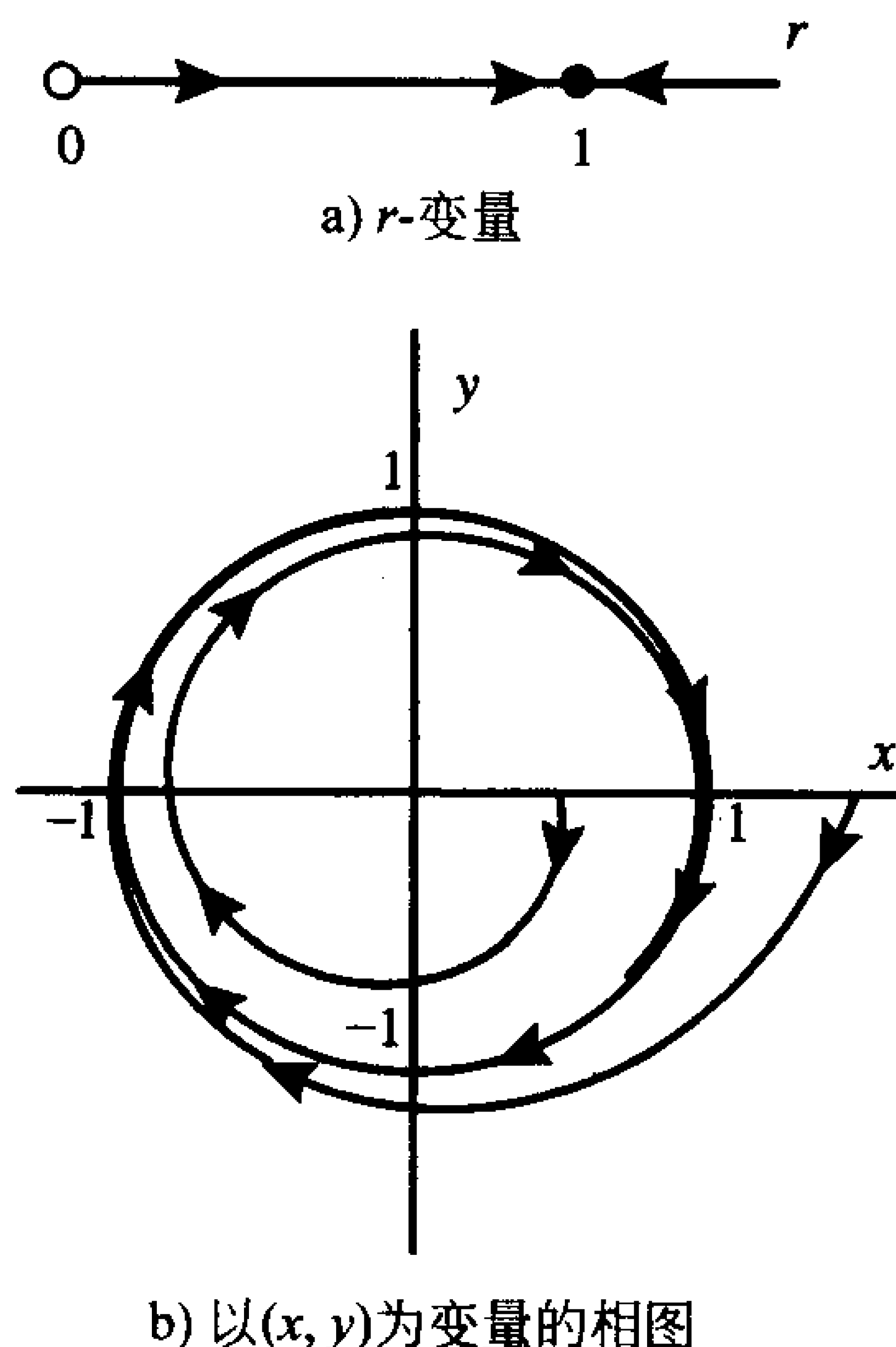


图5.4.1　例5.4.1的极限环

从单位圆外出发的轨线$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$都趋向于该单位圆，而不是趋于圆上的某个点，但对于圆上任一点z，$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$每经过$2\pi$单位的时间后更接近于$z$，因此存在时间序列$t_n$使得$\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$收敛于$z$. 显然所取的$z$不同得到的$t_n$也不同，鉴于只考虑$t$趋向于无穷的情况，所有这些点所成之集称为$\omega$极限集，这种记法考虑到了$\omega$是希腊字母表的最后一个字母. 同理，$t$趋向负无穷时轨线的极限点集称为是$\alpha$极限集. ■

165

定义5.4.2　如果存在趋于∞的时间序列t_n使得$\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$收敛于$z$，则称$z$是轨线$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$或点$\boldsymbol{x}_0$的$\omega$极限点. 这表明当$t$趋向于$\infty$时，$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$无数次地靠近$z$，$\boldsymbol{x}_0$所有$\omega$极限点的集合称为是$\omega$极限集，记作$\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

类似地，如果存在趋于 $-\infty$ 的时间序列 t_n 使得 $\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 z，则称 z 是轨线 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 或点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 α 极限点. $\boldsymbol{x}_0$ 所有 α 极限点的集合称为 α 极限集，记作 $\alpha(\boldsymbol{x}_0)$.

例 5.4.1 中所有非零解都以螺旋式趋向于单位圆 $\Gamma=\{r=1\}$，因此任一初始点 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,\ y_0)\neq(0,\ 0)$ 的 ω 极限集都是 Γ，即 $\omega(\boldsymbol{p}_0)=\Gamma$；若 $\|\boldsymbol{p}_0\|<1$，则它的 α 极限集是原点，即 $\alpha(\boldsymbol{p}_0)=\{\boldsymbol{0}\}$. 若 $\|\boldsymbol{p}_0\|>1$，轨线向后趋于负无穷，从而 $\alpha(\boldsymbol{p}_0)=\varnothing$.

若 $\boldsymbol{x}_0$ 是不动点，则 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\alpha(\boldsymbol{x}_0)=\{\boldsymbol{x}_0\}$，若 $\boldsymbol{x}_0$ 在一条周期轨道上，则 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\alpha(\boldsymbol{x}_0)=\Gamma$，这里 $\Gamma=\{\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)\}$ 表示周期轨道上所有点的集合，例如在例 5.2.1 中，满足 $L(\boldsymbol{x}_0)\neq0$，$-1/4$ 的点都在周期轨道上，从而

$$\omega(\boldsymbol{x}_0)=\alpha(\boldsymbol{x}_0)=\{\phi(t;\boldsymbol{x}_0):t\in\mathbb{R}\}.$$

若 $L(\boldsymbol{x}_1)=0$ 且 $\boldsymbol{x}_1$ 不是原点，则对应的轨道是同宿轨，从而

$$\omega(\boldsymbol{x}_1)=\alpha(\boldsymbol{x}_1)=\{\boldsymbol{0}\}.$$

最后，不动点就是本身的极限集，则有

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{0})&=\alpha(\boldsymbol{0})=\{\boldsymbol{0}\},\\ \omega((-1,0))&=\alpha((-1,0))=\{(-1,0)\},\\ \omega((1,0))&=\alpha((1,0))=\{(1,0)\}.\end{aligned}$$

以下定理概括了极限集的一些性质.

定理 5.4.3　设 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 是一条轨线，则下面 ω 极限集的性质成立：

(i) 极限集只依赖于轨线而不依赖于特定点，因此对任意的 t，有 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\omega(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$.

(ii) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是不变集：若 $z_0\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，那么对所有的正 t 或负 t，轨线 $\phi(t;\ z_0)$ 都属于 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

(iii) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是闭集（即 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 包含它所有的极限点）.

(iv) 若 $\boldsymbol{y}_0\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，则有 $\omega(\boldsymbol{y}_0)\subset\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

另外，若 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 对 $t\geqslant0$ 是有界的（即存在常数 C 使得 $\|\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)\|\leqslant C$，$t\geqslant0$），则下面的 (v) 和 (vi) 也成立：

(v) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 非空.

(vi) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是连通的，即它不能由多块区域组成.

若 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 对 $t\leqslant0$ 是有界的，则 α 极限集有类似的性质.

性质 (i) 可直接由 ω 极限集的定义推出.

性质 (ii) 可由流的连续性得到.

若 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 中的序列 $\boldsymbol{y}^j$ 收敛于 $\boldsymbol{y}^\infty$，而 $\boldsymbol{y}^j$ 是 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 的极限点，这两点相结合可推出性质 (iii).

由性质 (ii) 和 (iii) 可推出性质 (iv).

性质 (v) 成立是因为轨线要不断地回到相空间中的某处.

性质 (vi) 成立是因为轨线本身是连通的.

166

ω 极限集还可以表示为轨线上时间大于 T 的部分的闭包对所有 $T>0$ 求交集，即

$$\omega(\boldsymbol{x}_0)=\bigcap_{T\geqslant0}\text{closure}\{\phi(t;\boldsymbol{x}_0):t\geqslant T\}.$$

因为本书用不到这条性质，所以此处也不证明，其他一些书中将它作为 ω 极限集的定义.

例 5.4.4　这个例子有这样一个极限集，它由不动点、以不动点为 ω 极限集和 α 极限集轨道所组成，考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= x - 2x^3 + y(x^2 - x^4 - y^2).\end{aligned}$$

如果包含 y 的项不出现在 $\dot{y}$ 的等式中，系统将有能量函数

$$L(x,y) = \frac{-x^2 + x^4}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

就用这个函数来讨论，它关于原系统的导数(对 t 求导)为

$$\begin{aligned}\dot{L} &= (-x + 2x^3)y + y(x - 2x^3 + y(x^2 - x^4 - y^2))\\ &= -2y^2L\begin{cases}\geqslant 0 & L < 0\\ = 0 & L = 0\\ \leqslant 0 & L > 0.\end{cases}\end{aligned}$$

考虑到该函数的导数既能取正号也能取负号，它不是李雅普诺夫函数，称它为检验函数.

如果 $L(x_0,\ y_0) = 0$，则从 $(x_0,\ y_0)$ 出发的轨线始终包含在等位线集 $L^{-1}(0)$ 中，显然位于原点处的不动点也包含在 $L^{-1}(0)$ 中，该等位线集有界且是一维的，从而当 t 趋向于正无穷或负无穷时 $L^{-1}(0)$ 中的轨线都收敛于原点处的不动点，即对满足 $L(x_0,\ y_0) = 0$ 的点都有 $\omega(x_0,\ y_0) = \alpha(x_0,\ y_0) = \mathbf{0}$，并且

$$(x_0, y_0) \in W^s(\mathbf{0}) \cap W^u(\mathbf{0}).$$

令

$$\Gamma = \{(x,y) : L(x,y) = 0\}.$$

考虑到原点的稳定流形和不稳定流形是曲线且包含 Γ，从而必有

$$\Gamma = W^s(\mathbf{0}) = W^u(\mathbf{0}).$$

如果 $L(x_0,\ y_0) > 0$，L 的值沿着轨线下降，仅当轨线穿越 x 轴($y = 0$)的时刻，L 关于时间的导数等于零. 这些轨道层层穿过 L 的等位线，并向里越来越靠近 $L = 0$，因此这些轨线呈螺旋状集聚于 $L = 0$；对任意一点 $\boldsymbol{q} \in \Gamma$，存在趋于无穷的序列 t_n 使得 $\phi(t_n;\ (x_0,\ y_0))$ 趋向于 $\boldsymbol{q}$，从而 $\boldsymbol{q} \in \omega(x_0,\ y_0)$，又因为 $\boldsymbol{q}$ 的任意性，所以 $\omega(x_0,\ y_0) = \Gamma$，参见图 5.4.2. 当时间趋向于负无穷时轨线趋于无穷，从而 $\alpha(x_0,\ y_0) = \varnothing$.

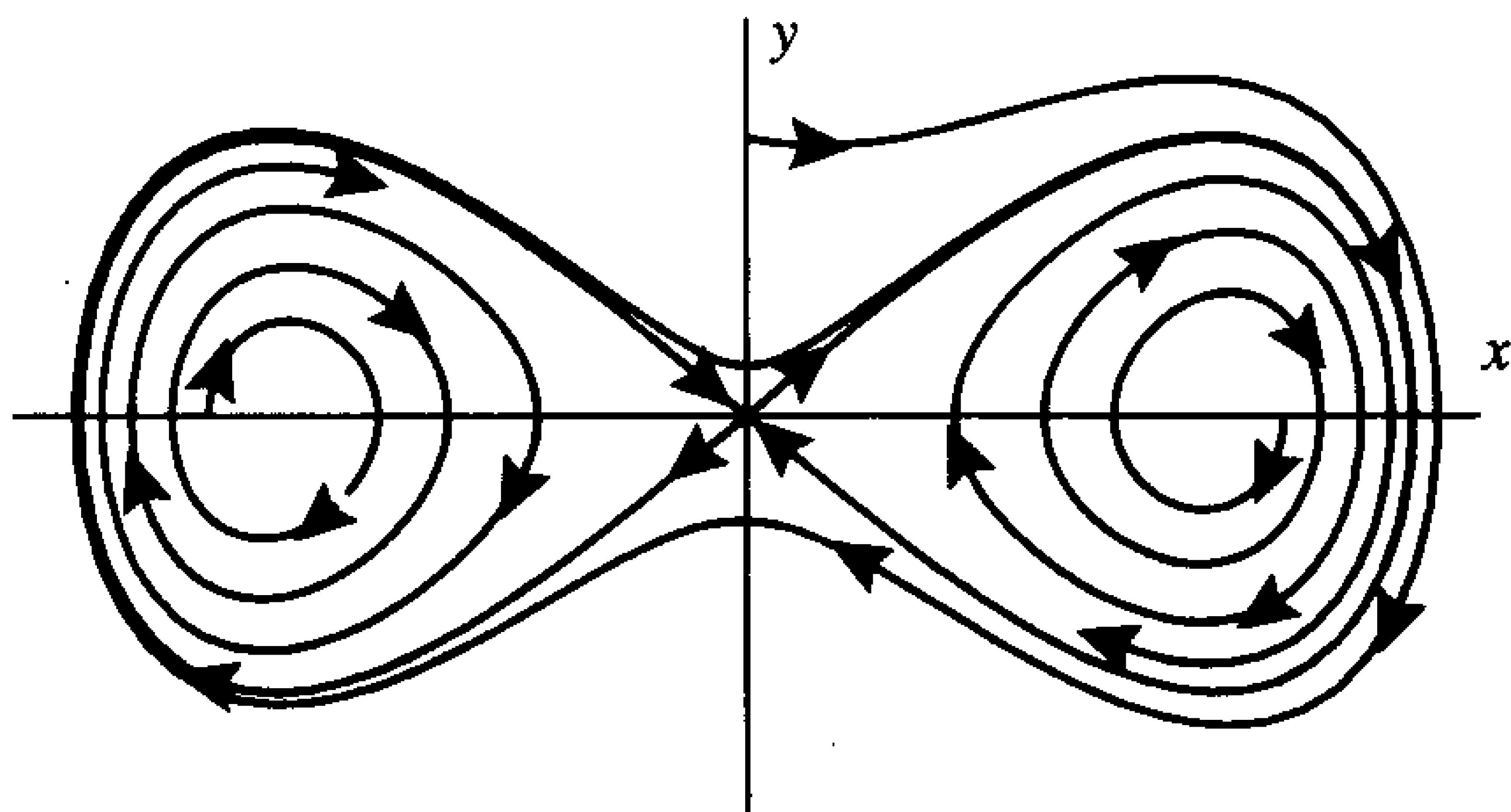


图 5.4.2　例 5.4.4 的极限集

从满足 $-\frac{1}{8}<L(x_1,\ y_1)<0$，$x_1>0$ 的点出发的轨线向外呈螺旋状集聚在 Γ 的右半部分，即

$$\omega(x_1,y_1) = \Gamma \cap \{(x,y):x \geqslant 0\}.$$

当时间趋向于负无穷时轨线趋于 $(1/\sqrt{2},\ 0)$，从而 $\alpha(x_1,\ y_1)=\{(1/\sqrt{2},\ 0)\}$，参见图 5.4.2. [167]

同理，从满足 $-\frac{1}{8}<L(x_2,\ y_2)<0$，$x_2<0$ 的点出发的轨线向外呈螺旋状集聚在 Γ 的左半部分，即

$$\omega(x_2,y_2) = \Gamma \cap \{(x,y):x \leqslant 0\}.$$

而且 $\alpha(x_2,\ y_2)=\{(-1/\sqrt{2},\ 0)\}$.

对于这些轨道中每一条，只要其极限集非空，则一定包含一个不动点. ■

上例中 y 轴两侧的不稳定流形都回到原点，有时只有一侧回来，如下例所示.

例 5.4.5　考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= x - x^2 + y(3x^2 - 2x^3 - 3y^2),\end{aligned}$$

令 $L(x,\ y)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}$，此时在原点处鞍点的不稳定流形只有右侧一支含在稳定流形中：

$$\Gamma^+ = W^u(\mathbf{0}) \cap W^s(\mathbf{0}) = \{(x,y):L(x,y) = 0,x \geqslant 0\}.$$

如果 $-1/6<L(x_0,\ y_0)<0$，$x_0>0$，则 $\omega(x_0,\ y_0)=\Gamma^+$. ■

在上面两个例子中，向量场的发散量在鞍点的值是零，这是不常见的. 对于平面系统，下面两条性质会引起同宿轨吸引周围轨线的情况出现：(i)鞍点 $\boldsymbol{p}$ 的不稳定流形 $\boldsymbol{W}^u(\boldsymbol{p})$ 的一支 Γ^+ 包含在稳定流形 $\boldsymbol{W}^s(\boldsymbol{p})$ 中，即 $\Gamma^+\subset\boldsymbol{W}^u(\boldsymbol{p})\cap\boldsymbol{W}^s(\boldsymbol{p})$；(ii)假设向量场的发散量在鞍点 $\boldsymbol{p}$ 为负，则从由 Γ^+ 所界的区域中的点 $\boldsymbol{q}_0$ 出发的轨线满足

$$\omega(\boldsymbol{q}_0) = \{\boldsymbol{p}\} \cup \Gamma^+.$$

例 5.4.6　下面是一个 $\mathbb{R}^3$ 中的微分方程组的例子，它的极限集是一个椭圆球并上一条线段，考虑微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta y + 2xz\\ \dot{y} &= \beta x + 2yz\\ \dot{z} &= 1 - x^2 - y^2 - z^2 + z(x^2 + y^2)\left(1 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2) - z^2\right),\end{aligned}$$ [168]

对应的柱面坐标形式为

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \beta\\ \dot{r} &= 2rz\\ \dot{z} &= 1 - r^2 - z^2 + zr^2\left(1 - \frac{1}{3}r^2 - z^2\right).\end{aligned}$$

这个例子是[**42**]中作为微分系统不动点的分叉引出的，它有一对纯虚特征值和一个零特征值.

首先在(r, z)空间$r\geqslant 0$的部分中来考虑系统，不动点是$(r, z)=(0, \pm 1)$和$(1, 0)$（其中不动点$(1, 0)$对应于$\mathbb{R}^3$中的周期轨道）．若使用检验函数

$$L(r,z) = r\left(1 - \frac{1}{3}r^2 - z^2\right),$$

则它关于时间的导数是

$$\dot{L} = -2r^2z^2L = \begin{cases} >0 & L<0 \text{ 且 } z\neq 0 \\ =0 & L=0 \\ <0 & L>0 \text{ 且 } z\neq 0. \end{cases}$$

从而等位线集

$$L^{-1}(0) = \{(0,z)\} \cup \left\{(r,z): 1 = \frac{1}{3}r^2 + z^2, r\geqslant 0\right\}$$

是不变集，它表示z轴与一个半椭圆的并．在椭圆内部，由$r>0$和$z\neq 0$可知$L>0$且$\dot{L}<0$，从而包含在集合$\{z=0\}$内的轨线只有不动点$(1, 0)$，因此从点$\boldsymbol{p}_0=(r_0, z_0)\neq(1, 0)$出发的轨线$\phi(t;\ \boldsymbol{p}_0)$都趋向于$L^{-1}(0)$，即半椭圆并上$z$轴介于$z=-1$与$z=+1$之间的线段，所以

$$\omega(\boldsymbol{p}_0) = \{(0,z): -1\leqslant z\leqslant 1\} \cup \left\{(r,z): 1 = \frac{1}{3}r^2 + z^2, r\geqslant 0\right\} \subset L^{-1}(0).$$

转换到$\mathbb{R}^3$中，系统有两个不动点：$(x, y, z)=(0, 0, \pm 1)$，以及一个周期轨道：$z=0$，$r=1$，θ任意；而平面上的半椭圆对应于$\mathbb{R}^3$中的一个椭球，

$$L^{-1}(0) = \{(0,0,z)\} \cup \left\{(x,y,z): 1 = \frac{1}{3}(x^2+y^2) + z^2\right\}.$$

设$\boldsymbol{q}_0$是椭球内的点，且不在z轴上，也不在周期轨道$z=0$和$r=1$上，通过在$\mathbb{R}^2$上的分析可知

$$\omega(\boldsymbol{q}_0) \subset \{(0,0,z): -1\leqslant z\leqslant 1\} \cup \left\{(x,y,z): 1 = \frac{1}{3}(x^2+y^2) + z^2\right\}.$$

因为轨线在不动点$(0, 0, \pm 1)$近旁缓慢经过，所以看上去ω极限集包含整个椭球和z轴那段．

169

■

5.5　梯度系统

能够很容易地观察出无周期轨道的一类例子就是梯度系统，令$G(\boldsymbol{x})$为$\mathbb{R}^n$中的实值向量函数，向量

$$\nabla G(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

表示在它点$\boldsymbol{x}$处的梯度（写成列向量的形式），我们称满足$\nabla G(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}$的点$\boldsymbol{x}^*$是函数$G(\boldsymbol{x})$的**临界点**（critical point）．

我们称下面的由实值向量函数$G(\boldsymbol{x})$产生的与梯度相关的微分方程组

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial G}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial G}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -\frac{\partial G}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}),$$

或向量形式的

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla G(\boldsymbol{x})$$

为微分方程梯度系统(gradient system of differential equations).

定理 5.5.1　考虑微分方程梯度系统$\dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla G(\boldsymbol{x})$，其中 $G(\boldsymbol{x})$为实值向量函数，则 G 是此系统(至少是在最小值点附近的)的李雅普诺夫函数. 更确切地说，$\dot{G}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$，其中$\dot{G}(\boldsymbol{x}) = 0$当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是不动点；除不动点以外，G 沿着解严格单调递减.

证明　因为

$$\dot{G} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i}\dot{x}_i,$$

或

$$\dot{G} = \nabla G(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = \nabla G(\boldsymbol{x}) \cdot (-\nabla G(\boldsymbol{x})) = -\|\nabla G(\boldsymbol{x})\|^2 \leqslant 0$$

可知在满足$\nabla G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 的点(即方程的不动点)处 G 关于时间导数为零，除不动点以外，$\dot{G} < 0$，从而 G 严格单调递减. ■

由多元微积分知梯度与等位面的切向量是垂直的，因此与等位面相切的向量满足$\nabla G(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

定理 5.5.2　设$\dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla G(\boldsymbol{x})$是一个微分方程梯度系统，则向量场$\nabla G(\boldsymbol{x})$与 G 的等位面除临界点外处处垂直(即向量场与等位面的任意切向量垂直).

170

证明　等位面的任一切向量 $\boldsymbol{v}$ 都可用其中的某一曲线的切向量表示，因此存在满足 $G(\boldsymbol{x}(s)) \equiv G_0$(是一常数)的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$使得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{x}(s)\bigg|_{s=0}.$$

则有

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G_0\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G(\boldsymbol{x}(s))\bigg|_{s=0} = \nabla G(\boldsymbol{x}(0)) \cdot \boldsymbol{v}.$$

从而$\nabla G(\boldsymbol{x}(0))$与 $\boldsymbol{v}$ 垂直. ■

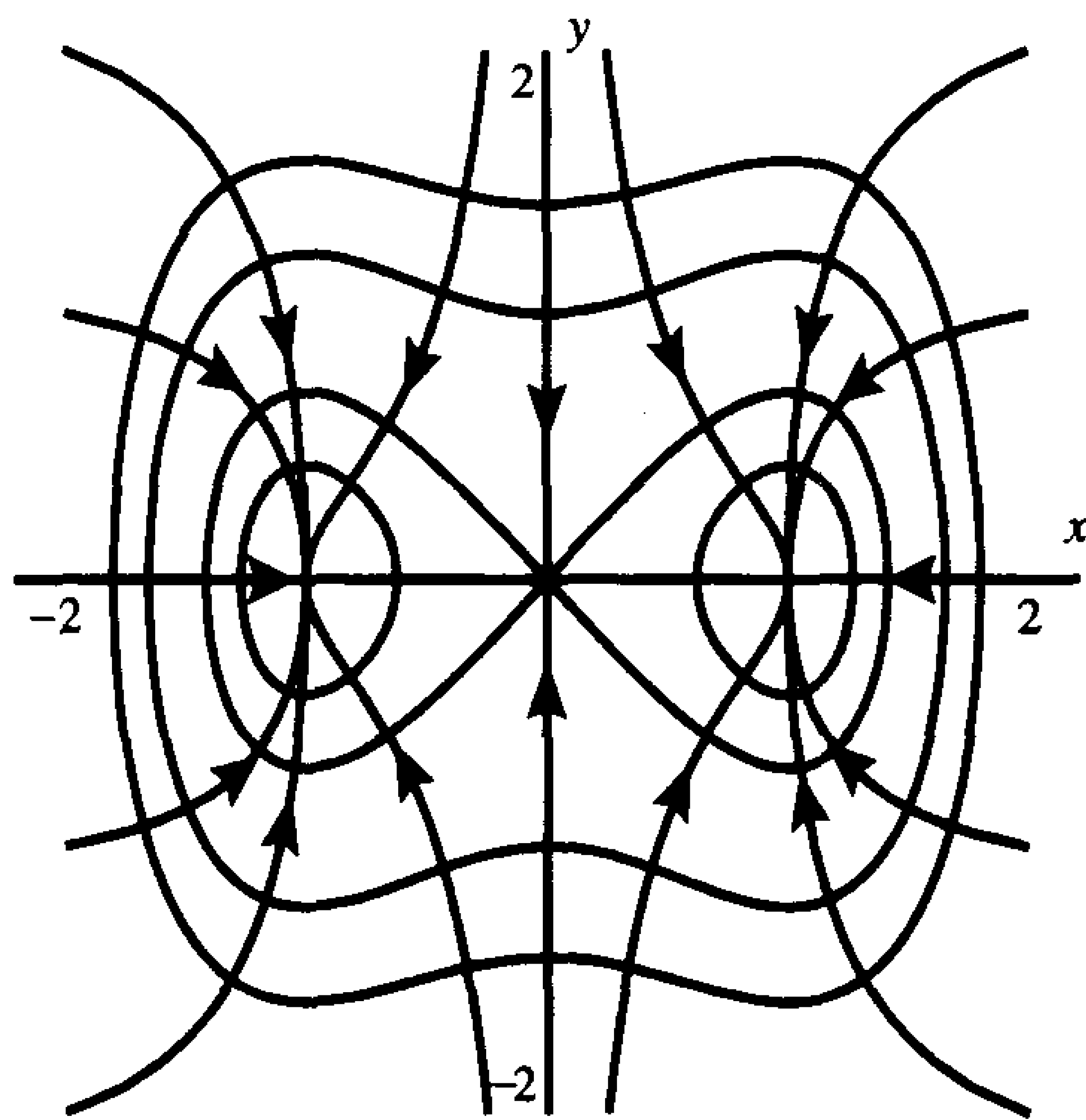
例 5.5.3　考虑出现于双井势(two-welled potential)的实值函数

$$G(x,y) = \frac{-x^2 + x^4 + y^2}{2}.$$

它有临界点(± 1, 0)和(0, 0)，其中(± 1, 0)是极小值点，(0, 0)是鞍点. 对应的梯度系统为

$$\dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = -y.$$

考虑到从 y 轴出发的解 $\phi(t;\ (0,\ y_0))=(0,\ y_0e^{-t})$ 直接趋向于原点处的鞍点，因此原点的稳定流形是 y 轴. 满足 $x_0>0$ 的解 $\phi(t;\ (x_0,\ y_0))$ 不能穿过原点的稳定流形，从而它只能呆在 $x>0$ 的半平面内，因此这些点一定收敛于(1, 0). 同理，若 $x_0<0$ 的解 $\phi(t;\ (x_0,\ y_0))$ 一定收敛于(−1, 0)，图 5.5.1 给出了 G 的等位线集和几条代表性的轨线.



171

图 5.5.1　例 5.5.3 的等位线集和轨线

■

下面的定理阐明了函数 G 的临界点类型与相应梯度系统的不动点类型间的密切关系.

定理 5.5.4　设 $\boldsymbol{x}^*$ 是实值函数 G 的临界点，从而 $\boldsymbol{x}^*$ 也是对应的梯度微分方程组的不动点，那么梯度系统不动点的特征值都是实数，(i)若临界点是 G 的极小值，则它是对应的梯度系统渐近稳定的不动点(汇(sink))；(ii)若临界点是 G 的鞍点，则它是对应的梯度系统的鞍点形不动点，从而是不稳定的；(iii)若临界点是 G 的极大值，则它是对应的梯度系统的源(source)，从而是不稳定的.

证明　梯度微分方程组的向量场是

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=-\nabla G(\boldsymbol{x})=\left(-\frac{\partial G}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right).$$

因此在不动点处的线性矩阵是

$$D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}=\left(-\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*)\right),$$

它是 G 的黑塞矩阵(Hessian)的负矩阵. 因为黑塞矩阵是对称矩阵，从而其特征值全为实数.

■

在 G 的极小值点处黑塞矩阵的特征值全为正数，从而 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})}$ 的特征值全为负数，因此对应的不动点是个汇且渐近稳定；在 G 的极大值点处黑塞矩阵的特征值全为负数，从而 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})}$ 的特征值全为正数，因此对应的不动点是个源；在 G 的鞍点处黑塞矩阵的特征值有正有负，从而 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})}$ 的特征值有正有负，因此对应的不动点是鞍点形不动点.

定理 5.5.5　设$\dot{x}=-\nabla G(\boldsymbol{x})$是一个微分方程梯度系统，若 z 是轨线的 ω 极限点或 α 极限点，则 z 是该系统的不动点.

证明　这个定理的证明本质上与定理 4.2.2 的证明相同，设 $z\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，则由定理 5.5.1 可知 $G(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$是递减的，存在趋向于无穷的时间序列 t_j 使得 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$收敛于 z. 不妨取 $t_1<t_2<\cdots<t_j<t_{j+1}<\cdots$，则有

$$G(\phi(t_1;\boldsymbol{x}_0))>G(\phi(t_2;\boldsymbol{x}_0))>\cdots>G(\phi(t_j;\boldsymbol{x}_0))>G(\phi(t_{j+1};\boldsymbol{x}_0))>\cdots.$$

由 G 的连续性可知 $G(\phi(t;\ x_0))$趋向于 $G(z)$，由单调性知 $G(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$不会小于 $G(z)$，从而必有$\dot{G}(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$ 趋向于零，再利用连续性可知$\dot{G}(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$趋向于$\dot{G}(z)$，因此$\dot{G}(z)=0$，即 z 是不动点. ■

这个定理说明梯度系统的 ω 极限点一定是不动点，事实上，因为鞍点的稳定流形维数低于系统的维数，从而大多数点都趋向于汇；又因为汇对应于 G 的最小值点，所以大多数点以 G 的最小值点为 ω 极限点，从而跟踪梯度系统的轨线是寻找 G 的最小值点的一个途径.

5.6　应用

5.6.1　非线性振子

5.2 节讨论了无阻尼力并阐明了能量守恒的原因，但没有讨论不同方程、不同物理振子间的关系，本节将讨论这一点.

172

考虑如下形式的方程

$$\ddot{x}=f(x)$$

或对应的方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=f(x).\end{aligned}\tag{5.6.1}$$

函数$f(x)$表示作用在质点上的力(为简便起见，取物体质量等于 1 或把它合并到f中去)，若是弹簧或其他类型的恢复力，一般都满足$f(-x)=-f(x)$，即f是奇函数. 对调和振子和其他线性振子来说，$f(x)=-\omega^2x$ 是一个线性的、奇的恢复力；对于例 5.2.3 中的单摆而言$f(x)=-\sin(x)$，是一个非线性的、奇的恢复力；例 5.2.1 的力$f(x)=x-x^3$ 是一个奇函数，但在位移较小时，这个力是排斥的，仅当位移 $|x|>1$ 时它才是收缩的；在例 5.2.4 中，$f(x)=-x-x^2$ 不是一个奇函数，当质点离开 $x=0$ 的位移为正时它的作用力与位移为负时的作用力相差很大.

若 $\boldsymbol{x}(t)=\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$是周期的，那么它的每一个坐标分量 $x_j(t)$都是周期的或是一个振荡，若形如(5.6.1)的非线性系统有从某些初始点出发的周期轨线，则称它为*无阻尼非线性振子*(undamped nonlinear oscillator)，或*振子*(oscillator). 按此定义，例 5.2.1、例 5.2.3 和例 5.2.4 都是无阻尼非线性振子. 而例 5.2.4 中的力不是奇函数，且它的轨线不环绕原点，因此这个系统不能称为振子.

达芬方程

包含一次项和三次项的最简单的奇函数是

$$f(x) = ax + bx^3.$$

与之相应的微分方程称为达芬方程(Duffing equation). 当$|x|$较小时，一次项起决定作用，当$|x|$很大时，三次项变得很大. 达芬方程的势能函数是

$$V(x) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{x^4}{4}.$$

与5.2节的例子相比，若$a<0$，则原点是中心；若$a<0$且$b<0$，则当$|x|$较大时，恢复力变得越来越大，这就是所谓的硬弹簧(hard spring). 此时，势能函数在$x=0$处有唯一的临界点且所有轨道都是周期的.

若$a<0$且$b>0$，则$|x|$越大，恢复力越小. 实际上，当$|x|$充分大时，作用力不是收缩的，而是排斥的，这就是所谓的软弹簧(soft spring). 此时，势能函数有三个临界点：$x=0$，$\pm\sqrt{|a/b|}$. $x=0$是V的极小值点，从而是微分方程组的中心；$x=\pm\sqrt{|a/b|}$是V的极大值点，从而对应微分方程组的鞍点. 在此系统中，原点被周期轨道所环绕，而其他非周期轨道都趋向于无穷，这与单摆方程很相似.

若$a>0$，则对小位移而言，力f是排斥力，势能函数在$x=0$处取极大值，从而原点是鞍点. 若$b<0$，则当$|x|$较大时，力f是恢复力，这就是所谓的双井势能，因此系统有两个中心：$(x, y)=(\pm\sqrt{|a/b|}, 0)$，参见例5.2.1. 有周期轨道分别环绕不动点$(\pm\sqrt{|a/b|}, 0)$，另一部分周期轨道环绕着三个不动点.

若$a>0$且$b>0$，则势能函数在$x=0$处有唯一的临界点，从而原点是方程唯一的不动点，且是一个鞍点. 这个系统对所有的位移都是排斥的.

173

幂6-12势

原子间的相互作用力就是用所谓的幂6-12势(six-twelve potential)模型来描述的，势能函数是

$$V(x) = \frac{a}{12x^{12}} - \frac{b}{6x^6},$$

作用力是

$$f(x) = -\frac{a}{x^{13}} + \frac{b}{x^7},$$

其中$a>0$且$b>0$，势能函数在$(a/b)^{1/6}$处有唯一的临界点，且是个极大值点. 当x趋向于零时，$V(x)$趋向于正无穷；当x趋向于无穷时，$V(x)$趋向于零. 因此方程有一个被周期轨道所环绕的中心. 满足$E(x, y)=V(x)+y^2/2>0$的点是无界的. 相图分析留作练习.

5.6.2 神经网络

神经网络是关于人的大脑的模型，在此模型中耦合在一起的很多个神经元分别衰退到某个稳定的状态. Holfield在[**53**]中讨论了一些模型并为之构造了李雅普诺夫函数. 令N表示神经元的个数，实变量x_i表示第i个神经元的状态，常数$c_i>0$用以测量第i个神经元在不受刺激时的衰退情况，矩阵$\boldsymbol{T}=(t_{i,j})$称为是联络矩阵(connection matrix)，用以确定第j个神经元是否影响第i个神经元，以及用何种方式施加影响. 如果$t_{i,j}>0$则表示这个影响是刺激性的；如果

$t_{i,j}<0$ 则表示这个影响是抑制性的；如果 $t_{i,j}=0$ 则表示它们之间无直接影响；典型情况下很多神经元互不影响，从而联络矩阵中很多元素为零. 函数 $f_j(x_j)$ 称为是神经元响应函数(neuron response function)，用以表示第 j 个神经元对其他神经元的有效作用，并用 $t_{i,j}f_j(x_j)$ 表示第 j 个神经元对第 i 个神经元的网络作用，假设函数 f_j 有界、可微且 $f_j'(x_i)>0$. 最后用常数 b_i 表示对第 i 个神经元的输入，这样便得到第 i 个神经元满足的方程

$$\dot{x}_i = -c_i x_i + \sum_{j=1}^{N} t_{i,j} f_j(x_j) + b_i,$$

或整个神经网络满足的微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}, \tag{5.6.2}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是主对角线元素为 c_i 的对角矩阵，向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(x_1),\cdots,f_n(x_n))^{\mathrm{T}}$ 且 $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，为方便起见，我们设 $\boldsymbol{T}$ 可逆且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$，因此

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}.$$

对 $\boldsymbol{T}$ 是对称矩阵的情况，Holfield 在[**53**]中构造出了李雅普诺夫函数，利用李雅普诺夫函数得到轨线趋向于不动点(在上面的假设下系统可能有多于一个的不动点). 假设 $\boldsymbol{T}$ 是对称矩阵不太符合实际，最近 A. Williams[**114**]推广到 $\boldsymbol{T}$ 是非对称矩阵的情况. 令

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_i c_i \int_0^{f_i(x_i)} f_i^{-1}(s)\,\mathrm{d}s.$$

174

则取李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}]. \tag{5.6.3}$$

我们在定理 5.6.1 中介绍这一结果.

定理 5.6.1 *考虑系统(5.6.2)，设函数 f_j 可微、有界且 $f_j'(x_i)>0$，再设联络矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可逆且对称，则(5.6.3)中的函数 $V(\boldsymbol{x})$ 是李雅普诺夫函数，除不动点外 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$，因此当时间趋于正无穷时所有解都趋向于不动点.*

证明 对 V 关于 t 求导，则有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \sum_i c_i f_i^{-1}(f_i(x_i)) f_i'(x_i)\,\dot{x}_i - \sum_i [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\,\dot{x}_i \\
&= [\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x})}\,\dot{\boldsymbol{x}} - [\boldsymbol{T}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x})}\,\dot{\boldsymbol{x}} \\
&= [\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x})}\,\dot{\boldsymbol{x}} \\
&= -\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x})}\,\dot{\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}$$

因为 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是主对角线元素 $f_i'(x_i)$ 皆为正的对角矩阵，所以 $\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 且 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 等于零当且仅当 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 等于零，证毕. ■

注 5.6.2 可以看出，若 $\boldsymbol{T}$ 不对称，则第二项的导数中出现 $\boldsymbol{T}$ 的对称部分，从而对 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的替换无法实现.

神经网络对任何一个输入 $\boldsymbol{b}$ 都会给出一个输出，定理 5.6.3 阐明了不同的输入会导致不同的输出.

定理 5.6.3　考虑系统(5.6.2)，设函数 f_j 可微、有界且 $f_j'(x_i)>0$，再设 $\boldsymbol{b}^1$ 和 $\boldsymbol{b}^2$ 是两个不同的输入即 $\boldsymbol{b}^1\neq\boldsymbol{b}^2$，则 $\boldsymbol{b}^1$ 对应的稳定态与 $\boldsymbol{b}^2$ 对应的稳定态不同.

证明　设 $\boldsymbol{b}^j$，$j=1$，2，对应的稳定态是 $\bar{\boldsymbol{x}}^j$，则

$$\boldsymbol{0}=-\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}^1+\boldsymbol{T}\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}^1)+\boldsymbol{b}^1$$

$$\boldsymbol{0}=-\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}^2+\boldsymbol{T}\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}^2)+\boldsymbol{b}^2,$$

从而

$$\boldsymbol{C}[\bar{\boldsymbol{x}}^1-\bar{\boldsymbol{x}}^2]+\boldsymbol{T}[-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}^1)+\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}^2)]=\boldsymbol{b}^1-\boldsymbol{b}^2.$$

可以看出，如果 $\bar{\boldsymbol{x}}^1=\bar{\boldsymbol{x}}^2$，则最后一个等式的左端等于零，因此 $\boldsymbol{b}^1=\boldsymbol{b}^2$，所以由 $\boldsymbol{b}^1\neq\boldsymbol{b}^2$ 可推出 $\bar{\boldsymbol{x}}^1\neq\bar{\boldsymbol{x}}^2$. ■

5.7　理论与证明

李雅普诺夫函数

定理 5.3.6　设 x^*，L 和 U 如前，其中 L 设为弱李雅普诺夫函数，定义

175

$$\boldsymbol{Z}_U=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}:\dot{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{x})=0\}.$$

并设 $\boldsymbol{U}$ 充分小使得对任意的 $\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{Z}_U\setminus\{\boldsymbol{x}^*\}$，轨线 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_1)$ 从 $\boldsymbol{x}_1$ 向前走时立即从 $\boldsymbol{Z}_U$ 进入 $\boldsymbol{U}\setminus\boldsymbol{Z}_U$(也就是说 $\{\boldsymbol{x}^*\}$ 是 $\boldsymbol{Z}_U$ 中最大的正不变集)，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是渐近稳定的.

进一步，若存在 $L_0>L(\boldsymbol{x}^*)$ 使得集合

$$\boldsymbol{U}_{L_0}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}:L(\boldsymbol{x})\leqslant L_0\}$$

是包含于 U 的有界集，则集合 $\boldsymbol{U}_{L_0}$ 包含于 $\boldsymbol{x}^*$ 的吸引区域中，即 $\boldsymbol{U}_{L_0}\subset W^s(\boldsymbol{x}^*)$.

证明　令 $L^*=L(\boldsymbol{x}^*)$，$L_0>L^*$ 使得集合

$$\boldsymbol{U}_{L_0}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}:L(\boldsymbol{x})\leqslant L_0\}$$

包含在 $\boldsymbol{U}$ 中、有界且与 $\boldsymbol{U}$ 的边界不相交，取 $\boldsymbol{x}_0\in U_{L_0}\setminus\{\boldsymbol{x}^*\}$，因为 $\boldsymbol{U}_{L_0}$ 是正不变集，所以整条轨线 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 都包含在 $\boldsymbol{U}_{L_0}$ 中. 因为 $\dot{L}\leqslant0$，所以随着 t 的增加 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$ 递减且以 L^* 为下界，因此当 t 趋向无穷时 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$ 有极限 L_∞ 且满足 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant L_\infty$，$t\geqslant0$.

若 $L_\infty=L^*$，考虑到

$$L^{-1}(L^*)\cap\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{x}^*\}.$$

则结论得证.

若 $L_\infty>L^*$，因为当 t 趋向于无穷时 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$ 有极限 L_∞，所以当 t 趋向于无穷时 $\dot{L}(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$ 一定趋向于零. 因为 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 有界，从而必存在某个点 z 使得 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 无数次地出现在 z 附近（这其实用到 $\boldsymbol{U}_{L_0}$ 的紧性），即存在趋向于无穷的时间序列 t_n 使得 $\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 z，因此 $L(\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0))$ 以 $L(z)$ 为极限，结合 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$ 收敛于 L_∞ 可知，$L(z)=L_\infty$，又因为 $\dot{L}(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$ 收敛于零，所以 $\dot{L}(z)=0$，从而 z 属于集合

$$\boldsymbol{Z}_U\cap L^{-1}(L_\infty)\subset\boldsymbol{U}_{L_0}.$$

因为 $z\neq\boldsymbol{x}^*$，由定理条件可知存在数值小的时刻 $\hat{t}>0$ 使得 $\phi(\hat{t};\ z)$ 离开 $\boldsymbol{Z}_U$，且 $L(\phi(\hat{t};\ z))$ 必

定小于 L_∞. 由 $\phi(\hat{t}+t_n;\ \boldsymbol{x}_0)=\phi(\hat{t};\ \phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0))$ 收敛于 $\phi(\hat{t};\ z)$ 可知 $L(\phi(\hat{t}+t_n;\ \boldsymbol{x}_0))$ 收敛于 $L(\phi(\hat{t};\ z))<L_\infty$，这与 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant L_\infty$，$t\geqslant 0$ 矛盾，因此 $L_\infty=L^*$ 且轨线收敛于 $\boldsymbol{x}^*$. ■

极限集

定理 5.4.3　设 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 是一条轨线，则下面 ω 极限集的性质成立：

(i) 极限集只依赖于轨线而不依赖于特定点，因此对任意的 t，有 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\omega(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$.

(ii) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是不变集：若 $z_0\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，则对所有的正 t 或负 t，轨线 $\phi(t;\ z_0)$ 都属于 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

(iii) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是闭集(即 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 包含它所有的极限点).

(iv) 若 $\boldsymbol{y}_0\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，则有 $\omega(\boldsymbol{y}_0)\subset\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

另外，若 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 对 $t\geqslant 0$ 是有界的(即存在常数 C，使得 $\|\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)\|\leqslant C$，$t\geqslant 0$)，那么下面的(v)和(vi)也成立：

(v) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 非空.

(vi) $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是连通的，即它不能由多块区域组成.

若 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 对 $t\leqslant 0$ 是有界的，那么 α 极限集有类似的性质.　[176]

证明　(i) 设 $z_0\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，则存在趋向于无穷的时间序列 t_n 使得 $\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 z_0，那么 $\phi(t_n-t;\ \phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))=\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 z，因此 $z\in\omega(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$，$\omega(\boldsymbol{x}_0)\subset\omega(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$，交换 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 的地位，便可得到包含关系 $\omega(\boldsymbol{x}_0)\supset\omega(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))$，结论(i)得证.

(ii) 设 $z_0\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，则存在趋向于无穷的时间序列 t_n，使得 $\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 z_0，由流的连续性可知 $\phi(t_n+t;\ \boldsymbol{x}_0)=\phi(t;\ \phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0))$ 收敛于 $\phi(t;\ z_0)$，从而 $\phi(t;\ z_0)\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

(iii) 设 z_j 是 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 中的一列点，它收敛于 $\mathbb{R}^n$ 中的点 z_∞，事实上，不妨设

$$\|z_j-z_\infty\|<\frac{1}{j}.$$

因为 z_j 中的每一个点都是 ω 极限点，所以存在时间序列 $t_{j,n}$ 使得

$$\|\phi(t_{j,n};\boldsymbol{x}_0)-z_j\|<\frac{1}{n}.$$

从而

$$\|\phi(t_{n,n};\boldsymbol{x}_0)-z_\infty\|\leqslant\|\phi(t_{n,n};\boldsymbol{x}_0)-z_n\|+\|z_n-z_\infty\|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}.$$

考虑到 $2/n$ 可以任意小，点 $\phi(t_{n,n};\ \boldsymbol{x}_0))$ 收敛于 z_∞，从而 $z_\infty\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

(vi) 设 $z_0\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，$\boldsymbol{y}$ 是 z_0 的 ω 极限点，则存在趋向于无穷的时间序列 t_n 使得 $\phi(t_n;\ z_0)$ 收敛于 $\boldsymbol{y}$，由(ii)知对所有的 n，点 $\phi(t_n;\ z_0)$ 都属于 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$，而由(iii)知 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是闭集，考虑到 $\phi(t_n;\ z_0)$ 收敛于 $\boldsymbol{y}$，从而 $\boldsymbol{y}\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，这说明 z_0 的任意极限点都属于 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$，或 $\omega(z_0)\subset\omega(\boldsymbol{x}_0)$.

(v) 因为序列 $\phi(n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 有界，所以存在常数 $C>0$ 使得 $\|\phi(n;\ \boldsymbol{x}_0)\|\leqslant C$，利用集合

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|\leqslant C\}$$

的紧性可知，存在 $\phi(n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 的子序列 $\phi(n_k;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 $\mathbb{R}^n$ 中的某个点 z，则 z 一定是 z_0 的一个 ω 极限点. 关于 $\mathbb{R}^n$ 中集合的紧性及有界序列收敛性的知识可参见实分析方面的书[**64**]、

[**65**]或[**71**].

(vi)假设 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 不是连通的且可分成两部分，则存在不相交的两个开集 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 使得 $\omega(\boldsymbol{x}_0)\subset\boldsymbol{U}_1\cup\boldsymbol{U}_2$ 且 $\omega(\boldsymbol{x}_0)\cap\boldsymbol{U}_j\neq\varnothing$，$j=1$，2.(直觉告诉我们 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 的距离是个正数，但这一点此时用不到，我们仅假设它们都是开集，就可说明一条曲线从其中一个集合到另一个集合必经过不属于两个集合的点.)则当时间足够大后，$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 必须既要靠近 $\boldsymbol{U}_1$ 中的点又要靠近 $\boldsymbol{U}_2$ 中的点，从而存在趋向于无穷的时间序列 t_n 使得 $\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 既不属于 $\boldsymbol{U}_1$ 也不属于 $\boldsymbol{U}_2$，因为轨线有界，所以必存在子序列 t_{n_k} 使得 $\phi(t_{n_k};\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于某点 z，它既不属于 $\boldsymbol{U}_1$ 也不属于 $\boldsymbol{U}_2$. 这与 $\omega(\boldsymbol{x}_0)\subset\boldsymbol{U}_1\cup\boldsymbol{U}_2$ 矛盾. ■

最后给出定理 5.3.6 的另一种证法.

定理 5.3.6 的证明　令 $L^*=L(\boldsymbol{x}^*)$，$L_0>L^*$ 使得集合

$$\boldsymbol{U}_{L_0}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}:L(\boldsymbol{x})\leqslant L_0\}$$

177 包含在 $\boldsymbol{U}$ 中、有界且与 $\boldsymbol{U}$ 的边界不相交. 下面证明 $\boldsymbol{U}_{L_0}\subset W^s(\boldsymbol{x}^*)$.

取 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{U}_{L_0}\setminus\{\boldsymbol{x}^*\}$，随着 t 的增加 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 递减且以 L^* 为下界，因此 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 有极限 L_∞ 且满足 $L(\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0))\geqslant L_\infty$，$t\geqslant0$.

因为轨线包含在 $\boldsymbol{U}_{L_0}$ 中，所以 ω 极限集 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 非空，对任意点 $z\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，存在趋向于无穷的时间序列 t_n 使得 $\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 z，因此 $L(\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0))$ 以 $L(z)$ 为极限也以 L_∞ 为极限，从而对 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 中的任意一点有 $L(z)=L_\infty$.

任取 $z\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$，因为 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是不变集，所以对 $t\geqslant0$，$\phi(t;\ z)$ 包含在 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 中，从而

$$L(\phi(t;z))\equiv L_\infty,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(\phi(t;z))\equiv0,$$

且对 $t\geqslant0$，$\phi(t;\ z)$ 包含在 $\boldsymbol{Z}_U$ 中，又因为 $\{\boldsymbol{x}^*\}$ 是 $\boldsymbol{Z}_U$ 中最大的正不变集，所以 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 只含有一个点 $\boldsymbol{x}^*$，即 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\{\boldsymbol{x}^*\}$，而且轨线 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 $\boldsymbol{x}^*$. ■

练习

5.1　捕食者-食饵系统

5.1.1　考虑没有出生和死亡的 SIR 传染病模型

$$\dot{S}=-\beta SI$$

$$\dot{I}=\beta SI-\gamma I.$$

(与 4.6 节给出的方程相比，因为不考虑死亡和天灾，所以这里 $\mu=0$，$\alpha=0$；因为不考虑出生所以 $\mu K=0$.)这里未包含方程 $\dot{R}=\gamma I$ 是因为在 $I(t)$ 已知的情况下该方程是可解的.

a. 找出系统的零倾线及不动点.

b. 证明存在沿轨线是常数的实值函数 $G(S,\ I)$，提示：考虑 $\dot{I}/\dot{S}$.

c. 利用 $G(S,\ I)$ 画出 $S\geqslant0$，$I\geqslant0$ 时的相图，提示：把 I 看作 S 的函数画出 G 的等位线.

5.1.2　考虑带有生长限制项的捕食者-食饵系统

$$\dot{x}=x(a-by-mx)$$

$$\dot{y} = y((-c + ex - ny),$$

其中所有常数都取正值，即 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$e>0$，$m>0$ 及 $n>0$，并设 $a/m>c/e$.

a. 证明存在满足 $x^*>0$ 和 $y^*>0$ 的不动点(x^*, y^*).

b. 证明(x^*, y^*)是渐近稳定的.

c. 画出 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 时的相图(可利用该系统没有周期轨这一事实，这一点并不是显然的，参见例 6.7.9).

178

5.2 无阻尼强迫振荡

5.2.1 考虑微分方程组

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + x^3.$$

a. 找出系统不动点.

b. 找出势能函数 $V(x)$并画出其图像，对不动点进行分类.

c. 画出系统的相图.

5.2.2 考虑微分方程组

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + x^2.$$

a. 找出系统不动点.

b. 找出势能函数 $V(x)$并画出其图像，对不动点进行分类.

c. 画出系统的相图.

5.2.3 考虑常转矩单摆系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\sin(x) + L,$$

其中 $0<L<1$.

a. 找出系统不动点. 提示：可能无法得到不动点坐标的精确值，给出表达式即可. 不动点的横坐标落在$[0, \pi/2]$、$[\pi/2, \pi]$、$[\pi, 3\pi/2]$和$[3\pi/2, 2\pi]$哪些区间中?

b. 找出势能函数 $V(x)$并画出其图像，对不动点进行分类，提示：临界点(导数为零的点)与系统的不动点有对应关系.

c. 画出系统的相图.

d. 当 $L=1$ 和 $L>1$ 时结论有何不同? 当 $0>L>-1$，$L=-1$ 和 $L<-1$ 时，结论又如何?

5.2.4 考虑微分方程组

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x(x-1)(x+2)(x^2-0) = -x^5 - x^4 + 11x^3 + 9x^2 - 18x.$$

a. 找出系统不动点.

b. 找出势能函数 $V(x)$并画出其图像，对不动点进行分类. 提示：$V(-2)>V(1)$.

c. 画出系统的相图.

5.3 阻尼系统的李雅普诺夫函数

5.3.1 考虑系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + x^3 - y.$$

a. 利用李雅普诺夫函数找出 **0** 的吸引域的一个子集(足够大).

b. 分析解趋向于不动点的原因.

179

c. 手工画出相图.

d. 选取代表性的初始点用计算机程序画出相图，要选取足够多的初始点以保证揭示系统的重要特征，包括任意鞍点的稳定流形和不稳定流形.

5.3.2 考虑系统

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3 - y.$$

a. 利用李雅普诺夫函数找出 **0** 的吸引域的一个子集(足够大).

b. 分析解趋向于不动点的原因.

c. 手工画出相图.

d. 选取代表性的初始点用计算机程序画出相图，要选取足够多的初始点以保证揭示系统的重要特征，包括任意鞍点的稳定流形和不稳定流形.

5.3.3 考虑微分方程组

$$\dot{x} = -x^3 + xy^2$$
$$\dot{y} = -2x^2y - y^3.$$

令 $L(x, y) = x^2 + y^2$.

a. 证明 L 是李雅普诺夫函数.

b. $\dot{L}$ 能说明系统的解是何种特性?

5.3.4 考虑食物链上三个种群的 Lotka-Volterra 方程

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) = x_1 w_1$$
$$\dot{x}_2 = x_2(r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3) = x_2 w_2$$
$$\dot{x}_3 = x_3(r_3 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3) = x_3 w_3,$$

其中 $r_i > 0$，$a_{ij} > 0$，ω_i 定义为所在行圆括弧中的量.（可以看出 (i)x_1 和 x_2对 x_1 的生长率有消极影响；(ii)x_1 对 x_2 的生长率有积极影响且 x_2 对 x_3 的生长率有消极影响；(iii)x_2 对 x_3 的生长率有积极影响且 x_3 对自身的生长率有消极影响，因此称之为食物链.)假设系统有平衡点(p_1, p_2, p_3)，$p_i > 0$，从而

$$r_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2$$
$$r_2 = -a_{21}p_1 + a_{22}x_2 + a_{23}p_3$$
$$r_3 = -a_{32}p_2 + a_{33}p_3.$$

a. 证明 ω_i 可表示成

$$w_1 = -a_{11}(x_1 - p_1) - a_{12}(x_2 - p_2)$$
$$w_2 = a_{21}(x_1 - p_1) - a_{22}(x_2 - p_2) - a_{23}(x_3 - p_3)$$
$$w_3 = a_{32}(x_2 - p_2) - a_{33}(x_3 - p_3).$$

b. 定义函数

180

$$V(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} c_i(x_i - p_i \ln(x_i)),$$

其中 $c_i > 0$ 且满足

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \quad 和 \quad \frac{c_3}{c_2} = \frac{a_{23}}{a_{32}}.$$

证明

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^{3} c_i a_{ii}(x_i - p_i)^2.$$

c. 证明不动点(p_1, p_2, p_3)的吸引区域包含第一卦限

$$\{(x_1,x_2,x_3):x_1 > 0,x_2 > 0,x_3 > 0\}.$$

5.4 极限集

5.4.1 给出例 5.2.1 的 ω 极限集和 α 极限集.

5.4.2 考虑微分方程组

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -(x + x^2) - y(3y^2 + 3x^2 + 2x^3 - 1).$$

给出其 ω 极限集和 α 极限集. 提示：利用检验函数

$$L(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

5.4.3 设 L 是$\mathbb{R}^n$ 中的系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的弱李雅普诺夫函数，并设从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的正半轨有界，证明对所有的 $\boldsymbol{y} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$有$\dot{L}(\boldsymbol{y}) = 0$.

5.4.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是个有界闭集且是流 $\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x})$的不变集，并设 $\boldsymbol{A}$ 没有非空的、不变的真子集.

a. 证明每一条轨线在 $\boldsymbol{A}$ 中是稠密的.

b. 证明对 $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{A}$ 有 $\omega(\boldsymbol{x}_0) = \alpha(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}$.

5.5 梯度系统

5.5.1 考虑实值函数

$$G(x_1,x_2) = -x_1^2 + x_2^2.$$

画出梯度系统$\dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla G(\boldsymbol{x})$的相图，并在其中画上几条代表性的函数 G 的等位线.

5.5.2 考虑实值函数

$$G(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 - x_1^4 + x_2^2}{2}.$$

画出梯度系统$\dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla G(\boldsymbol{x})$的相图，并在其中画上几条代表性的函数 G 的等位线.

5.5.3 考虑实值函数

$$G(x_1,x_2) = \frac{3x_1^2 - 2x_1^3 + 3x_2^2}{6}.$$

画出梯度系统$\dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla G(\boldsymbol{x})$的相图，并在其中画上几条代表性的函数 G 的等位线.

5.5.4 证明直线上的微分方程$\dot{x} = f(x)$都是梯度系统，并求函数 $G(x)$满足$f(x) = -G'(x)$.

181

5.6 应用

5.6.1 考虑幂 6-12 势的微分方程组

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - \frac{a}{x^{13}} + \frac{b}{x^7},$$

其中 $a > 0$, $b > 0$.

a. 找出势能函数 $V(x)$并画出其图像，对不动点进行分类.

b. 画出系统的相图.

182

第6章 周 期 轨

已经考虑过的系统中有一些含有周期轨，而周期轨是本章研究的重点. 在6.1节，我们给出周期轨的基本定义和具有周期轨道的若干例子，这些例子的极坐标方程比较简单，通过其极径分量即可说明存在周期轨；6.2节介绍了平面微分方程的一个一般结论，即庞加莱-本迪克松定理，该定理说明既远离不动点又不趋于无穷远的轨线一定趋于一个周期轨，尽管这一结论只在二维空间成立，但它是证明某些系统存在周期轨的一个重要途径. 在许多应用中往往是要找出这样一个区域，其内含有一个排斥的不动点，而且吸引由某个检验函数控制的大范围的轨线，则在该区域内至少存在一个周期轨. 6.3节考虑一类具有唯一吸引的周期轨的非线性振子，这类方程在原点有一个排斥的不动点，却在一垂直带域之外有吸引作用，即系统能量在带域内加进系统时，其大振幅的轨线很快穿过这一带域，而能量在该域减少时这些轨线于此域内经历较长的时间. 必要的计算表明当大振幅的轨线围绕原点处的不动点转一周时，系统能量总体上是损耗的.

接下来的两节研究通过改变参数而产生周期轨的机制. 第一种“分支”是从不动点产生的周期轨，称为*安德罗诺夫-霍普夫分支*. 有应用背景的许多系统都会出现安德罗诺夫-霍普夫分支，本章只给出两个例子. 在第7章我们会看到洛伦兹系统也会有这种现象. 第二种“分支”是由同一点的 α 极限集和 ω 极限集的轨线产生的周期轨，称为*同宿分支*. 这种分支并不像安德罗诺夫-霍普夫分支那样经常发生，但它却是产生周期轨的另外一种方式. 这种方式在第7章中的洛伦兹系统也会出现.

6.6节讨论微分方程确定的向量场的发散量与流在相空间中的区域的面积或体积的改变方式之间的关系. 所获结论可用于证明某些平面微分系统在某平面区域内不存在完整的周期轨，也可用来讨论第7章中的混沌吸引子. 6.7节回到稳定周期轨并建立其与由绕周期轨旋转一周所得函数之联系，这一函数即所谓的庞加莱映射，它在6.1节的例子中先引出来，且在6.3节研究李纳方程时起重要作用.

6.1 定义与例题

设 $\phi(t;\ x_0)$ 是微分方程 $\dot{x}=F(x)$ 的解. 在3.1节中定义了：满足 $\phi(T;\ x_0)=x_0$，$\phi(t;\ x_0)\neq x_0\ (0<t<T)$ 的点 x_0 称为周期为 T 的*周期点*. 如果 x_0 是这样的点，则集合 $\{\phi(t;\ x_0):\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 称为*周期轨*或*闭轨*. 称其为周期轨是由于其流关于时间 t 是周期的，即 $\phi(t+T;\ x_0)=\phi(t;\ x_0)$；称其为闭轨是由于其上的所有点构成闭集，且经过时间 T 后轨线封闭，使得整条轨线 $\{\phi(t;\ x_0):\ -\infty<t<+\infty\}$ 是闭集(闭集的定义见附录B).

定义 6.1.1 *如同不动点是 L 稳定的或渐近稳定的一样，周期轨也有不同类型的稳定性. 对于周期轨 $\gamma=\{\phi(t;\ x_0):\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 γ 的 δ 邻域内的任一点 x_0，都有 $\phi(t;\ x_0)$ 的正半轨位于 γ 的 ε 邻域内，则称 γ 为依轨道 L 稳定的，即从周期轨附近的任一点出发的解的正向仍在其附近. 类似地，若存在 $\delta_1>0$，使得对于 γ 的 δ_1 邻域内*

的任一初始值 $\boldsymbol{x}_0$，都有 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 与 γ 之间的距离当 $t\to\infty$ 时趋于零(即，$\omega(\boldsymbol{x}_0)=\gamma$)，则称 γ 为依轨道弱渐近稳定的. 若 γ 既是依轨道 L 稳定的又是依轨道弱渐近稳定的，则称 γ 为轨道渐近稳定的. 注意到定义并没有要求闭轨附近轨道上的解趋近于闭轨上的某个解，而仅仅是轨道本身趋于闭轨. 这一事实正是定义中使用"依轨道"的原因. 一个轨道渐近稳定周期轨又称为周期汇或者吸引的周期轨.

若周期轨道不是依轨道 L 稳定的，则称为轨道不稳定的，即存在 $\varepsilon_0>0$，又存在充分接近 γ 的初值 $\boldsymbol{x}_j$，和 $t_j>0$，使得 $\phi(t_j;\ \boldsymbol{x}_j)$ 与 γ 的距离大于 ε_0.

一周期轨称为排斥的，只要当 $t\to-\infty$ 时满足类似于依轨道 L 稳定与弱渐近稳定的条件. 即任取 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 γ 的 δ 邻域内的任一初值 $\boldsymbol{x}_0$，都有 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)(t\leqslant 0)$ 位于 γ 的 ε 邻域内，且 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 与 γ 之间的距离当 $t\to-\infty$ 时趋于零(即，$\alpha(\boldsymbol{x}_0)=\gamma$). 排斥的周期轨又称为周期源.

比如钟摆的周期轨是依轨道 L 稳定的而不是渐近稳定的(因为它们出现于变周期的周期轨族中).

平面上的周期轨或是含于一周期族中，如钟摆方程，或是孤立的(即附近的轨线都不是周期的). 后者称为**极限环**，即极限环是平面微分方程的孤立的周期轨. 在极限环的每一侧，其他轨线以螺旋式趋近或远离(即在每一侧，轨线的 ω 极限集或 α 极限集等于周期轨). 如果两侧的轨线都以螺旋式趋近于周期轨，则按上述定义周期轨就是吸引的或是轨道渐近稳定的；如果两侧的轨线都以螺旋式远离，则周期轨就是排斥的. 最后若是一侧吸引而另一侧排斥，则周期轨是轨道不稳定的，并称为**轨道半稳定的**.

例 5.4.1 就是最简单的吸引的周期轨的例子，在那里是通过极坐标分析得到的. 184

下面我们考虑一例，它易于用极坐标分析，然后提一下将在 6.3 节中考虑的范德波尔(Van der Pol)微分方程组，具有周期轨的一个较复杂的例子稍后会给出.

例 6.1.2 类似于例 5.4.1，易用极坐标分析下述方程组，用直角坐标表示，方程为

$$\dot{x}=y+x(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2)$$
$$\dot{y}=-x+y(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2),$$

其相应的极坐标形式为

$$\dot{r}=r(1-r^2)(4-r^2)$$
$$\dot{\theta}=-1.$$

无需求出显式解，但考虑到 $\dot{r}$ 的符号有

$$\dot{r}\begin{cases}>0, & 0<r<1\\ <0, & 1<r<2\\ >0, & 2<r.\end{cases}$$

因此对于初始值 r_0，当 $0<r_0<2$ 时，$r(t;\ r_0)\to 1\ (t\to\infty)$；当 $r_0>2$ 时，$r(t;\ r_0)\to\infty\ (t\to\infty)$ 且 $r(t;\ r_0)\to 2\ (t\to-\infty)$. 在直角坐标系下方程有一个吸引的极限环 $r=1$ 和一个排斥的极限环 $r=2$. 参见图 6.1.1.

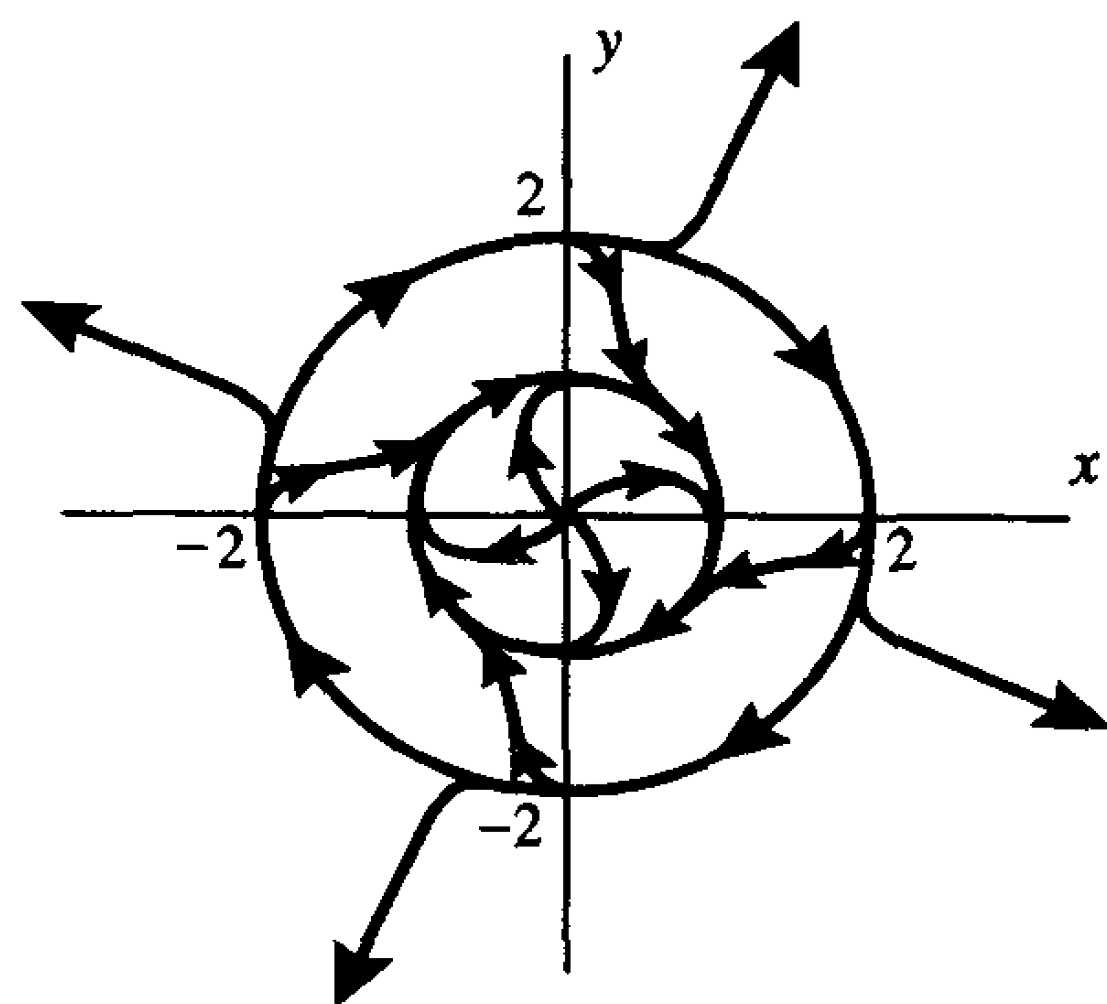


图 6.1.1 例 6.1.2 的相图

■

例 6.1.3(范德波尔)　稍微复杂的一个例子是下述范德波尔方程：

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0,$$

等价于下列微分方程组

$$\dot{x}=v$$

185

$$\dot{v}=-x+\mu(1-x^2)v.$$

若 $x^2<1$，则 $\mu(1-x^2)>0$ 且速度方向的作用是强迫的或“反摩擦”的，利用极坐标有

$$\begin{aligned} r\dot{r}&=x\dot{x}+v\dot{v}\\ &=xv-vx+\mu(1-x^2)v^2 \qquad \text{或} \end{aligned}$$

$$\dot{r}=\frac{v^2(1-x^2)}{r}.$$

因此，

$$\dot{r}=\begin{cases}>0 & -1<x<1\\ <0 & |x|>1.\end{cases}$$

这表明没有完全含于带域 $|x|<1$ 内的周期轨．我们将在 6.3 节中证明一定有跨越带域 $|x|>1$ 和 $|x|\leqslant 1$ 的周期轨．参见图 6.3.1.　■

在本章及本书后面多次利用微分方程定义这样一个函数：在相平面一直线上取定一点，从该点出发的轨线再次回到该直线上的一点，由这一点所定义的函数称为*首次返回映射*或*庞加莱映射*．这里只简要给出思路，在 6.7 节我们将完整地研究这种映射的结构．对于范德波尔方程，在正 y 轴 $\{(0,y):y>0\}$ 上取一初始值，沿着轨线 $\phi(t,(0,y))$ 直到经过时间 $T(y)$ 后再次与正 y 轴相交，这样第一次返回的点就定义为庞加莱映射：$\phi(T(y),(0,y))=(0,P(y))$．更多细节将在 6.3 节讨论．下面仍用例 5.4.1 这个简单的方程来阐述这种思想.

例 6.1.4(例 5.4.1 的庞加莱映射)　微分方程为

$$\dot{x}=y+x(1-x^2-y^2)$$

$$\dot{y}=-x+y(1-x^2-y^2),$$

其极坐标形式为

$$\dot{r}=r(1-r^2)$$

$$\dot{\theta}=-1.$$

下面讨论从 x 轴正半轴 $\{(x,0);x>0\}$ 出发的轨线的返回映射．在极坐标系下，这等价于计算从 $\theta=0$ 到 $\theta=-2\pi$ 的解.

分离变量，等式两边分别对 r 和 t 进行积分得

$$2\int_{r_0}^{r(t)}\frac{1}{r(1-r^2)}\mathrm{d}r=\int_0^t 2\mathrm{d}t$$

$$\ln\left(\frac{r(t)^2}{1-r(t)^2}\right)-\ln\left(\frac{r_0^2}{1-r_0^2}\right)=2t.$$

186

解出 $r(t)$，有

$$r(t)^2 = \frac{r_0^2 e^{2t}}{1 - r_0^2 + r_0^2 e^{2t}} = \frac{1}{1 + e^{-2t}(r_0^{-2} - 1)}$$

$$r(t) = r_0 [r_0^2 + e^{-2t}(1 - r_0^2)]^{-\frac{1}{2}} = [1 + e^{-2t}(r_0^{-2} - 1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

关于 θ 的解为

$$\theta(t) = \theta_0 - t.$$

这样，围绕原点由 $\theta = 0$ 到 $\theta = -2\pi$ 经历了时间 2π. 于是首次返回后的半径为

$$r_1 = r(2\pi) = [1 + e^{-4\pi}(r_0^{-2} - 1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

换句话说，即在半直线 $\{\theta = 0, r_0 > 0\}$ 上取一点 r_0，从 r_0 出发的轨线再次回到该半直线上的点 $r_1 = P(r_0) = r(2\pi)$，这就是*庞加莱映射*. 构造庞加莱映射的这条半直线称为*截线*. 在本例中，有

$$\begin{aligned} P(r_0) &= r(2\pi) \\ &= r_0 [r_0^2 + e^{-4\pi}(1 - r_0^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= r_0 [1 - (1 - e^{-4\pi})(1 - r_0^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= [1 + e^{-4\pi}(r_0^{-2} - 1)]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

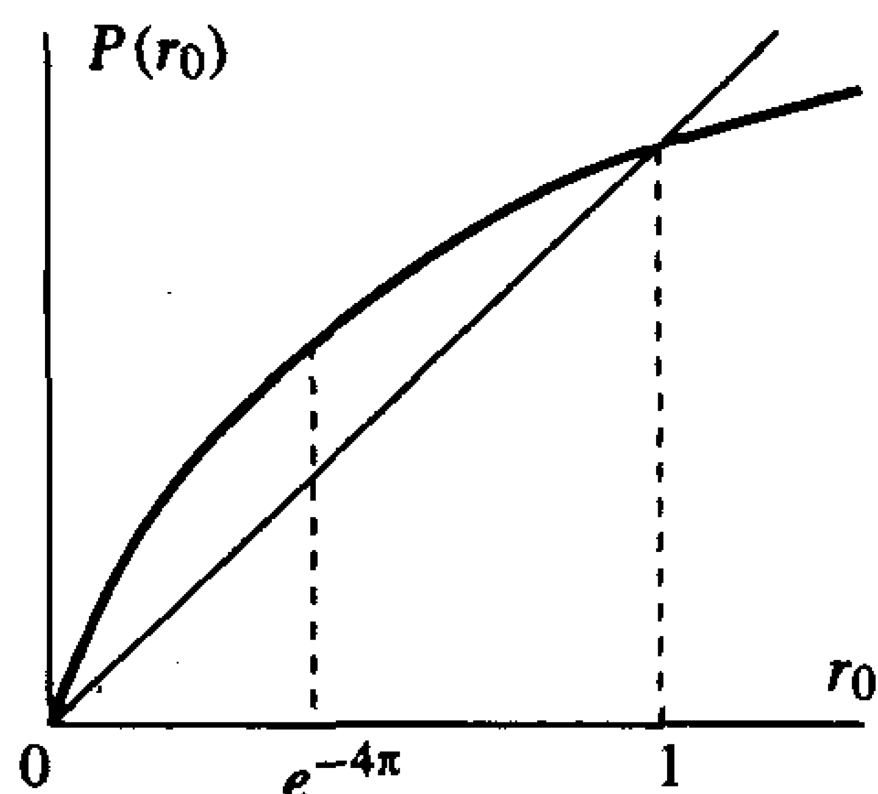


图 6.1.2 例 6.1.4 的庞加莱映射

在 6.7 节中，我们将完整地讨论映射 P 的图像的性质. 但对于本例，不难看出图 6.1.2 所示 P 的图像基本正确. 由 $P(r_0)$ 的第一式易知点 $r = 0$ 和 $r = 1$ 返回到它们自己，$P(0) = 0$ 且 $P(1) = 1$，对于其他初始值都有 $P(r_0) \neq r_0$. 在 6.7 节中利用庞加莱映射可证周期轨 $r = 1$ 是轨道渐近稳定的且吸引除原点外的所有轨线. ■ 187

6.2 庞加莱-本迪克松定理

在 6.1 节，我们考虑了几个利用极坐标方程即可得到极限环的简单例子. 本节我们给出一个稍复杂的例题，它的极限环不是一个圆，且不易确定，而是存在一个环域，轨线与其内外边界相遇时都进入其内，使得环域内部一定存在极限环. 事实上，这些结果可以从一般的庞加莱-本迪克松定理推得.

例 6.2.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + y(4 - x^2 - 4y^2), \end{aligned}$$

在第二个方程中含有项 $y(4 - x^2 - 4y^2)$，该项当 $\|(x, y)\|$ 充分小时与 y 同号(反摩擦)，当 $\|(x, y)\|$ 充分大时与 y 异号(摩擦)，其作用就像广义非线性摩擦. 虽然可以用极坐标的极径来分析系统的性态，但这里我们引入检验函数 $L(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，其关于时间 t 的导数为

$$\dot{L} = y^2(4 - x^2 - 4y^2) = \begin{cases} \geq 0 & 2L(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \\ \leq 0 & 2L(x,y) = x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

上述不等式说明环域

$$\mathcal{A}=\left\{(x,y):\frac{1}{2}\leqslant L(x,y)\leqslant 2\right\}$$

是正不变的，唯一的不动点(原点)不在$\mathcal{A}$内，由下述定理可知$\mathcal{A}$内有一个周期轨. 原因就是在外边界 $L^{-1}(2)$上有阻尼项，而在内边界 $L^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$上有反阻尼项，那么轨线就进入这一不含不动点的环域内，参见图 6.2.1. ■

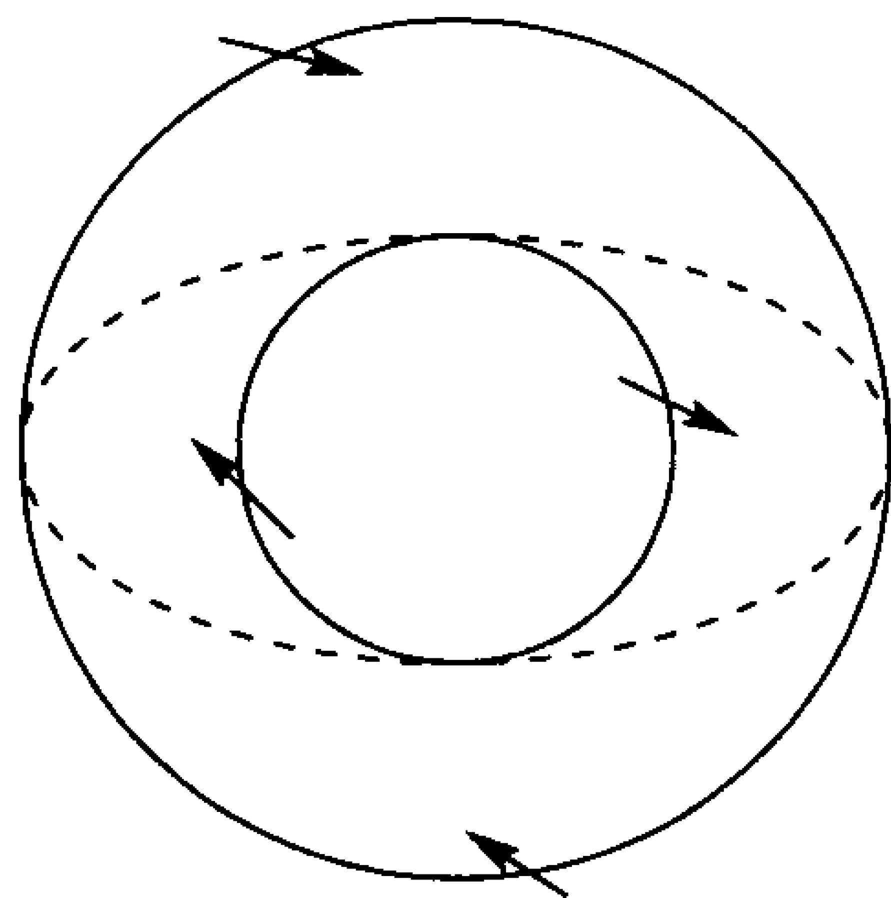


图 6.2.1　例 6.2.1 的正不变集

188

定理 6.2.2(庞加莱-本迪克松定理)　考虑$\mathbb{R}^2$上的微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

(a)假设 $\boldsymbol{F}$ 在$\mathbb{R}^2$上有定义，正半轨$\{\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{q}):\ t\geqslant 0\}$有界，则 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q})$(i)含有不动点或(ii)是周期轨.

(b)假设$\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^2$是有界闭子集且是微分方程的正不变集，假设 $F(x)$在$\mathcal{A}$内有定义，但没有不动点，则对任意的 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{A}$，轨线 $\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$(i)是周期轨或(ii)趋于一个周期轨(当 $t\to\infty$ 时)且 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$就是该周期轨.

注 6.2.3　要使平面上的连通区域$\mathcal{A}$既是正不变集又不含有不动点，则它必是含有一个“洞”的环域，这样它就有两条边界，每一边界都是闭曲线(不必是圆).

注 6.2.4　为使环域$\mathcal{A}$成为正不变集，只需系统的向量场在边界上指向环域内部.

注 6.2.5　对定理 6.2.2 可做适当的变动，即环域$\mathcal{A}$是负不变集，边界上的轨线都进入$\mathcal{A}$的外部.

证明思路　这里叙述证明的关键思路，6.9 节将给出严格的证明. 证明需要利用流关于初始值的连续性.

轨线 $\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$正向位于$\mathcal{A}$内，势必不断地接近于某点 z，即存在时间序列 t_n 使得 $\boldsymbol{\phi}(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)\to z(t_n\to\infty)$. 这种思想就是数学中的紧性，类似于有界递增点列一定收敛，于是$\mathbb{R}^2$中的有界点列必须趋近于某点. 点 z 不是不动点，其附近的轨线大致有相同的走向. 设 $\boldsymbol{S}$ 为过点 z 的截线，使得附近其他轨线同向穿过 $\boldsymbol{S}$，则对于充分大的 n，总可以调节 t_n 使得 $\boldsymbol{\phi}(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)\in\boldsymbol{S}$. 取一段轨线

$$\{\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0):t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}\},$$

以及 $\boldsymbol{S}$ 上 $\boldsymbol{\phi}(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$与 $\boldsymbol{\phi}(t_{n+1};\ \boldsymbol{x}_0)$之间的线段 $\boldsymbol{S}'$，它们构成一条闭曲线 Γ，该闭曲线将$\mathbb{R}^2$分成两部分(参见图 6.2.2). 从 $\boldsymbol{\phi}(t_{n+1};\ \boldsymbol{x}_0)$出发的轨线要么进入 Γ 的外部，要么进入 Γ 的内部；而从 $\boldsymbol{S}'$上任一点出发的轨线具有相同的性态. 因此当 $t>t_{n+1}$时 $\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$不可能重新进入其他区域，这意味着轨线与 $\boldsymbol{S}$ 的交点呈现单调性，它们必从一侧收敛于 z. 进一步分析表明，如果 z 不是周期的，则附近的轨线不可能返回，故 z 必须是周期的. ■

由上述证明可在收敛于周期轨方面获得更多的认识，实际上，若一条轨线在极限环的一侧聚集，则庞加莱映射在该侧是单调且吸引的. 这说明极限环该侧附近的轨线的 ω 极限集就是该极限环，极限环在该侧是轨道渐近稳定的. 如果周期轨两侧的轨线的 ω 极限集都是该周期轨，则该周期轨就是(两侧)轨道渐近稳定的，即有下述推论.

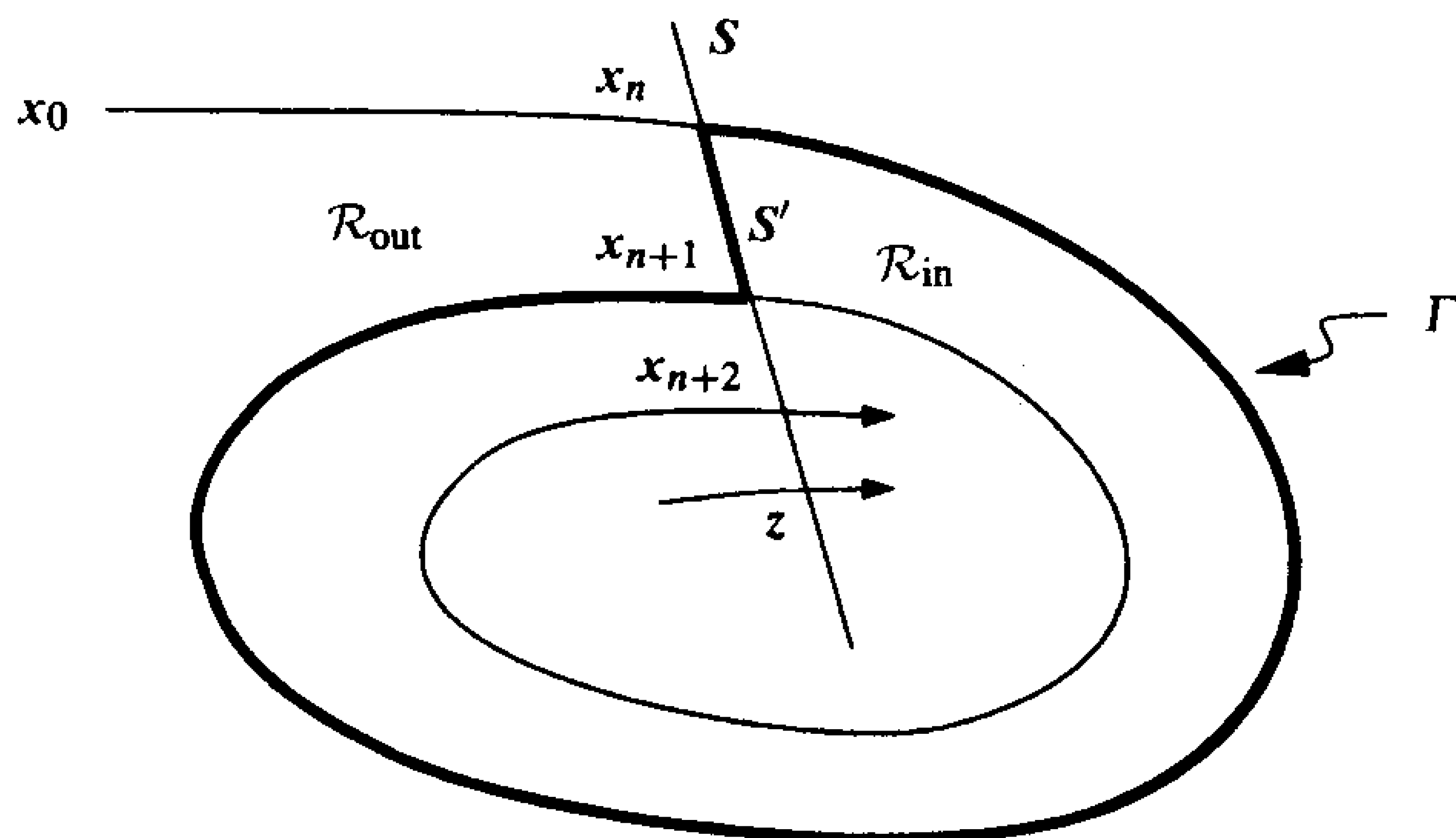


图 6.2.2 在 z 点的截线

推论 6.2.6 考虑$\mathbb{R}^2$上的微分方程$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，假设 γ 为孤立的周期轨.

(a)假设 $\boldsymbol{p} \notin \gamma$ 且以 γ 为其 ω 极限集，即 $\omega(\boldsymbol{p}, \phi) = \gamma$，则对于充分靠近 γ 且与 $\boldsymbol{p}$ 位于 γ 同侧的点 $\boldsymbol{q}$，有 $\omega(\boldsymbol{q}, \phi) = \gamma$，即 γ 为单侧轨道渐近稳定的；

189

(b)假设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \notin \gamma$，$\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 位于 γ 的不同侧，且 $\omega(\boldsymbol{p}_1, \phi) = \gamma = \omega(\boldsymbol{p}_2, \phi)$，则 γ 是轨道渐近稳定的(双侧).

例 6.2.7 考虑稍微复杂一点的方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 + y(4 - x^2 - 4y^2). \end{aligned}$$

将相应的能量函数

$$L(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4$$

作为检验函数，则有

$$\begin{aligned} \dot{L} &= y\dot{y} + x^3\dot{x} = -yx^3 + y^2(4 - x^2 - 4y^2) + x^3 y \\ &= y^2(4 - x^2 - 4y^2). \end{aligned}$$

在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上有$\dot{L} = 0$，在椭圆内部有$\dot{L} \geqslant 0$，在椭圆外部有$\dot{L} \leqslant 0$. 令 $W(x, y) = x^2 + 4y^2$，利用拉格朗日算法可以计算 L 在 $W(x, y) = 4$ 条件下的最大、最小值，亦即，解

$$\begin{aligned} x^3 &= \lambda 2x \\ y &= \lambda 8y \\ 4 &= x^2 + 4y^2, \end{aligned}$$

得到临界点$(\pm 2, 0)$，$(0, \pm 1)$与$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$，$L$ 在这些点处的值分别为 4，$\frac{1}{2}$与$\frac{31}{64}$. 于是由 L 的等高线确定的最大不变环域为

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y): \frac{31}{64} \leqslant L(x,y) \leqslant 4\right\}.$$

边界上的轨线都进入环域，故$\mathcal{A}$是一个正不变集，其内部含有一个周期轨.

190

上例中起作用的是方程中有项 $y(4-x^2-y^2)$，它在 L 大的等高线(比如 $L^{-1}(4)$)上起阻尼作用，而在小的等高线$\left(\text{比如 } L^{-1}\left(\frac{31}{64}\right)\right)$上起反阻尼作用，之间的区域不含不动点且在流下收缩，从而一定存在周期轨.

仅仅通过庞加莱-本迪克松定理不能完整地分析相图，但是如果假设系统只有唯一的周期轨(上例就是如此)，则可获得点的 $\omega(\alpha)$ 极限集的更多性质. 设 $\boldsymbol{p}$ 位于周期轨 Γ 所界的内部区域，由于在原点的不动点是排斥的，所以 $\omega(\boldsymbol{p})$ 不会是不动点，又注意到 p 的轨线在 Γ 内部从而是有界的，因而唯一的可能就是 $\omega(\boldsymbol{p})=\Gamma$；另一方面，若 $\boldsymbol{p}$ 在 Γ 的外侧，由于对于大于 4 的值 L 是递减的，其轨线不能跑向无穷远，又不能趋于原点，则 $\omega(\boldsymbol{p})$ 只能是周期轨. 若只有唯一的周期轨，则 $\omega(\boldsymbol{p})$ 一定就是 Γ. 总之，除了原点外任一点的 ω 极限集都是周期轨.

再看 α 极限集. 由于在 Γ 的每一侧都有趋于它的轨线，当时间增加时没有轨线能离开 Γ，当时间趋于负无穷时也没有轨线趋于它，因此没有点以它作为 α 极限集. 因而，对 Γ 内侧的点 $\boldsymbol{p}$，其 α 极限集为 $\{\boldsymbol{0}\}$，另一方面，由于没有其他周期轨和其他不动点，Γ 外侧的点 $\boldsymbol{p}$ 的负半轨必离开环域而进入区域 $L(\boldsymbol{x})>4$ 中，在此域中有 $\dot{L}<0$，因此当 t 趋于负无穷时 L 的值趋于无穷大，故 $\alpha(\boldsymbol{p})=\varnothing$. ■

在关于极限集一节的例 5.4.4 有由不动点及其位于该不动点的稳定与不稳定流形的两条轨线所组成的 ω 极限集，此例例证了庞加莱-本迪克松定理的一个更一般的形式.

定理 6.2.8　*考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，假设 $\mathcal{A}$ 是有界闭子集且是该方程的正不变集，再设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathcal{A}$ 上有定义且在 $\mathcal{A}$ 内有有限个不动点，则对于任给的 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{A}$，$\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 为下述三种情形之一：*

(i) 周期轨.

(ii) 单个不动点.

(iii) 有限个不动点以及(有限或可数条)轨线 $\{\gamma_j\}$ 的并，使得每一 $\alpha(\gamma_j)$ 是某个不动点 $\boldsymbol{q}_{i(j,\alpha)}$ 而 $\omega(\gamma_j)$ 是不动点 $\boldsymbol{q}_{i(j,\omega)}$，即

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{x}_0)&=\{\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_m\}\cup\bigcup_j\gamma_j,\\ \alpha(\gamma_j)&=\boldsymbol{q}_{i(j,\alpha)},\\ \omega(\gamma_j)&=\boldsymbol{q}_{i(j,\omega)}.\end{aligned}$$

另外，对于任意两个不动点 $\boldsymbol{q}_{i_1}\neq\boldsymbol{q}_{i_2}$，一定有依次连接它们的轨线 γ_{j_1}，…，γ_{j_k}，即 $\alpha(\gamma_{j_1})=\boldsymbol{q}_{i_1}$，$\omega(\gamma_{j_p})=\alpha(\gamma_{j_{p+1}})\,(1\leqslant k-1)$，$\omega(\gamma_{j_k})=\boldsymbol{q}_{i_2}$.

证明见[**47**].

庞加莱-本迪克松定理的另一推论是平面微分方程的任一周期轨必包围一个不动点.

定理 6.2.9　*考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，设 γ 为其周期轨，$\boldsymbol{U}$ 为 γ 所包围的开集，则要么 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{U}$ 中有一个不动点，要么在 $\boldsymbol{U}$ 中存在 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 无定义的点.*

证明(利用反证法)　假设由周期轨 $\boldsymbol{\gamma}$ 所界的开集 $\boldsymbol{U}$ 中没有不动点，且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{U}$ 中有定

191

义，不妨设 γ 内没有其他周期轨. 取点 $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{U}$，由庞加莱-本迪克松定理可知 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\gamma$，又由庞加莱-本迪克松定理的证明，$\gamma$ 内侧的庞加莱映射是单调的且对于 γ 内附近的点 $\boldsymbol{y}_0$ 都有 $\omega(\boldsymbol{y}_0)=\gamma$，$\alpha(\boldsymbol{y}_0)\neq\gamma$，故 $\alpha(\boldsymbol{x}_0)$是非空的且一定是 $\boldsymbol{U}$ 中的周期轨或不动点，无论哪种情形都与假设矛盾. ■

化学反应模型

Brusselator 化学反应模型为

$$\dot{x} = a - bx + x^2y - x$$
$$\dot{y} = bx - x^2y.$$

由庞加莱-本迪克松定理可证当 $b>1+a^2$ 且 $a>0$ 时，系统存在一个周期轨. 我们在此讲述此例而未将其放在后面的应用部分是由于寻求正不变区域的方法有趣且不同于考虑过的其他例题.

模拟所谓的 Belousov-Zhabotinsky 化学反应且有周期极限性态的另一模型是由 Field 和 Noyes 建立的 Oregonator 系统，参见 6.8.1 节.

先求不动点，由$\dot{y}=0$ 得 $x=0$ 或 $b=xy$. 若 $x=0$ 则$\dot{x}=a\neq0$，故这种情形没有不动点；若 $b=xy$ 则$0=\dot{x}=a-x$，所以$(a,\ b/a)$是唯一的不动点.

在不动点处的变分矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2xy-b-1 & x^2 \\ b-2xy & -x^2 \end{bmatrix}_{x=a,y=\frac{b}{a}} = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix}.$$

矩阵的行列式有正值 a^2，其迹为 $b-1-a^2>0$(在假设下)，故不动点为不稳定结点或焦点. 可适当选取一含有不动点的椭圆形小区域 D，使得除不动点以外的轨线都离开 D 而进入 D 的外部，此时 D 的边界就是所要寻求的环域$\mathcal{A}$的内边界线.

为构造$\mathcal{A}$的外边界线，做四边形，四条边分别为(1)$x=0$；(2)$y=0$；(3)$y=A-x$；(4)$y=B+x$(其中 A，B 待定). 令$\mathcal{A}$为由 D 的边界与上述四边形围成的环域(参见图 6.2.3).

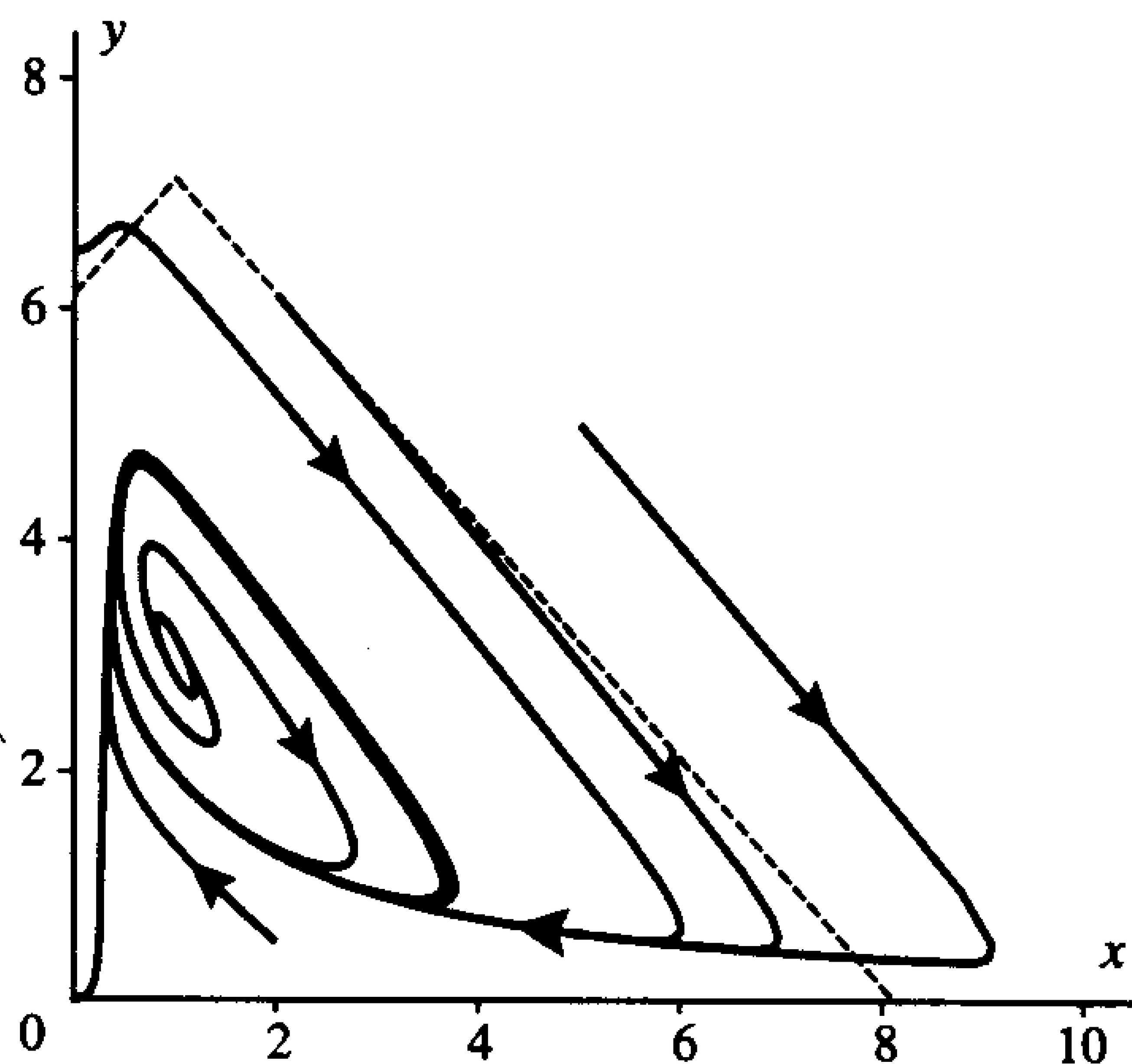


图 6.2.3 Brusselator 系统的正不变区域和轨线

沿着边 $x=0$，有 $\dot{x}=a>0$，即轨线进入 $\mathcal{A}$；

沿着边 $y=0$，有 $\dot{y}=bx>0$（$x=0$ 除外），即轨线沿着边界进入 $\mathcal{A}$；

第三边由 $L_3(x,y)=y+x-A=0$ 给出，集 $\mathcal{A}$ 位于 $L_3<0$ 中，且有导数

$$\dot{L}_3=\dot{x}+\dot{y}=a-x,$$

若 $x>a$ 则有 $\dot{L}_3<0$，故应取 A，B 使得第三边和第四边在 $\mathcal{A}$ 的最高顶点相遇且交点的横坐标 $x\geqslant a$. 事实上，下面的选取使 $x=a$.

[192]

第四边由 $L_4(x,y)=y-x-B=0$ 给出，而 $\mathcal{A}$ 位于 $L_4<0$ 中，且有导数

$$\dot{L}_4=\dot{y}-\dot{x}=2bx-2x^2y-a+x.$$

$\dot{L}_4<0$，若

$$y>\frac{(2b+1)x-a}{2x^2}.$$

令 $h(x)=\dfrac{(2b+1)x-a}{2x^2}$，则(i) $h(x)\to-\infty\ (x\to0)$；(ii) $h(x)\to0\ (x\to+\infty)$；(iii) $h\left(\dfrac{a}{2b+1}\right)=0$；(iv) $h(x)$ 在 $x=\dfrac{2a}{2b+1}$ 处取得唯一最大值，这是因为

$$h'(x)=\frac{2a-(2b+1)x}{2x^3},$$

且有 $h'\left(\dfrac{2a}{2b+1}\right)=0$，$h'(x)>0\left(x<\dfrac{2a}{2b+1}\right)$，$h'(x)<0\left(x>\dfrac{2a}{2b+1}\right)$，并且最大值为

$$h\left(\frac{2a}{2b+1}\right)=\frac{(2b+1)^2}{8a}.$$

若取 $B=\dfrac{(2b+1)^2}{8a}$，则 $y\mid_{L_4}=B+x\geqslant B=\max\{h(x):\ x>0\}$，再取 $A=B+2a$，则四边形最上端顶点为 $(a,\ B+a)=(a,\ A-a)$.

对已确定的 $\mathcal{A}$ 的边界，其上点的轨线都进入 $\mathcal{A}$ 的内部，又系统的唯一不动点不在 $\mathcal{A}$ 内，由庞加莱-本迪克松定理可知在 $\mathcal{A}$ 内必定存在一个周期轨.

6.3　自激振子

本节介绍一类微分方程，称其为李纳方程，它对于小振荡有递增的"振幅"，对于大振荡有递减的"振幅"，主要结果是李纳方程存在唯一的周期轨或极限环. 由于小振荡的振幅递增而且没有外力作用，称这种现象为*自激振荡*. 这些方程最初是模拟真空管产生周期输出的，后来发现在许多情形下都有类似的现象，渐渐地，李纳方程已成为具有吸引极限环的重要模型.

[193]

最简单的例子就是

$$\ddot{x}=-x-(x^2-1)\dot{x},\tag{6.3.1}$$

称为*范德波尔方程*，它等价于方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=v\\ \dot{v}&=-x-(x^2-1)v,\end{aligned}\tag{6.3.2}$$

称为范德波尔系统. 这种系统可以推广为李纳系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v\\ \dot{v} &= -g(x)-f(x)v,\end{aligned}\tag{6.3.3}$$

其中假设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 具有范德波尔方程中相应因式的性质，特别地，$g(x)>0(x>0)$，即有恢复力；而函数 $f(x)$ 满足 $f(x)<0(|x|\ll 1)$，$f(x)>0(|x|\gg 1)$. 下面将列出明确的条件.

若令

$$L(x,v)=G(x)+\frac{v^2}{2},\quad 其中\quad G(x)=\int_0^x g(s)\,ds,$$

则 $\dot{L}=v^2(1-x^2)$ 可正可负，特别地，沿着完全含于带域

$$\{(x,v):-1\leqslant x\leqslant 1\}$$

中的小等位线 $L^{-1}(C)$ 有 $\dot{L}\geqslant 0$，但却不存在大的等位线，使得沿着它有 $\dot{L}\leqslant 0$，这是因为每一条这样的闭曲线都要穿过上述带域，而在带域内始终有 $\dot{L}>0$，因此上一节应用庞加莱-本迪克松定理的方法在这里用不上. 取而代之，我们需要讨论函数 L 沿着绕原点一周的轨线的变化总量.

首先将李纳方程改写为易于分析的形式，即令 $y=v+F(x)$，其中

$$F(x)=\int_0^x f(s)\,ds.$$

则

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y-F(x)\\ \dot{y} &= \dot{v}+F'(x)\dot{x}=-g(x)-f(x)v+f(x)v=-g(x).\end{aligned}$$

从而得到李纳方程的等价形式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y-F(x)\\ \dot{y} &= -g(x).\end{aligned}\tag{6.3.4}$$

当 $g(x)=x$，$F(x)=\dfrac{x^3}{3}-x$ 时即为范德波尔方程. 由(6.3.4)给出的范德波尔系统的相图参见图 6.3.1.

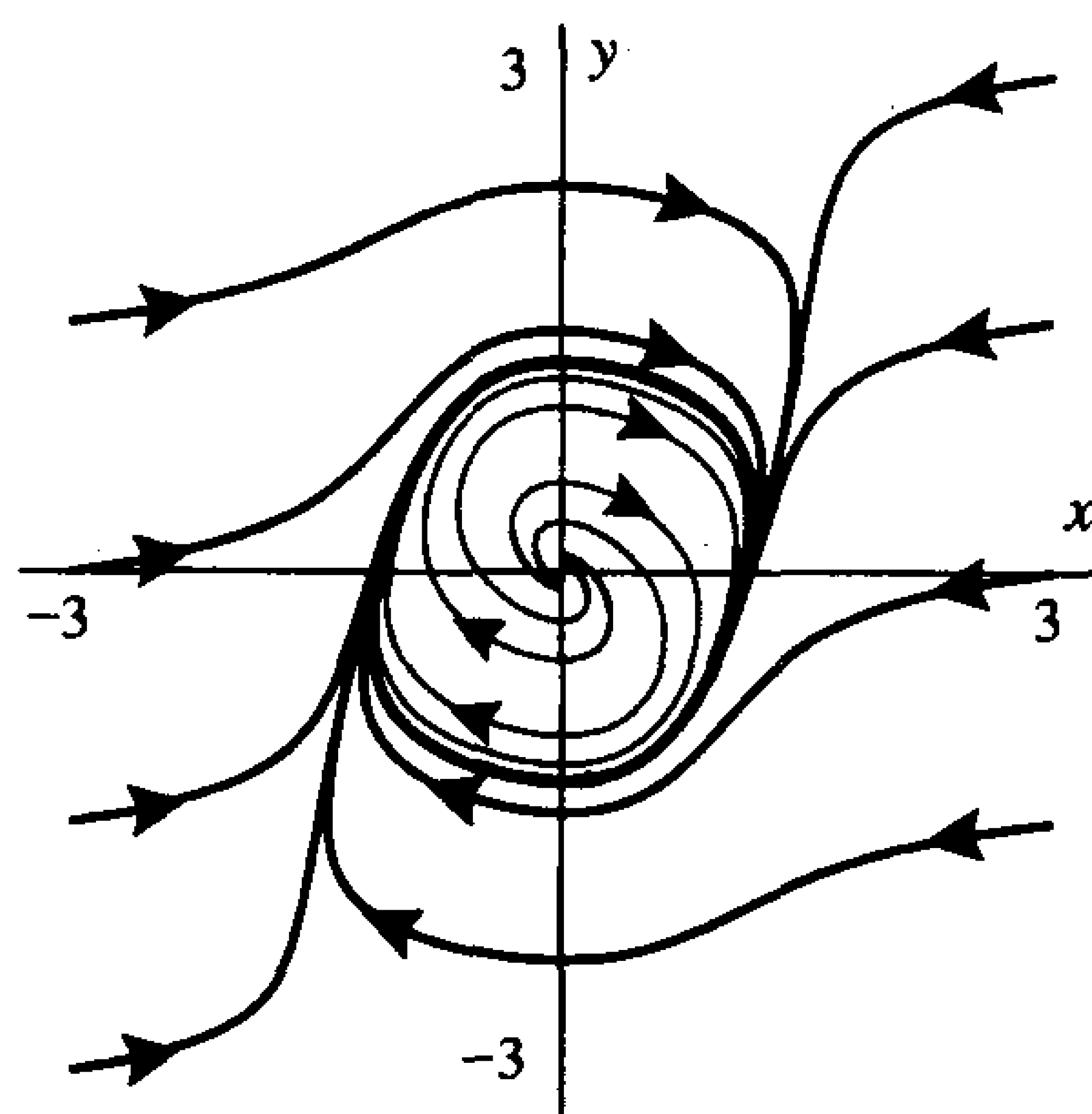


图 6.3.1 范德波尔方程的相图

对方程(6.3.4)做如下假设：

1. $F(x)$ 与 $g(x)$ 连续可微.

2. 函数 g 是奇函数，即 $g(-x)=-g(x)$，且 $g(x)>0(x>0)$（即 g 是恢复力）.

3. 函数 F 是奇函数，即 $F(-x)=-F(x)$，且存在唯一的 $a>0$，使得 $F(a)=0$，$F(x)<0(0<x<a)$，$F(x)>0(x>a)$，且当 $x\geqslant a$ 时 $F(x)$ 是非减的.

在 6.8.2 节中，我们将看到非线性 RLC 电路问题可以归结为(6.3.4)的形式.

194

定理 6.3.1　设函数 g 和 F 满足条件 1 ~ 3，则李纳方程(6.3.4)有唯一的周期轨，且是吸引的.

上述定理的证明参见 6.9 节，下面简述证明思路.

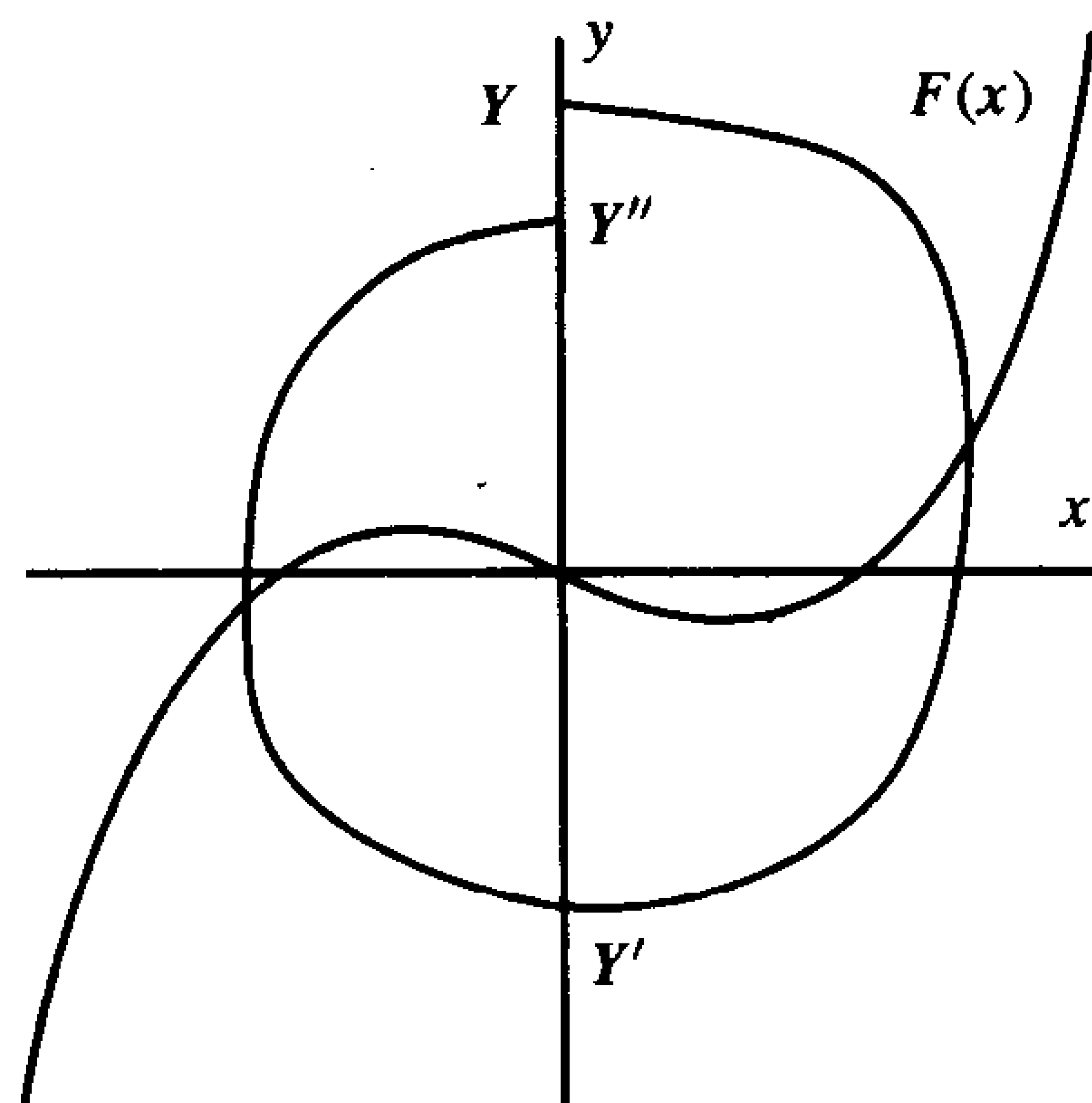


图 6.3.2　李纳方程轨线图示

沿过点 $Y(0,\ y)$（其中 $y>0$）的轨线（记为 $\gamma(Y)$）开始有 $\dot{x}>0$ 与 $\dot{y}<0$，故该轨线向右走并与等倾线 $y=F(x)$ 相遇，由于在此线下方有 $\dot{x}<0$ 与 $\dot{y}<0$，$\gamma(Y)$ 继而与负 y 轴交于某点 Y'（参见图 6.3.2），之后进入区域 $x<0$，$y<F(x)$，此时有 $\dot{x}<0$ 与 $\dot{y}>0$，并在第三象限穿过 $y=F(x)$ 后回到正 y 轴上的某点 Y''. 这样定义了正 y 轴到其自身的映射 P，它将点 Y 映射为点 Y''，称映射 P 为首次返回映射或庞加莱映射，其中半直线 $\{(y,\ 0):\ y>0\}$ 为其截线. 轨线 $\gamma(Y)$ 是周期的当且仅当 $Y''=Y$，注意到 $(x(t),\ y(t))$ 是解当且仅当 $(-x(t),\ -y(t))$ 是解. 因此若 $Y'=-Y$，则有 $Y''=-Y'=Y$，即 $\gamma(Y)$ 是周期的；反之，若 $Y'\neq-Y$，则 $\gamma(Y)$ 不是周期的. 事实上，若设 $\|Y'\|<\|Y\|$，则由 $-Y$ 点出发的轨线 $\gamma(-Y)$ 将与正 y 轴交于点 $-Y'$，从而过 Y' 的轨线 $\gamma(Y')=\gamma(Y)$ 在 $\gamma(-Y)$ 的内侧，于是有 $\|Y''\|<\|Y'\|<\|Y\|$，即 $\gamma(Y)$ 不是周期的，对 $\|Y'\|>\|Y\|$ 的情形类似可得 $Y''>\|Y'\|>Y$. 总之，$\gamma(Y)$ 是周期的当且仅当 $Y'=-Y$.

195

证明思路是利用一个实函数来判断轨线是靠近还是远离原点，选取势能函数为

$$G(x)=\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s.$$

由于 $g(x)$ 为奇函数且 $g(x)>0\ (x>0)$，故 $G(x)>0\ (x\neq0)$，令

$$L(x,y)=G(x)+\frac{y^2}{2},$$

则 $L(x,\ y)$ 可用来度量到原点的距离. $\gamma(Y)$ 是周期的当且仅当 $L(Y)=L(Y')$.

直接计算可得 $\dot{L}=-g(x)F(x)$，当 $|x|>a$ 时 $\dot{L}<0$，当 $|x|<a$ 时 $\dot{L}>0$，从而在 $|x|<a$ 内 L 递增，原点是排斥的，且系统没有完全含于带域 $|x|\leqslant a$ 的周期轨.

当轨线的长度变大，即 Y 沿着 y 轴向上移动时，L 的改变量 $L(Y')-L(Y)$ 减少，进一步研究表明当 $Y\to+\infty$ 时，$L(Y')-L(Y)\to-\infty$，因此有且仅有一值 $y>0$，使得点 $Y=(0,\ y)$ 是周期的. 更详细的讨论见 6.9 节.

6.4　安德罗诺夫-霍普夫分支

在本节，我们讨论当参数变化而使具有复特征值的不动点由稳定焦点变为不稳定焦点的同时周期轨的产生问题，这种相图上的变化称为分支现象，产生分支现象时的参数值称为分支值. “分支”一词源于法语，原指道路的岔口或其他分开的岔口.

196

先看一个具体的模型，再给出一般性的定理.

例 6.4.1(范例) 考虑微分方程

$$\dot{x} = \mu x - \omega y + Kx(x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + Ky(x^2 + y^2),$$

其中 $\omega > 0$，将 μ 视为可变参数，不动点(0, 0)的特征值为 $\lambda_\mu = \mu \pm i\omega$. 当 $\mu = 0$ 时，相应的线性方程有一个中心；当 μ 由负值变为正值时，不动点(0, 0)由稳定焦点变为不稳定焦点. 在极坐标下，方程化为

$$\dot{r} = \mu r + Kr^3$$

$$\dot{\theta} = \omega.$$

第二个方程说明 θ 是递增的且当时间增至 $\frac{2\pi}{\omega}$ 时绕原点转了一周.

先考虑 $K<0$ 的情形，当 $\mu<0$ 时，初始条件为 $r(0)>0$ 的解指数级地趋于零；当 $\mu=0$ 时，$\dot{r}=Kr^3<0$，初始条件为 $r(0)>0$ 的解仍然趋于零，但趋于零的速度减慢，故此时原点是弱吸引的；当 $\mu>0$ 时，在 r 空间 0 是排斥的，且存在一个吸引的不动点 $r=\sqrt{\mu/|K|}$，参见图 6.4.1.

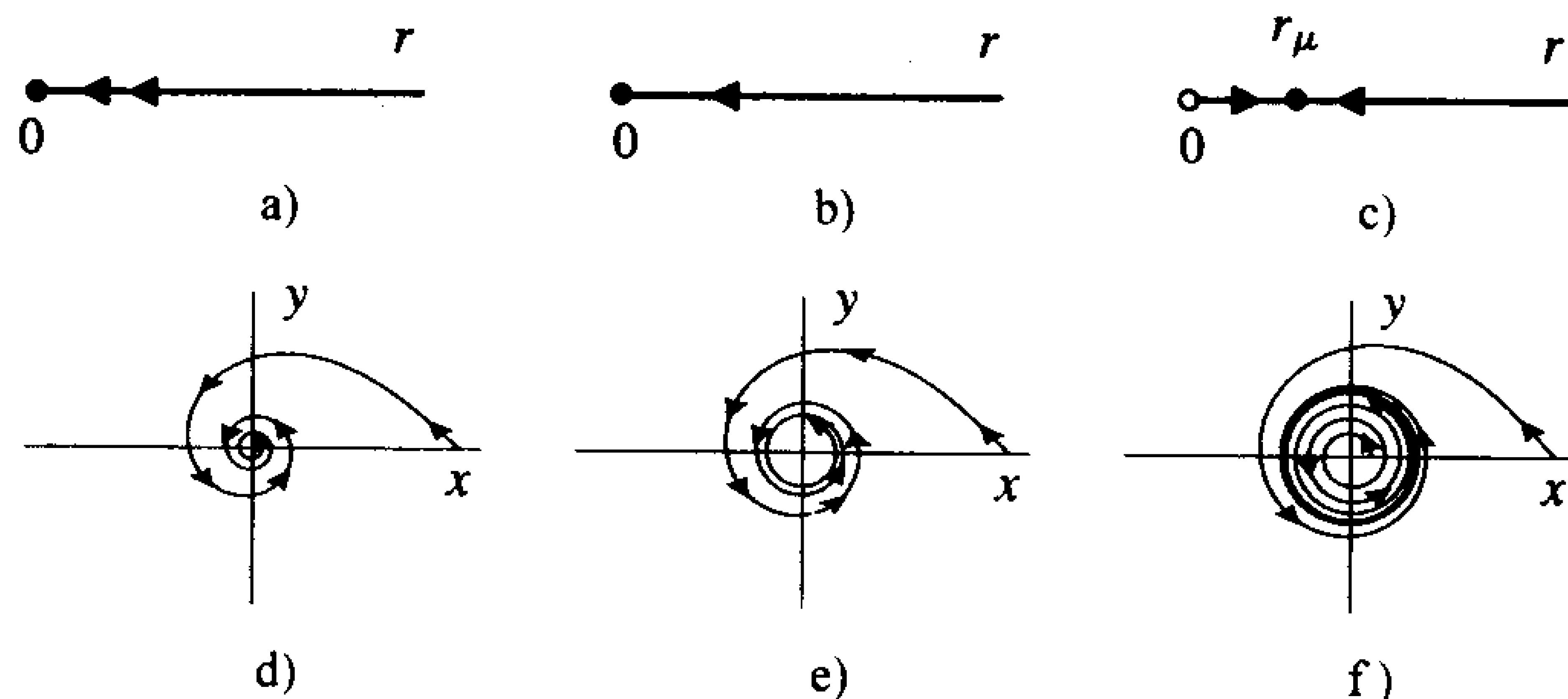


图 6.4.1 $K<0$ 时的超临界分支. 图 a、b、c 分别是 $\mu<0$、$\mu=0$、$\mu>0$ 时在 r 空间的相图；图 d、e、f 分别是 $\mu<0$、$\mu=0$、$\mu>0$ 时在直角坐标系下的平面相图，其中图 f 出现一个稳定的周期轨

在直角坐标系下，原点从 $\mu<0$ 时的稳定焦点变为 $\mu=0$ 时的弱吸引焦点，再变为 $\mu>0$ 时被一吸引的极限环所围绕的不稳定焦点. 需要注意的是，在分支值 $\mu=0$ 处，系统的不动点是弱吸引的，而当不动点变为不稳定的，即 Re $(\lambda_\mu)=\mu>0$ 时，极限环出现且是吸引的，这种分支现象称为**超临界分支**，原因是极限环在特征值的实部大于零时出现.

其次考虑 $K>0$ 的情形. 特征值的变化如上所述，在分支值 $\mu=0$ 处，不动点是弱排斥的；当 $\mu>0$ 时，在 r 的方程中没有正根，在 (x, y) 平面上原点是排斥的，没有周期轨；当 $\mu<0$ 时，r 方程出现第二个不动点 $r=\sqrt{|\mu/K|}$，它是不稳定的. 极限环在分支之前出现，此时特征值的实部小于零(参见图 6.4.2). 这种分支现象称为**亚临界分支**.

在上述两种情形下，当极限环出现时其半径均近似为 $r=\sqrt{|\mu/K|}$. ■

一般结果涉及不动点由稳定焦点到不稳定焦点的变化与在参数分支值之前或之后产生的周

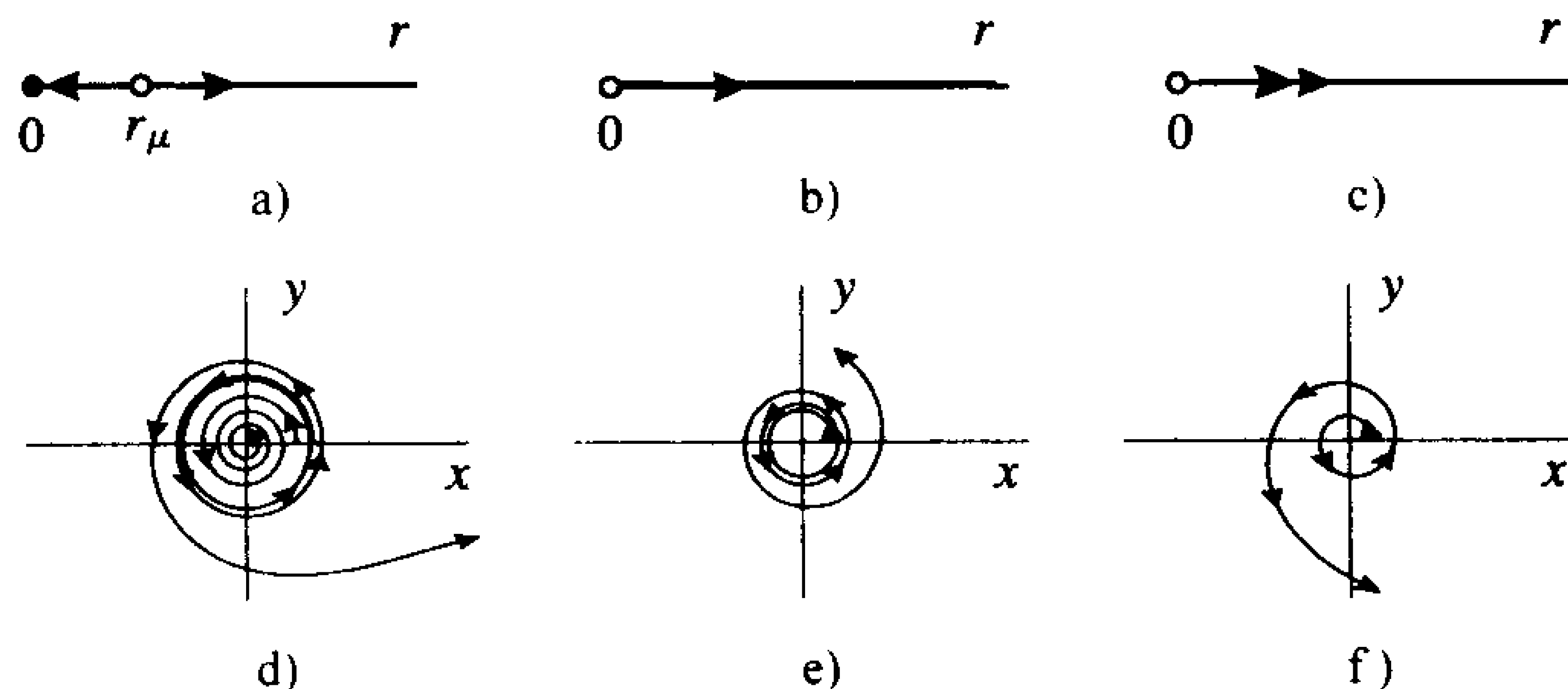


图 6.4.2 $K>0$ 时的亚临界分支. 图 a、b、c 分别是 $\mu<0$、$\mu=0$、$\mu>0$ 时在 r 空间的相图; 图 d、e、f 分别是 $\mu<0$、$\mu=0$、$\mu>0$ 时在直角坐标下的平面相图, 当 $\mu<0$ 时出现一个不稳定的周期轨

期轨, 定理中可以直接应用的关键假设如下:

1. 给定平面上依赖于参数 μ 的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}_\mu(\boldsymbol{x}).$$

系统有一个不动点 $\boldsymbol{x}_\mu$, 光滑地依赖于参数(如在例 6.4.1 中, 对任意的 μ 有 $\boldsymbol{x}_\mu=\boldsymbol{0}$). 该不动点有复特征值 $\lambda_\mu=\alpha_\mu\pm\mathrm{i}\beta_\mu$, 确定分支值 μ_0 使特征值为纯虚数(即 μ_0 使 $\alpha_{\mu_0}=0$, $\pm\beta_{\mu_0}\neq 0$).

2. 当参数 μ 经过 μ_0 时, 每一特征值的实部由负变为正或由正变为负. 为叙述方便, 假设 α_μ 关于 μ 递增, 即

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\alpha_\mu\right|_{\mu_0} > 0.$$

需要说明的是, 当这一导数为负时所得结果需要改写. 这样, 当 $0<\mu_0-\mu\ll 1$ 时, 不动点为稳定的焦点, 当 $0<\mu-\mu_0\ll 1$ 时, 不动点为不稳定的焦点.

3. 当 $\mu=\mu_0$ 时系统是弱吸引或弱排斥的, 验证在分支值处不动点的稳定性有下述三种方法: (i)引入检验函数并应用定理 5.3.6; (ii)通过将系统化为极坐标形式, 计算系数的平均值, 来给出某一常数 K_{μ_0} 的表达式, 该常数的作用如同例 6.4.1 中的 K; (iii)类似于 K_μ, 存在一个常数 M, 它可以利用直角坐标系下的偏导数来计算.

定理 6.4.2(安德罗诺夫-霍普夫分支) 设有平面上含参数 μ 的微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}_\mu(\boldsymbol{x})$, 它有不动点 $\boldsymbol{x}_\mu$, 其特征值为 $\lambda_\mu=\alpha_\mu\pm\mathrm{i}\beta_\mu$, 设 $\alpha_{\mu_0}=0$, $\beta_{\mu_0}\neq 0$, $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}(\alpha_\mu)\right|_{\mu=\mu_0}>0$.

198

(a)(**超临界分支**)若 $\boldsymbol{x}_{\mu_0}$ 是弱吸引的, 则当 $0<\mu-\mu_0\ll 1$ 时, 所述方程有一吸引的周期轨, 其周期为 $\frac{2\pi}{\beta_{\mu_0}}+o(1)$(其中当 $\mu\to\mu_0$ 时 $o(1)\to 0$)(参见图 6.4.1).

(b)(**亚临界分支**)若 $\boldsymbol{x}_{\mu_0}$ 是弱排斥的, 则当 $0<\mu_0-\mu\ll 1$ 时, 所述方程有一吸引的周期轨, 其周期为 $\frac{2\pi}{\beta_{\mu_0}}+o(1)$(其中当 $\mu\to\mu_0$ 时 $o(1)\to 0$)(参见图 6.4.2).

注 6.4.3 定理中若 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\alpha_\mu\right|_{\mu_0}<0$, 其余条件不变, 则当参数位于分支值相反侧时周期轨出

现. 特别地，在超临界情形下，当 $\mu<\mu_0$(此时不动点是不稳定的)时稳定周期轨出现；在亚临界情形下，当 $\mu>\mu_0$(此时不动点是稳定的)时不稳定周期轨出现.

定理 6.4.2 的部分结论的证明参见 6.9 节.

下面的定理给出了判断在分支值处不动点的弱稳定与弱不稳定的两种方法：第一种是以极坐标形式给出的；第二种是以直角坐标系下的偏导数形式给出的；还有一种方法就是在一些例子中应用过的检验函数法.

定理 6.4.4(安德罗诺夫-霍普夫分支稳定性判断) 设定理 6.4.2 的条件满足，则存在常数 K_μ，它决定不动点在 $\mu=\mu_0$ 处的稳定性以及分支是超临界的或亚临界的. (i)若 $K_{\mu_0}<0$，则不动点 X_{μ_0}是弱吸引的，且当 $0<\mu-\mu_0\ll 1$ 时出现超临界分支，而稳定周期轨的半径近似为 $\sqrt{|\alpha_\mu/K_{\mu_0}|}$. (ii)若 $K_{\mu_0}>0$，则不动点 X_{μ_0}是弱排斥的，且当 $0<\mu_0-\mu\ll 1$ 时出现亚临界分支，不稳定周期轨的半径近似为$\sqrt{|\alpha_\mu/K_{\mu_0}|}$. (iii)存在到极坐标$(R,\ \Theta)$的变换，使得方程化为

$$\dot{R}=\alpha_\mu R+K_\mu R^3+\text{高阶项}$$

$$\dot{\Theta}=\beta_\mu+\text{高阶项}.$$

下面两部分给出计算 $\boldsymbol{K}_{\mu_0}$的两个公式.

(a)令 $\boldsymbol{x}_\mu=(x_{\mu,1},\ x_{\mu,2})$，作变换 $x_1-x_{\mu,1}=r\cos\theta$，$x_2-x_{\mu,2}=r\cos\theta$，系统化为极坐标形式

$$\dot{r}=\alpha_\mu r+C_3(\theta,\mu)r^2+C_4(\theta,\mu)r^3+\text{高阶项}$$

$$\dot{\theta}=\beta_\mu+D_3(\theta,\mu)r+D_4(\theta,\mu)r^2+\text{高阶项}.$$

其中 C_j，D_j 是关于 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 的 j 次齐次式，则 $\boldsymbol{K}_{\mu_0}$由下式给出：

$$K_{\mu_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[C_4(\theta,\mu_0)-\frac{1}{\beta_0}C_3(\theta,\mu_0)D_3(\theta,\mu_0)\right]\mathrm{d}\theta.$$

(b)设系统在 $\mu=\mu_0$ 时的形式为$\dot{x}_1=f(x_1,\ x_2)$，$\dot{x}_2=g(x_1,\ x_2)$(即右端函数当 $\mu=\mu_0$ 时第一个分量 $F_{\mu_0,1}=f$，第二分量 $F_{\mu_0,2}=g$)，引入偏导数记号如下：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_{\mu_0})=f_x,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}(\boldsymbol{x}_{\mu_0})=f_{xxy},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}_{\mu_0})=g_{yy},\cdots.$$

其中下标 x 表示对第一个变量求偏导，下标 y 表示对第二个变量求偏导. 假设

$$f_x=0,\quad f_y\neq 0,$$
$$g_x\neq 0,\quad g_y=0,$$

且$f_yg_x<0$，以保证特征值为 $\pm\mathrm{i}\sqrt{|f_yg_x|}$，则

$$K_{\mu_0}=\frac{1}{16}\left(\left|\frac{f_y}{g_x}\right|^{\frac{1}{2}}f_{xxx}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|^{\frac{1}{2}}f_{xyy}+\left|\frac{f_y}{g_x}\right|^{\frac{1}{2}}g_{xxy}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|^{\frac{1}{2}}g_{yyy}\right)$$
$$+\frac{1}{16g_x}\left|\frac{g_x}{f_y}\right|^{\frac{1}{2}}\left(f_{xy}f_{xx}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|f_{xy}f_{yy}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|f_{yy}g_{yy}\right)$$
$$+\frac{1}{16f_y}\left|\frac{f_y}{g_x}\right|^{\frac{1}{2}}\left(g_{xy}g_{yy}+\left|\frac{f_y}{g_x}\right|g_{xy}g_{xx}+\left|\frac{f_y}{g_x}\right|f_{xx}g_{xx}\right).$$

在这里不证明上述定理，仅讨论其意义. (a)部分给出了极坐标系下平均值形式的公式，

199

其推导见文献[**27**]、[**26**]、[**87**]，公式中出现的 $C_4(\theta, \mu_0)$ 的平均值比较直观，而 $C_3(\theta, \mu_0)$ 的加权平均值并不明显.

第(b)部分的公式以偏导数形式给出，易于计算，但不甚清晰且显得冗长. 读者可以检验，若公式中前四项中偏导数每一种类型只出现一项，则用检验函数可知结果是对的，参见例 6.4.5，其已写成变量 x，y 的对称形式，并且假设 $f_x = 0 = g_y$，但没有像其他文章那样假设 $g_x = -f_y$. 如果 $f_x \neq 0$ 或 $g_y \neq 0$，而特征值仍是纯虚数，可利用特征向量进行变换使得 $f_x = 0 = g_y$. 在公式中第二行(5 到 7 项)圆括号外面的系数与 g_x 同号，而第三行(8 到 10 项)圆括号外面的系数与 f_y 同号. 文献[**72**]中，常数 K_{μ_0} 与一庞加莱映射有关，庞加莱映射 P 是轨线绕不动点一周后形成的，在分支值处有 $P'(0) = 1$，$P''(0) = 0$，而 $P'''(0)$ 是 K_{μ_0} 的标量倍数，其推导过程类似于所提上述文献对第(a)部分的证明. 而[**42**]的推导则使用了复变量，且计算大不相同.

对于某些方程，不必计算 K_{μ_0}，仅仅利用检验函数即可证明在分支值处不动点的弱吸引(排斥)性，同时还可以看出分支是超临界的还是亚临界的，以及周期轨是吸引的还是排斥的. 下面就给出这样一个例证.

例 6.4.5　考虑含参量 μ 的方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - x^3 + \mu y + kx^2 y, \end{aligned}$$

其唯一不动点为原点，在原点处的变分矩阵为

200

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}.$$

特征方程为 $\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$，从而可知特征值为

$$\lambda = \frac{\mu}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}}.$$

当 $|\mu| < 2$ 时特征值为复数，实部是 $\alpha_\mu = \frac{\mu}{2}$. 当 $\mu = 0$ 时，$\alpha_\mu = 0$，故 $\mu = 0$ 为分支值. 当 μ 经过零时，实部变号，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\alpha_\mu = \frac{1}{2} > 0,$$

于是当 μ 经过零时，不动点的稳定性发生变化.

下面需要知道当 $\mu = 0$ 时不动点的弱稳定性(注意到当 $\mu = 0$ 时不动点有特征值 $\pm\mathrm{i}$，即出现线性中心). 定理 6.4.4(b)中的常数是

$$K_0 = \frac{k}{8},$$

因为 $f_y = 1$，$g_x = -1$，$g_{xxy} = 2k$，公式中的其他偏导数均为零，故由定理 6.4.4 可知，当 $k < 0$ 时不动点是弱吸引的，当 $k > 0$ 时不动点是弱排斥的. 下面应用检验函数来获得这一结论.

当 $\mu = 0$ 时，方程组变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - x^3 + kx^2 y, \end{aligned}$$

由于 x^2y 类似阻尼项，故可利用检验函数

$$L(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

来判断原点的稳定性. 事实上，有导数

$$\dot{L} = (x + x^3)\dot{x} + y\dot{y} = (x + x^3)y + y(-x - x^3 + kx^2y) = kx^2y^2.$$

先考虑 $k<0$ 的情形，此时有 $\dot{L} \leqslant 0$，当且仅当 $(x, y) \in Z$ 时等式成立，其中

$$\mathbf{Z} = \{(x,y): x = 0 \text{ 或 } y = 0\}.$$

整条轨线属于集合 $\mathbf{Z}$ 的只有原点本身，即系统满足定理 5.3.6 的条件. 又函数 L 除原点外在全平面为正，故可将定理 5.3.6 中的 U 取为全平面，且原点的吸引区域为全平面，所以当 $\mu=0$ 时原点为弱吸引的. 注意到当 $\mu<0$ 时，有

$$\dot{L} = y^2(\mu + kx^2),$$

此时相应地有 $\mathbf{Z} = \{(x, y): y=0\}$，因此原点是吸引的. 于是当 $\mu \leqslant 0$ 时，原点是渐近吸引的，其吸引区域是全平面，利用分支定理可知系统出现超临界分支，且当 $\mu>0$ 时有稳定周期轨. 注意，当 $\mu=0$ 时，系统是吸引的，其轨线穿过某小等位线 $L^{-1}(C)$，这一点当 $\mu>0$ 充分小时仍成立，但此时不动点已是排斥的，因此除不动点以外点的 ω 极限集一定是周期轨而不是不动点. 定理 6.4.2 表明在不动点附近有唯一的周期轨，而不动点附近的点的 ω 极限集均为此周期轨.　201

再考虑 $k>0$ 的情形，仍有 $\dot{L} = y^2(\mu + kx^2)$，且当 $\mu \geqslant 0$ 时有 $\dot{L} \geqslant 0$. 于是当 $\mu=0$ 时原点是弱排斥的，当 $\mu>0$ 时原点是强排斥的，因此当 $\mu \geqslant 0$ 时没有周期轨. 但由定理可知，当 $\mu<0$ 时却有一个排斥的周期轨. 事实上，当 $\mu=0$ 时，系统从原点出来的轨线穿过某小等位线 $L^{-1}(C)$，这一点当 $\mu<0$ 时仍成立，但此时在原点的不动点是吸引的，于是等位线 $L^{-1}(C)$ 内部的轨线的 α 极限集不是不动点，从而一定是排斥的周期轨. ■

除了安德罗诺夫–霍普夫分支所产生的周期轨以外，系统还可能有其他的周期轨. 下面的例子就说明在亚临界安德罗诺夫–霍普夫分支情形下，还有另一吸引的周期轨，其半径为离开零的有界量.

例 6.4.6　考虑极坐标方程

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$$

$$\dot{\theta} = \omega.$$

由于 r^3 项的系数大于零，故这是亚临界分支. $\dot{r}$ 方程的非零不动点为

$$r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\mu}}{2},$$

其中恒正的为

$$r_1^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \approx 1 + \mu.$$

在该不动点处没有轨线分支. 当 $\mu<0$ 时还存在第二个实的不动点

$$r_2^2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \approx -\mu.$$

注意到 $r_2 \approx \sqrt{-\mu}$，$r_1 \approx \sqrt{1+\mu} \approx 1$. 当 $\mu<0$ 时 r 方程有两个不动点 $0<r_2<r_1$，当 $\mu>0$ 时只有一个不动点 $r_1>0$. 不动点 r_1 总是稳定的，不动点 r_2 存在时是不稳定的，又当 $\mu<0(>0)$ 时不动点 0 是稳定(不稳定)的.

在直角坐标系下，总存在一个半径近似为 $\sqrt{1+\mu}$ 的吸引周期轨；当 $\mu<0$ 时在原点的不动点是稳定的，从而还存在半径近似为 $\sqrt{\mu}$ 的排斥周期轨(参见图 6.4.3).

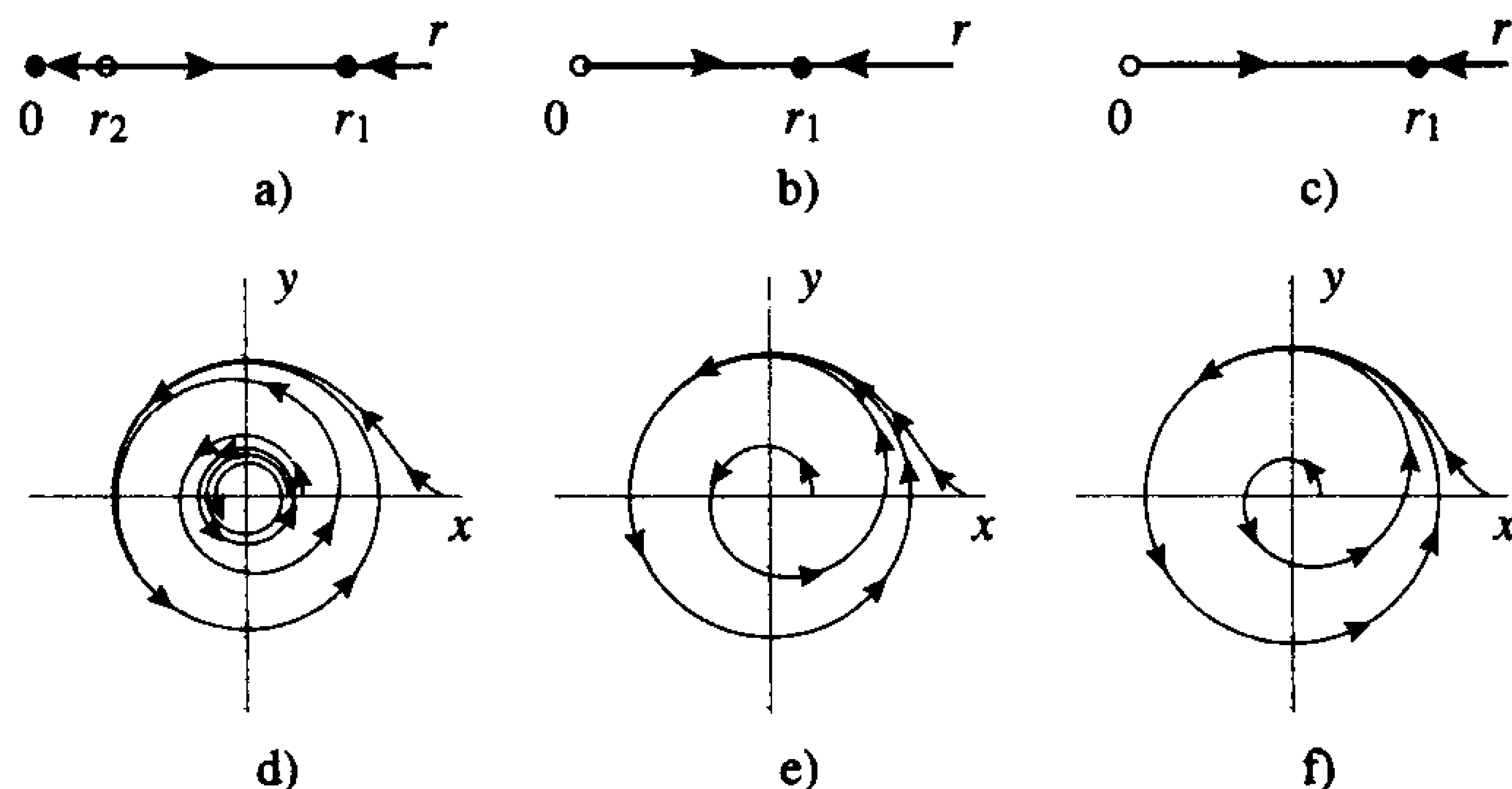


图 6.4.3　图 a、b、c 分别是 $\mu<0$，$\mu=0$，$\mu>0$ 时的 r 方程的相图；图 d、e、f 分别是 $\mu<0$，$\mu=0$，$\mu>0$ 时的直角坐标系下的相图. 在每一种情形下，外面的周期轨总是吸引的；当 $\mu<0$ 时有一个排斥的周期轨 ■

例 6.4.7　考虑摩擦振子方程

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x + \mu y.$$

当 $\mu<0$ 时有一个吸引不动点，当 $\mu>0$ 时有一个排斥不动点. 当 $\mu \neq 0$ 时不存在周期轨，当 $\mu=0$ 时全平面充满周期轨，这些周期轨不是孤立的，所以它们不是极限环，存在同一个参数值，使它们一起出现(参见图 6.4.4).

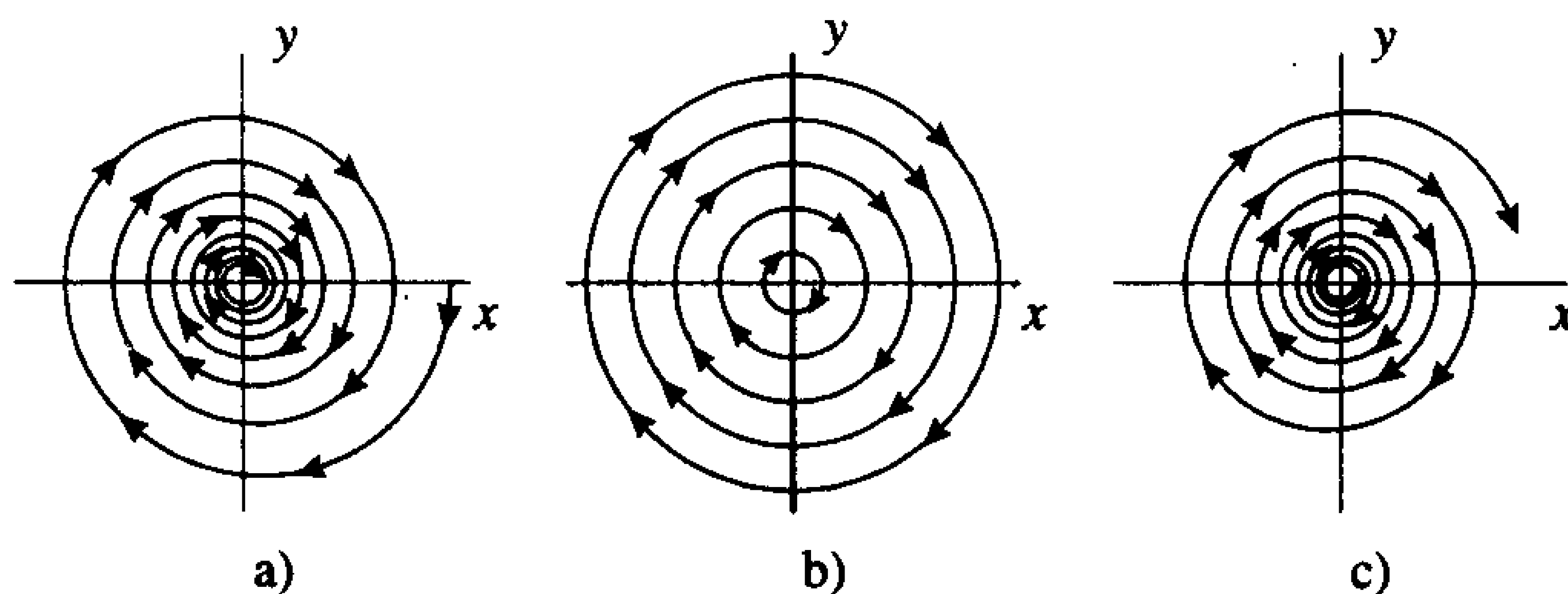


图 6.4.4　例 6.4.7 的直角坐标系下的相图 ■

将上述例子改变一下即为下述带摩擦的钟摆方程：

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\sin(x) + \mu y.$$

同样当 $\mu=0$ 时存在一个开集，其内充满周期轨，当 $\mu\neq 0$ 时不存在周期轨，故该系统既没有超临界分支也没有亚临界分支.

6.5　周期轨的同宿分支

在第 5.4 节讲到极限集时曾举出系统说明了某些点的 ω 极限集是同宿轨. 本节我们将对该系统加进一个参数，并探究当参数变化时周期轨如何产生或消失于同宿轨，此例虽不算经典，却可以说明同宿轨与周期轨之间的关系，而紧随其后的是一个一般定理. 研究这类分支主要是因为它出现于洛伦兹系统，具体讨论在第 7 章给出.

例 6.5.1　考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-x^2+y(6x^2-4x^3-6y^2+12\mu),\end{cases}$$

其中 μ 为参数. 如果 $\dot{y}$ 方程中含 y 的项不出现，则能量函数为

202～203

$$L(x,y)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}.$$

而对完整的方程，将取 L 作为检验函数，函数 L 的等位线图见图 6.5.1. 我们有

$$\begin{aligned}\dot{L}&=y^2(6x^2-4x^3-6y^2+12\mu)\\ &=-12y^2(L-\mu)\begin{cases}\geqslant 0 & L<\mu\\ =0 & L=\mu\\ \leqslant 0 & L>\mu.\end{cases}\end{aligned}$$

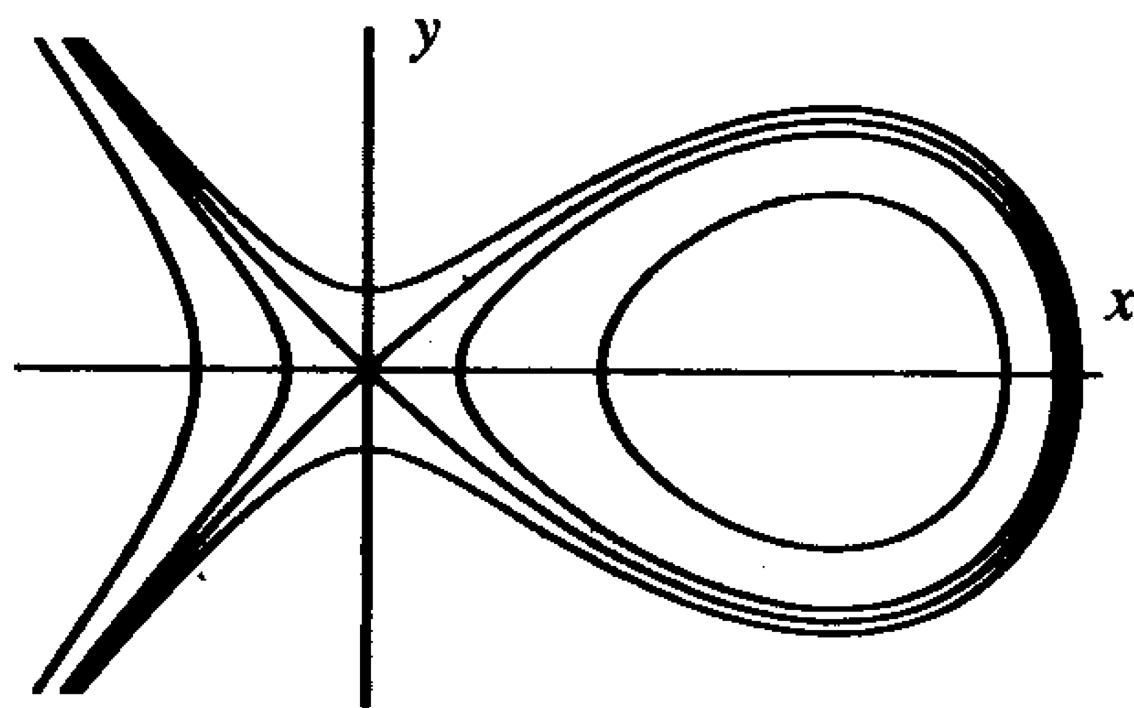


图 6.5.1　例 6.5.1 的检验函数的等位线：$L^{-1}(-0.5)$、$L^{-1}(-0.1)$、$L^{-1}(0)$与 $L^{-1}(0.1)$

当 $\mu=0$ 时，所述系统有一同宿轨

$$\Gamma_0=\{(x,y):L(x,y)=0,x\geqslant 0\}.$$

如上所讨论的，对于满足 $L(x_0,\ y_0)<0$ 和 $x_0>0$ 的点 $(x_0,\ y_0)$，有 $\omega(x_0,\ y_0)=\Gamma_0$，参见图 6.5.2b.

下面考虑 $-\frac{1}{6}<\mu<0$ 的情形，此时等位线

$$\Gamma_\mu=\{(x,y):L(x,y)=\mu,x>0\}$$

是不变集，且位于 Γ_0 的内部，是一闭曲线. 由于 Γ_μ 是不变集且不含有不动点，故 Γ_μ 一定是周期轨. 对于满足 $x_0>0$ 且 $-\frac{1}{6}<L(x_0,\ y_0)<\mu$ 的点 $(x_0,\ y_0)$，由于 $\dot{L}\geqslant 0$，则有 $\omega(x_0,\ y_0)=\Gamma_\mu$；类似地，如果 $x_0>0$ 且 $\mu<L(x_0,\ y_0)\leqslant 0$，由于 $\dot{L}\leqslant 0$，则过点 $(x_0,\ y_0)$ 轨线在 $L^{-1}(0)$ 内部，且有 $\omega(x_0,\ y_0)=\Gamma_\mu$. 特别地，原点的不稳定流形在 $x>0$ 的一支以螺旋式趋于周期轨，周期轨 Γ_μ 是吸引的极限环(参见图 6.5.2a). 若点 $(x_0,\ y_0)$ $(x_0>0)$ 位于原点的稳定流形上，则 $L(\phi(t;\ (x_0,\ y_0)))$ 随 t 由零减少而增加，因此 $\phi(t;\ (x_0,\ y_0))$ 一定先走到原点的不稳定流形之外，然后趋于无穷远(在图 6.5.2a)中，只画到该轨线与正 y 轴相交)，此时已不再存在同宿轨，即

$$W^u(\mathbf{0})\cap W^s(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\},$$

稳定流形与不稳定流形仅在不动点处相交(参见图 6.5.2a)，当 $\mu \to 0$ 时，极限环 Γ_μ 越来越靠近在原点的不动点，在不动点附近路过所用的时间越来越长，于是 Γ_μ 的周期趋于 ∞.

再看 $\mu > 0$ 的情形，不变曲线 $L^{-1}(\mu)$ 为不含闭曲线的无界曲线，事实上，可以证明没有周期轨. 在原点的不稳定流形上靠近原点的不动点处，L 的值介于零和 μ 之间，由于 $\dot{L} > 0$，故 L 是递增的，因而此点的轨线不可能再回到原点，而是走到在原点的稳定流形的外侧，这样同宿轨已破裂. 事实上，若 $(x_0, y_0) \neq (1, 0)$ 是 Γ_0 内侧的任一点(即 $x_0 > 0$ 且 $-\frac{1}{6} < L(x_0, y_0) < 0$)，则点 (x_0, y_0) 要么在原点的稳定流形上，要么随着 t 的增加 $\phi(t; (x_0, y_0))$ 最终趋于无穷远. 由于在圈 $\Gamma_0 = L^{-1}(0)$ 上有 $\dot{L} > 0$，则当 t 增加时没有轨线进入圈的内侧，而其外侧的轨线仍在其外. 事实上，可证原点的稳定流形之外的任一点的轨线都会趋于无穷远，因而不存在周期轨(此时的相图参见图 6.5.2c). ■

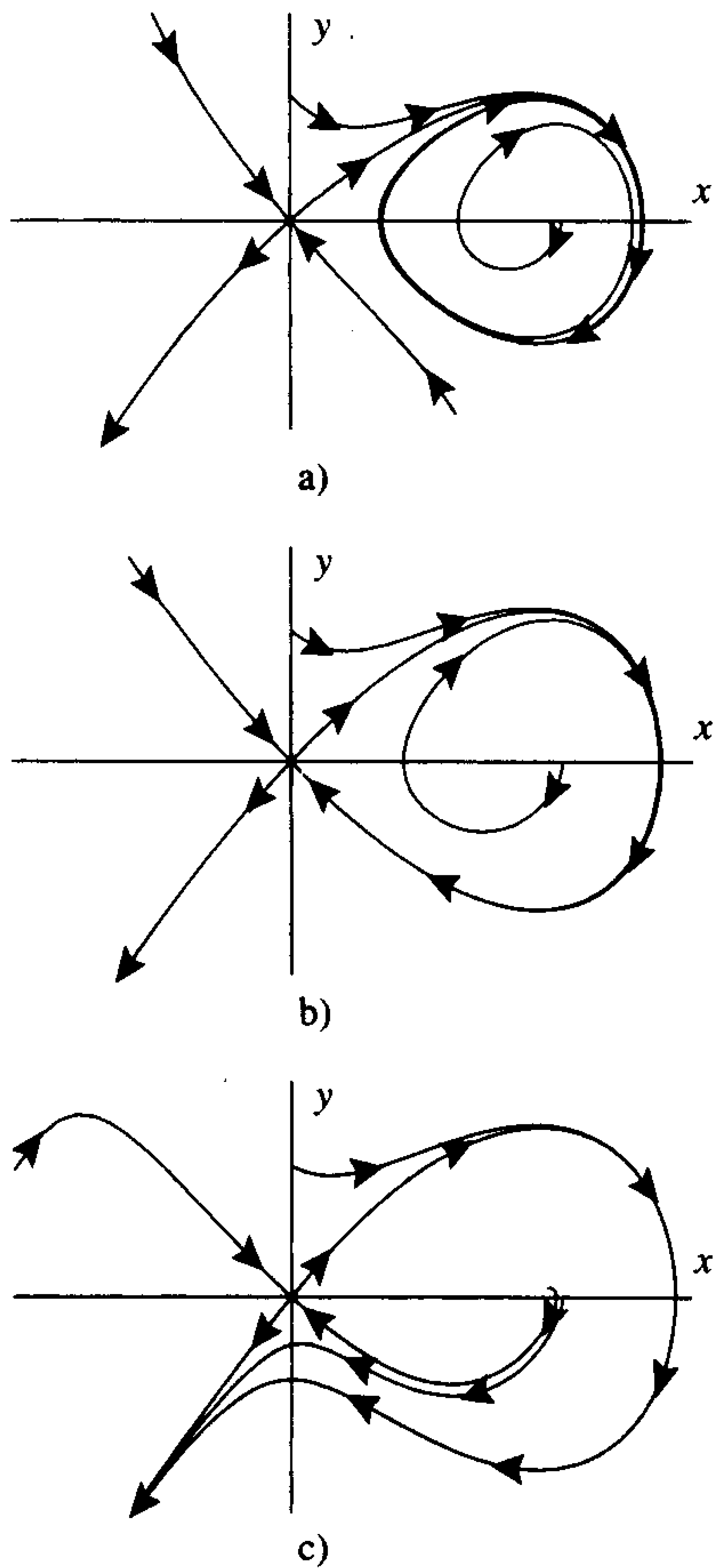


图 6.5.2　例 6.5.1 的同宿轨分支

还记得向量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的发散量为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

204～205

上述发散量亦称为微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的发散量. 上述例题与一般同宿分支的主要区别在于例中向量场的发散量当 $\mu = 0$ 时为零. 正如下述定理所设，在不动点处的发散量不为零是同宿分支的非退化条件.

定理 6.5.2(同宿分支)　*设含参量 μ 的微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 有一个鞍点 $\boldsymbol{p}_\mu$，且满足下述条件：*

(i) 当 $\mu = \mu_0$ 时，不稳定流形 $W^u(\boldsymbol{p}_{\mu_0}, \boldsymbol{F}_{\mu_0})$ 的一支 $\Gamma_{\mu_0}^+$ 含于稳定流形 $W^s(\boldsymbol{p}_{\mu_0}, \boldsymbol{F}_{\mu_0})$ 中.

(ii) 当 $\mu = \mu_0$ 时，$\boldsymbol{F}_{\mu_0}$ 在 $\boldsymbol{p}_{\mu_0}$ 处的发散量小于零. 则对于在 $\Gamma_{\mu_0}^+$ 内部附近的点 $\boldsymbol{q}_0$，有

$$\omega(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{F}_{\mu_0}) = \{\boldsymbol{p}_{\mu_0}\} \cup \Gamma_{\mu_0}^+.$$

(iii) 进一步假设当 $\mu \neq \mu_0$ 时，同宿轨 $\Gamma_{\mu_0}^+$ 破裂，且当 $\mu < \mu_0$ ($> \mu_0$) 时，不动点 $\boldsymbol{p}_\mu$ 的不稳定流形在稳定流形内侧(外侧).

则当 $0 < \mu_0 - \mu \ll 1$ 时，存在一个吸引的周期轨 Γ_μ，当 $\mu \to 0$ 时，$\Gamma_\mu \to \Gamma_{\mu_0}$ 且 Γ_μ 的周期趋于 ∞.

若 $\boldsymbol{F}_{\mu_0}$ 在 $\boldsymbol{p}_{\mu_0}$ 处的发散量大于零，其余条件不变，则当 $0 < \mu - \mu_0 \ll 1$ 时存在一个不稳定的周期轨.

上述定理所给出的周期轨产生于同宿轨的现象称为同宿分支.

下面解释一下当在不动点处的发散量为负时同宿轨为何是吸引的. 由定理 4.7.9 或

4.7.11，经过一可微变换将方程化为线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = ax\\ \dot{y} = -by,\end{cases}$$

其中 $a<b$(省略参数 μ)，则由截线 $y=y_0$ 上的点 (x, y_0) 出发的轨线有解 $x(t)=xe^{at}$，$y(t)=y_0e^{-bt}$，经过时间 τ 后，到达直线 $x=x_1$，即

$$x_1 = xe^{a\tau},\quad e^{-\tau} = x_1^{-1/a}x^{1/a},$$

而 y 的值为

$$y(\tau) = y_0\,(e^{-\tau})^b = y_0x_1^{-b/a}x^{b/a}.$$

于是，不动点附近的庞加莱映射为

$$y = P_{\mu,1}(x) = y_0x_1^{-b/a}x^{b/a},$$

其中$\dfrac{b}{a}>1$．由于 $P'_{\mu,1}(x)=y_0x_1^{-b/a}x^{-1+b/a}$，则 $P'_{\mu,1}(0)=0$ 且 $|P'_{\mu,1}(x)|\ll 1$(x 充分小)．由 $x=x_1$ 到 $y=y_0$ 的庞加莱映射 $x=P_{\mu,2}(y)$ 为可微映射．由于在两截线间所用的时间 τ 有界，故 $P'_{\mu,2}(y)\neq 0$ 且有限，点 $y=0$ 在不稳定流形上，于是 $P_{\mu,2}(0)$ 是不稳定流形与截线 $y=y_0$ 的交点，该点随 μ 而变，故令

$$P_{\mu,2}(0) = \delta_\mu,$$

206

其中 δ_μ 与 μ 同号．$P_{\mu,1}$与 $P_{\mu,2}$的复合即是 $y=y_0$ 到其自身的庞加莱映射，即

$$P_\mu(x) = P_{\mu,2}(P_{\mu,1}(x)) = P_{\mu,2}(x^{b/a}).$$

由链式法则可得

$$P'_\mu(x) = P'_{\mu,2}(x^{b/a})P'_{\mu,1}(x),$$

$$P'_\mu(0) = P'_{\mu,2}(0)P'_{\mu,1}(0) = 0 \qquad \text{且}$$

$$|P'_\mu(x)| < 1 \quad (|x|\ll 1).$$

由中值定理可知，当 $|\mu|+|x|\ll 1$ 时，有

$$|P_\mu(x) - P_\mu(0)| = |P'_\mu(x')|\cdot|x-0|.$$

当 $\mu=0$，$0<x\ll 1$ 时，有

$$0 = P_0(0) < P_0(\hat{x}) < \hat{x}.$$

当 $\mu>0$ 且充分小时，有

$$0 < \delta_\mu = P_\mu(0) < P_\mu(\hat{x}) < \hat{x},$$

且 P_μ 把区间$[0,\hat{x}]$压缩到其内，故存在点 x_μ，使得 $P_\mu(x_\mu)=x_\mu$ 且 $P'_\mu(x_\mu)<1$(有关映射的不动点的存在性详见定理 9.3.7 或引理 10.1.1)．这就得到 $\mu>0$ 时的吸引的周期轨．

当 $a>b$ 时可类似地讨论．此时 $P'_{\mu,1}(0)=\infty$，且

$$P'_\mu(x) = P'_{\mu,2}(x^{\frac{b}{a}})P'_{\mu,1}(x) > 1(|x|\ll 1).$$

于是当 $\mu<0$ 时，有

$$P_\mu(0) = \delta_\mu < 0 < \hat{x} < P_\mu(\hat{x}),$$

且 P_μ 将区间$[0,\hat{x}]$扩至其外，因此存在点 x_μ，使得 $P_\mu(x_\mu)=x_\mu$ 且 $P'_\mu(x_\mu)>1$，这就给出了 $\mu<0$时的排斥的周期轨．

6.6 流作用下面积或体积的变化

本节考虑流的作用是如何改变在其定义域中某区域的面积或体积的. 在二维情形下，这可以用来排除相图中某区域周期轨的存在性；在7.1节，还可用这一结果来证明洛伦兹系统任一不变集一定是零体积的，本节的刘维尔公式将在下节用于计算庞加莱映射的导数.

下述定理分二维和三维及以上两种情形叙述，二维情形用“面积”一词，三维及以上情形用“体积”一词. 三维以上区域的体积是指 $dV = dx_1 \cdots dx_n$ 在该区域上的积分. 本书只将该定理应用于二维和三维系统，更高维情形就不劳神读者了.

定理 6.6.1　设有$\mathbb{R}^n$上的微分方程组$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，其流为$\phi(t;\ \boldsymbol{x})$. 令$\mathcal{D}$为$\mathbb{R}^n$中的区域，且有(i)有限体积；(ii)光滑边界$\partial\mathcal{D}$. 用$\mathcal{D}(t)$表示流在时间$t$所形成的区域，即

207

$$\mathcal{D}(t) = \{\phi(t;\boldsymbol{x}_0):\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}\}.$$

(a)记$V(t)$为$\mathcal{D}(t)$的体积，则

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \nabla\cdot \boldsymbol{F}_{(x)}\,dV,$$

其中$\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{(x)}$是$\boldsymbol{F}$在点$\boldsymbol{x}$处的发散量，$dV = dx_1\cdots dx_n$是体积元素. 若$n=2$，则$V(t)$是面积，$dV$是面积元素$dA = dx_1 dx_2$.

(b)若$\boldsymbol{F}$的发散量是常数(即与$\boldsymbol{x}$无关)，则

$$V(t) = V(0)e^{\nabla\cdot \boldsymbol{F}t}.$$

这样，若向量场的发散量为零(即$\nabla\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$)，则体积保持不变；若$\nabla\cdot\boldsymbol{F}<0(>0)$，则体积指数级减少(增加).

在第7章我们将利用定理的结论(b)来讨论洛伦兹方程，这个三维微分方程组的发散量为负常数，并有一正向不变集$\mathcal{D}$，当t增加时该集变小，于是$\mathcal{D}(t)=\phi(t;\ \mathcal{D})$的体积随着$t$的增加而递减，故$\mathcal{D}$收敛于一零体积的不变吸引集(由上述定理可知体积小于任意正数).

以后还用到流的导数的行列式沿解曲线的变化方式，这就是所谓的刘维尔公式. 由于$D_x\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$的行列式是一个无穷小细管的体积，所以这个公式与上一定理有关.

定理 6.6.2 (刘维尔公式)　考虑$\mathbb{R}^n$上的微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

设$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$与$\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$在某开集$U\subset\mathbb{R}^n$上关于$\boldsymbol{x}$连续，则流的偏导数矩阵的行列式等于向量场的发散量$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$沿着轨线之积分的指数，即

$$\det(D_x\phi_{(t;x_0)}) = \exp\left(\int_0^t (\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{(\phi(s;x_0))}\,ds\right).$$

$D_x\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$)对时间的导数之行列式所满足的方程可由定理3.1.10的第一变分公式和定理2.3.1给出的时变线性微分方程的基解矩阵的行列式的计算公式相结合而得. 在6.9节中将基于前面定理中的体积变化公式给出另一证明.

利用上面的定理可给出平面某区域内不存在周期轨的条件.

定理 6.6.3 考虑平面微分方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，设$\gamma$为其周期轨，所围区域为$\mathcal{D}$，而所述微分方程在$\mathcal{D}$上有定义.

(a)(**本迪克松判据**)则

$$\iint_{\mathcal{D}}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{(x)}\mathrm{d}A=0.$$

特别地，若$\mathcal{R}$是一没有“洞”的区域，而方程的发散量在此域中定号，则$\mathcal{R}$中不存在完整的周期轨.

(b)(**Dulac 判据**)设$g(x, y)$为$\mathcal{D}$上的可微实函数，则

$$\iint_{\mathcal{D}}\nabla\cdot(g\boldsymbol{F})_{(x)}\mathrm{d}A=0.$$

特别地，若$\mathcal{R}$是一没有“洞”的区域，而$g(x, y)\boldsymbol{F}(x, y)$的发散量在此域中定号，则$\mathcal{R}$中不存在完整的周期轨.

208

结论(b)可以由(a)推出，这是由于$\dot{\boldsymbol{x}}=g(x, y)\boldsymbol{F}(x, y)$与$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(x, y)$有相同的轨线，只是其运行速度不同而已.

应用上述定理可证明某些系统不存在周期轨.

例 6.6.4 考虑范德波尔方程

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x+\mu(1-x^2)y,\end{cases}$$

其发散量为$\mu(1-x^2)$，故当$\mu\neq 0$时在带域$|x|\leqslant 1$内不存在完整的周期轨. 利用检验函数$L(x, y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}$可获得同样的结果，就像 6.3 节对李纳方程所做的. ■

例 6.6.5 考虑方程

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a-by-fx)\\ \dot{y}=y(-c+ex-hy),\end{cases}$$

其中所有系数a, b, c, e, f和h全大于零. 注意到这是含有种群密度制约的捕食者-食饵系统. 假设$\dfrac{a}{f}>\dfrac{c}{e}$，则存在一个正平衡点$(x^*, y^*)$，由于沿$x=0$有$\dot{x}=0$，沿$y=0$有$\dot{y}=0$，故第一象限为不变集. 在第一象限中，发散量

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{(x,y)}=a-by-2fx-c+ex-2hy$$

是变号的. 但若取$g(x, y)=\dfrac{1}{xy}$，则

$$\nabla\cdot(g\boldsymbol{F})_{(x,y)}=-f/y-h/x,$$

其在第一象限中恒为负，因此在第一象限内不存在周期轨. 函数$g(x, y)=\dfrac{1}{xy}$虽然在坐标轴上无定义，但在第一象限内任意周期轨所围的区域内是有定义的. ■

下一节的例 6.7.9 将利用庞加莱映射法给出周期轨不存在的另一证明.

6.7 周期轨的稳定性与庞加莱映射

利用从正 y 轴出发的轨线再次回到正 y 轴的方法证明了由李纳系统确定的自激振子存在唯一吸引的周期轨，这一首次返回映射就是庞加莱映射的例子.

先从计算 6.1 节的一个简单例子的庞加莱映射入手，该例之解可以用极坐标表示. 其次转到庞加莱映射的一般定义，并考虑具有多元庞加莱映射的例子. 接着依据庞加莱映射导数的特征值给出周期轨为渐近稳定的条件，并建立庞加莱映射导数的特征值与流的导数的特征值的联系. 在二维情形下，又可以利用发散量给出判断周期轨是吸引还是排斥的条件，并依此再次验证了范德波尔方程存在一个吸引的周期轨.

209

例 6.7.1(再论例 6.1.4 的庞加莱映射)　回到微分方程

$$\begin{cases}\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2)\\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2),\end{cases}$$

或其极坐标形式

$$\begin{cases}\dot{r} = r(1 - r^2)\\ \dot{\theta} = -1,\end{cases}$$

在例 6.1.4 中已得到由射线 $\{(x, 0): x > 0\}$ 到其自身的庞加莱映射为

$$\begin{aligned}P(r) &= r[r^2 + e^{-4\pi}(1 - r^2)]^{-1/2}\\ &= r[1 - (1 - e^{-4\pi})(1 - r^2)]^{-1/2}\\ &= [1 + e^{-4\pi}(r^{-2} - 1)]^{-1/2}.\end{aligned}$$

其导数为

$$P'(r) = \frac{e^{-4\pi}}{[r^2 + e^{-4\pi}(1 - r^2)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{-4\pi}P(r)^3}{r^3} > 0.$$

下面利用庞加莱映射来证明周期轨 $r = 1$ 是渐近稳定的，且吸引除原点外的所有轨线. 虽然这一点很容易从方程本身观察到，但这里是想通过庞加莱映射来得到这一结论，以便导出庞加莱映射与周期轨稳定性之间的关系.

(a)点 $r = 0$ 与 $r = 1$ 都映射到自身，即 $P(0) = 0$，$P(1) = 1$，这由 $P(r)$ 表示式的第一个方程可知.

(b)考虑 $r > 1$ 的情形. $P(r)$ 的第二个表达式的分母满足

$$1 - (1 - e^{-4\pi})(1 - r^2) > 1,$$

于是

$$P(r) < r.$$

同样，$P(r)$ 的第三个表达式的分母满足

$$1 + e^{-4\pi}(r^{-2} - 1) < 1,$$

于是

$$1 < P(r).$$

总之有 $1<P(r)<r$，且轨线返回时更靠近周期轨 $r=1$. $P(r)$ 的图像参见图 6.7.1，显然当 $r>1$ 时 $P(r)$ 的图像在对角线 $(r,\ r)$ 的下方.

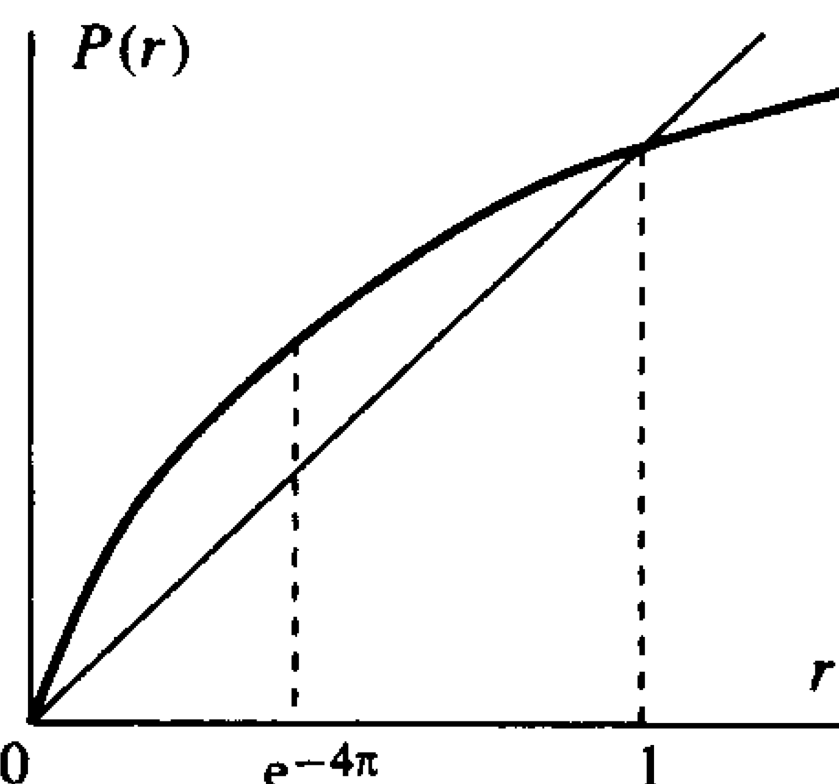


图 6.7.1 例 6.1.4 的庞加莱映射

若 $r_0>0$，则 $1<r_1=P(r_0)<r_0$，依此类推，有 $1<r_n=P(r_{n-1})<r_{n-1}$，于是

$$1<r_n=P(r_{n-1})<r_{n-1}=P(r_{n-2})<\cdots<r_2$$
$$=P(r_1)<r_1=P(r_0)<r_0.$$

故这一递减数列一定收敛到 P 的不动点，即 $r_n\to 1$.

210

事实上，由中值定理更易知收敛性成立. 具体地，由 $r>1$，$\dfrac{P(r)}{r}<1$，有

$$P'(r)=\frac{e^{-4\pi}P(r)^3}{r^3}<e^{-4\pi}<1.$$

对于序列点 r_j，一定存在 $r'_j\in(1,\ r_j)$ 使得

$$P(r_j)-P(1)=P'(r'_j)(r_j-1),$$

于是

$$\begin{aligned}r_n-1&=P(r_{n-1})-P(1)=P'(r'_{n-1})(r_{n-1}-1)<e^{-4\pi}(r_{n-1}-1)\\&=e^{-4\pi}(P(r_{n-2})-P(1))=e^{-4\pi}P'(r'_{n-2})(r_{n-2}-1)\\&<e^{-4\pi}e^{-4\pi}(r_{n-2}-1)=e^{-2\cdot 4\pi}(r_{n-2}-1)\\&\ \ \vdots\\&<e^{-n4\pi}(r_0-1).\end{aligned}$$

由于 $e^{-\pi 4}<1$，故 $e^{-n4\pi}\to 0(n\to\infty)$，因此 $r_n\to 1(n\to\infty)$. 上面实际上明显地给出了点列 $\{r_n\}$ 收敛于 1 的快慢程度.

(c) 最后，考虑 $0<r<1$ 的情形，易知 $0<(1-e^{-4\pi})(1-r^2)<1$，故有

$$0<[1-(1-e^{-4\pi})(1-r^2)]^{\frac{1}{2}}<1,$$
$$0<r<P(r).$$

由 $P(r)$ 的第二式得

$$1<1+e^{-4\pi}(r^{-2}-1),\quad 于是$$
$$P(r)=[1+e^{-4\pi}(r^{-2}-1)]^{-\frac{1}{2}}<1.$$

211

(也可由轨线不相交原理与 $P(1)=1$ 得 $P(r)<1$.) 故有

$$0<r<P(r)<1,$$

即轨线返回时更靠近周期轨 $r=1$. 取 $0<r_0<1$，得

$$0<r_0<r_1<\cdots<r_{n-1}<r_n<1.$$

此递增数列一定收敛于 P 的不动点，即 $r_n\to 1$.

同样应用中值定理，对于 $0<r<1$，有 $P(r)<1$，从而

$$P'(r)\leqslant e^{-4\pi}r^{-3}.$$

所以 $0<P'(r)<1(r>e^{-\frac{4\pi}{3}})$. 另一方面，$P'(0)=e^{2\pi}>1$，则 $P'(r)>1(0<r\ll 1)$，由这些导数

值的估计易知庞加莱映射 $P(r)$ 的图像如图 6.7.1 所示，即当 n 充分大时，一旦有 $P'(r)<1$，就可以用中值定理得出数列收敛到 1 的速度的范围.

庞加莱映射在周期轨处的导数为 $P'(r)=e^{-4\pi}<1$. 由于 $P'(1)$ 是一个常数，可将其视为 1×1 阶矩阵 $(P'(1))$ 的特征值. ■

在给出一般性条件之前，我们先看一个特殊的非齐次线性微分方程，这个例子的庞加莱映射需要基矩阵解在强迫项周期的值，比如庞加莱映射的导数可以由齐次线性方程的基矩阵解来明显表示. 这就容许我们讨论有关庞加莱映射特征值的条件.

例 6.7.2　考虑非齐次线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1-x_2+\cos(\omega t).\end{aligned}$$

强迫项 $\cos\omega t$ 具有周期 $2\pi/\omega$，$\cos(\omega(t+2\pi/\omega))=\cos(\omega t+2\pi)=\cos(\omega t)$. 为了将该系统化为自治的，引入变量 τ，满足 $\frac{d\tau}{dt}=1$ 且视 τ 为周期 $2\pi/\omega$ 的变量，则化为

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= 1 \qquad \left(\mathrm{mod}\,\frac{2\pi}{\omega}\right)\\ \dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1-x_2+\cos(\omega\tau).\end{aligned}$$

其中 $\left(\mathrm{mod}\,\frac{2\pi}{\omega}\right)$ 是模 $2\pi/\omega$ 的缩写，即减去 $2\pi/\omega$ 的整数倍后余下的部分. 由于变量 τ 是周期的，视为“角变量”. 此处将 τ 的方程列为第一个，这样所得结果就更像下面要讨论的一般情况. 取初始值 $(0, x_{1,0}, x_{2,0})$，由参数变易法得其解为

$$\begin{bmatrix}\tau(t)\\ x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t\\ e^{At}\begin{bmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{bmatrix}+\int_0^t e^{A(t-s)}\begin{bmatrix}0\\ \cos(\omega s)\end{bmatrix}ds\end{bmatrix},$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

212

是线性系统的矩阵. 变量 τ 经过时间 $2\pi/\omega$ 后又回到自身，取截线

$$\Sigma=\{\tau=0\}.$$

在 Σ 上只写横坐标，则由 Σ 到自身的庞加莱映射为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0)=e^{A\frac{2\pi}{\omega}}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\nu},$$

其中

$$\boldsymbol{\nu}=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{A\left(\frac{2\pi}{\omega}-s\right)}\begin{bmatrix}0\\ \cos(\omega s)\end{bmatrix}ds$$

是一个常向量. A 的特征值为 $\boldsymbol{\lambda}^{\pm}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$，$e^{A\frac{2\pi}{\omega}}$ 的特征值为 $e^{\frac{2\pi\lambda^{\pm}}{\omega}}=e^{-\frac{\pi}{\omega}}e^{\pm i\frac{\sqrt{3}\pi}{\omega}}$，其绝对值为

$e^{-\frac{\pi}{\omega}}$. 只要满足

$$e^{A\frac{2\pi}{\omega}}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}^* \quad 或 \quad \boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{I} - e^{A\frac{2\pi}{\omega}})^{-1}\boldsymbol{v}.$$

则 $\boldsymbol{P}$ 有一个不动点，微分方程组有一个周期轨. 对任意的初始条件，有

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}^*) = e^{A2\pi/\omega}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v} - (e^{A2\pi/\omega}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{v})$$

$$= e^{A2\pi/\omega}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*) = e^{-\pi/\omega}e^{\left(A+\frac{1}{2}\right)2\pi/\omega}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*).$$

由归纳法知，n 次迭代后有

$$\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{x}^*) = e^{-n\pi/\omega}e^{\left(A+\frac{1}{2}I\right)n2\pi/\omega}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*).$$

$e^{\left(A+\frac{1}{2}\right)n2\pi/\omega}$ 的特征值为 $e^{\pm in\sqrt{3}\pi/\omega}$，且点列

$$e^{\left(A+\frac{1}{2}\right)n2\pi/\omega}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*)$$

位于一个椭圆上，又 $e^{-n\pi/\omega}\to 0\,(n\to\infty)$，则 $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 $\boldsymbol{P}$ 的不动点 $\boldsymbol{x}^*$，该点位于周期轨上. 得到这样结果的根本原因在于 $e^{-\pi/\omega}<1$，但是 $e^{-\pi/\omega}$ 等于矩阵 $e^{A2\pi/\omega}$ 每一个特征值的绝对值，而矩阵 $e^{A2\pi/\omega}$ 是庞加莱映射的偏导数矩阵.

在三维空间来看流，其时间$\dfrac{2\pi}{\omega}$的映射为

$$\phi\left(\frac{2\pi}{\omega};(\tau_0,\boldsymbol{x}_0)\right) = \begin{bmatrix} \tau_0 + \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_0 + \dfrac{2\pi}{\omega} \\ e^{A2\pi/\omega}\boldsymbol{x}_0 + \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{A((2\pi/\omega)-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega s + \tau_0)\end{bmatrix}ds \end{bmatrix}.$$

关于初始值$(\tau_0,\ \boldsymbol{x}_0)$的导数为

$$D_{(\tau_0,\boldsymbol{x}_0)}\phi_{(2\pi/\omega,(\tau_0,\boldsymbol{x}_0))} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ * & D\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{x}_0)} \end{bmatrix},$$

其中“ * ”是可能非零的项. 所以流在一个周期后关于初始值的导数的特征值是 1 和 $D\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{x}_0)}$ 的特征值.

■

下面给出庞加莱映射的一般定义 .

定义 6.7.3 考虑微分方程组$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，设点 $\boldsymbol{x}^*$ 使得对某 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 有 $F_k(\boldsymbol{x}^*)\neq 0$，则点 $\boldsymbol{x}^*$ 附近的轨线都穿过通过 $\boldsymbol{x}^*$ 的超平面

$$\Sigma = \{\boldsymbol{x}: x_k = x_k^*\},$$

故称之为横截(transversal). 假设对某些 $\tau^*>0$，使得 $\phi(\tau^*;\ \boldsymbol{x}^*)\in\Sigma$，再设 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}^*)$ 当 $0<t<\tau^*$ 时在 $\boldsymbol{x}^*$ 附近与 Σ 没有其他交点. 对于 $\boldsymbol{x}^*$ 附近的点 $\boldsymbol{x}$，必存在时间 $\tau(\boldsymbol{x})$，使得$\phi(\tau(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x})\in\Sigma$，则

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \phi(\tau(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x})$$

称为庞加莱映射.

213

如果映射进行了多次，则用 $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{P}\circ\ \boldsymbol{P}\circ\ \cdots\circ\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0)$ 表示 n 次迭代. 因此 $\boldsymbol{P}^n$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 自身迭代 n 次. 如果 $\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{n-1})$，则 $\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{x}_0)$.

下面的定理表明了庞加莱映射的特征值与流的周期映射的特征值之间的关系.

定理 6.7.4　设 $\boldsymbol{x}^*$ 属于周期为 T 的周期轨，令 Σ 为经过 $\boldsymbol{x}^*$ 且由自变量某一分量为常数来确定的超平面，即当对某 $1\leqslant k\leqslant n$，有 $F_k(\boldsymbol{x}^*)\neq 0$ 时可令

$$\Sigma=\{\boldsymbol{x}:x_k=x_k^*\}.$$

设 $\boldsymbol{P}$ 为从 Σ 上 $\boldsymbol{x}^*$ 的某邻域到 Σ 的庞加莱映射. 则 $D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)}$ 的特征值由 $D\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 的 $n-1$ 个特征值与 1 组成，这个 1 由轨线的周期性得到.

证明思路　前面曾证明

$$D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{F}(\phi(\boldsymbol{T};\boldsymbol{x}^*))=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*),$$

因此 1 是与特征向量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)$ 对应的特征值.

庞加莱映射是这样形成的：存在时间 $\tau(\boldsymbol{x})$ 使得 $\phi(\tau(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x})$ 回到 Σ，即

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})=\phi(\tau(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}).$$

因此对于 Σ 中的向量 $\boldsymbol{v}$，我们有

$$\begin{aligned}D\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{v}&=D_x\phi_{(\tau(\boldsymbol{x}^*);\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{v}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{(\tau(\boldsymbol{x}^*);\boldsymbol{x}^*)}\right)\left(\frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{x}}\bigg|_{\boldsymbol{x}^*}\right)\boldsymbol{v}\\&=D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)(D\tau_{(\boldsymbol{x}^*)})\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

在第二项中，

$$(D\tau_{(\boldsymbol{x}^*)})\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{x}}\bigg|_{\boldsymbol{x}^*}\right)\boldsymbol{v}$$

是一个标量，与它相乘的是向量场 $F(\boldsymbol{x}^*)$，表示由 Σ 再回到自身时间上的变化. 这样对位于 Σ 中的向量 $\boldsymbol{v}$ 便有

$$D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{v}=D\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)(D\tau_{(\boldsymbol{x}^*)})\boldsymbol{v}.$$

因此利用 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)$ 与 Σ 上的 $n-1$ 个向量所构成的基，则有

$$D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)}=\begin{bmatrix}1 & -D\tau_{(\boldsymbol{x}^*)}\\0 & D\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{x}^*)}\end{bmatrix},\tag{6.7.1}$$

214　则定理结论显然. ■

定义 6.7.5　在周期轨处，庞加莱映射的导数 $D\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 的 $(n-1)$ 个特征值称为特征乘数. $D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)}$ 的特征值由 $(n-1)$ 个特征乘数和 1 组成，其中 1 总是一个特征值.

若所有特征乘数的绝对值都不等于 1，则称周期轨为双曲的.

下面我们叙述本节的主要定理.

定理 6.7.6　设 $\boldsymbol{x}^*$ 属于周期为 T 的周期轨.

(a) 若周期轨的所有特征乘数的绝对值都小于 1，则周期轨是吸引的(即轨道渐近稳定的)；

(b) 若周期轨的特征乘数中至少有一个绝对值大于 1，则周期轨不是依轨道李雅普诺夫稳定的(即是不稳定的周期轨).

在平面上，周期轨的特征值是由发散量积分决定的.

定理 6.7.7 考虑平面微分方程，设 $\boldsymbol{x}^*$ 属于周期为 T 的周期轨，令 $(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{(x)}$ 是向量场的发散量，设 y 是横截 Σ 的标量坐标变量，且 y^* 表示点 $\boldsymbol{x}^*$，则庞加莱映射的导数为

$$P'(y^*)=\exp\left(\int_0^T(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{(\phi(t;\boldsymbol{x}^*))}\mathrm{d}t\right).$$

证明 在二维情形下，由式(6.7.1)得

$$\det(D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)})=P'(y^*).$$

由刘维尔公式、定理 6.6.2 及 $D_x\phi_{(0;\boldsymbol{x}^*)}=\boldsymbol{I}$，得

$$\begin{aligned}\det(D_x\phi_{(T;\boldsymbol{x}^*)})&=\exp\left(\int_0^T(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{(\phi(t;\boldsymbol{x}^*))}\mathrm{d}t\right)\det(D_x\phi_{(0;\boldsymbol{x}^*)})\\&=\exp\left(\int_0^T(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{(\phi(t;\boldsymbol{x}^*))}\mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

定理得证. ■

下面应用上述定理来给出几个例子.

例 6.7.8 考虑非自治方程

$$\dot{x}=(a+b\cos(t))x-x^3,$$

其中 a，$b>0$. 重新改写上述系统，使其不显含 t，有

$$\begin{cases}\dot{\theta}=1 & (\mathrm{mod}\ 2\pi)\\ \dot{x}=(a+b\cos(\theta))x-x^3.\end{cases}$$

由 $\theta=0$ 出发的流可表示为

$$\phi(t;(x_0,0))=(t,\psi(t;x_0)),$$

其中 $\theta(t)=t$. 则从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 的庞加莱映射为

$$\phi(2\pi;(x_0,0))=(2\pi,P(x_0))\qquad 或$$
$$\psi(2\pi;x_0)=P(x_0).$$

由于当 $x=0$ 时，有 $\dot{x}=0$，故 $\psi(t;\ 0)\equiv0$，$P(0)=0$，则 0 是庞加莱映射的不动点，且 (0, 0)在微分方程组的周期轨上.

当 $x>\sqrt{a+b}$ 时，有

$$\dot{x}<(a+b)x-x^3=x(a+b-x^2)<0,$$

于是 $0<\psi(t;\ x)<x$，且 $0<P(x)<x$；类似地可得当 $x<-\sqrt{a+b}$时，$0>P(x)>x$. 因此 P 的其他不动点一定在 $\pm\sqrt{a+b}$之间.

变分矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -b\sin\theta x & a+b\cos\theta-3x^2\end{bmatrix}.$$

要注意的是，方程对于 $\dot{\theta}$ 是个常数，所以有零特征值. 因此，发散量为 $a+b\cos\theta-3x^2$.

沿着 $\phi(t;\ (0,\ 0))=(t,\ 0)$，发散量为 $a+b\cos t$，利用定理 6.7.7，有

$$P'(0)=\mathrm{e}^{\int_0^{2\pi}a+b\cos(t)\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{a2\pi}>1.$$

因此 0 是 P 的排斥的不动点，而 $x=0$ 是流的不稳定周期轨.

其次我们考虑过 $x_0 \neq 0$ 的周期轨，于是 $P(x_0)=x_0$，由解的唯一性可知，对任意的 t 有 $\psi(t;\ x_0) \neq 0$. 又发散量为

$$\begin{aligned} a+b\cos t-3x^2 &= 3(a+b\cos t-x^2)-2a-2b\cos t \\ &= \frac{3\dot{x}}{x}-2a-2b\cos t. \end{aligned}$$

则有

$$P'(x_0)=\mathrm{e}^{\int_0^{2\pi}\frac{3\dot{x}}{x}-2a-2b\cos t\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{3\ln|P(x_0)|-3\ln|x_0|}\mathrm{e}^{-a4\pi}=\mathrm{e}^{-a4\pi}<1.$$

这样 $P'(0)>1$，则当 $0<x_1 \ll 1$ 时有 $P(x_1)>x_1$，又当 $x>\sqrt{a+b}$ 时有 $P(x)<x$，因此至少存在一点 $x_0 \in (0,\sqrt{a+b})$，使得 $P(x_0)=x_0$，且 $P'(x_0)<1$. 从图像上看即当 x 增加时，P 的图像从 x 的图像的上方穿过到达下方. 故 P 有唯一的正不动点，这个不动点对应着微分方程组的一个吸引的周期轨.

当 $x<0$ 时，同理可得 P 有唯一的负不动点，对应微分方程组的唯一的周期轨.

方程的周期性意味着我们不能求出其显式解，但解的基本性质与 $b=0$ 时类似. ■

作为定理的另一应用，下面证明一有限制生长的捕食者-食饵系统不存在周期轨.

例 6.7.9　考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}=x(a-by-fx) \\ \dot{y}=y(-c+ex-gy), \end{cases}$$

其中所有系数 a，b，c，e，f 和 g 都大于零，这就是所谓的捕食者-食饵方程，每一种群对自身都有制约作用. 假设 $\frac{a}{f}>\frac{c}{e}$，则在第一象限内有一个不动点 $(x^*,\ y^*)$，其中 x^*，y^* 满足

216

$$\begin{cases} 0=a-by^*-fx^* \\ 0=-c+ex^*-gy^*. \end{cases}$$

在点 $(x^*,\ y^*)$ 处的变分矩阵为

$$\begin{bmatrix} -fx^* & -bx^* \\ ey^* & -gy^* \end{bmatrix}.$$

由于该矩阵的迹是负值，所以不动点是吸引的.

上节已经利用 Dulac 判断依据证明了该方程没有任何周期轨，下面利用庞加莱映射来证明这一结论. 为此，需要利用定理 6.7.7 确定庞加莱映射在周期轨的导数（若周期轨存在）. 发散量为

$$\begin{aligned} \nabla\cdot \boldsymbol{F}_{(x,y)} &= (a-by-fx)-fx+(-c+ex-gy)-gy \\ &= \frac{\dot{x}}{x}+\frac{\dot{y}}{y}-fx-gy. \end{aligned}$$

为了应用定理，令

$$\boldsymbol{\Sigma}=\{(x,y^*):x>x^*\},$$

并考虑由 Σ 到其自身的庞加莱映射 P，假设系统存在一个周期轨，且 $P(x^1)=x^1$，则在 P 的导数中出现的积分为

$$\int_0^T (\nabla\cdot \boldsymbol{F})_{(\phi(t;(x^1,y^*)))}\mathrm{d}t = \int_0^T\left(\frac{\dot{x}}{x}+\frac{\dot{y}}{y}-fx-gy\right)\mathrm{d}t$$

$$= \ln(x(T)) - \ln(x(0)) + \ln(y(T)) - \ln(y(0)) - \int_0^T (fx+gy)\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^T (fx+gy)\mathrm{d}t < 0,$$

由于在周期轨上有 $x(T)=x(0)=x^1$, $y(T)=y(0)=y^*$, 故

$$P'(x) = \exp\left(\int_0^T (\nabla\cdot \boldsymbol{F})_{(\phi(t;(x^1,y^*)))}\mathrm{d}t\right) < 1,$$

又 $P(x^*)=x^*$ 且 $0<P'(x)<1$, 则 $P(x)$是递增的, 但在对角线下方, 所以不存在周期轨. 对初始值$(x_0, y_0)\neq(x^*, y^*)$, 且 $x_0>0$, $y_0>0$, 其负向轨线不以任何周期轨或不动点为极限, 即一定是无界的. ■

Hale 与 Kocak[**48**]利用定理 6.7.7 证明了范德波尔系统的周期轨是稳定的.

定理 6.7.10 *范德波尔系统的任一周期轨都是稳定的, 从而只存在唯一的周期轨.*

证明 范德波尔系统可写为

$$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -x+(1-x^2)y.\end{cases}$$

[217]

引入实值函数 $L(x, y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, 则

$$\dot{L} = y^2(1-x^2) = (1-x^2)(2L-x^2).$$

$\boldsymbol{F}$ 的发散量为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(-x+(1-x^2)y) = 1-x^2.$$

故$\dot{L}=(\nabla\cdot \boldsymbol{F})(2L-x^2)$. 若 L 沿着周期轨 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}^*)$在时刻 t_1 有最小值, 则$\dot{L}(\phi(t_1;\ \boldsymbol{x}^*))=0$, $x=\pm1$ 或 $y=0$. 若 $y=0$ 而 $x\neq\pm1$, 则$\dot{L}$并不变号, 此时最小值不出现, 因此只能当 $x=\pm1$ 时最小值才能出现. 又由于点$(\pm1, 0)$不在周期轨上, 则应有 $y\neq0$. 所以

$$L(\phi(t;\boldsymbol{x}^*)) \geq L(\phi(t_1;\boldsymbol{x}^*)) > L(1,0) = \frac{1}{2}.$$

通过上面的讨论可知沿着周期轨应有 $2L-1>0$, 则$\dot{L}$可写为

$$\begin{aligned}\dot{L} &= (1-x^2)(2L-x^2) = (\nabla\cdot \boldsymbol{F})(2L-1+(1-x^2))\\ &= (\nabla\cdot \boldsymbol{F})(2L-1)+(1-x^2)^2.\end{aligned}$$

两边同时除以 $2L-1$, 得

$$\nabla\cdot \boldsymbol{F} = \frac{\dot{L}}{2L-1} - \frac{(1-x^2)^2}{2L-1}.$$

两边进行积分, 得

$$P'(\boldsymbol{x}^*) = \exp\left(\int_0^T (\nabla\cdot \boldsymbol{F})_{\phi(t;\boldsymbol{x}^*)}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^T \frac{\dot{L}}{2L-1}\mathrm{d}t - \int_0^T \frac{(1-x^2)^2}{2L-1}\mathrm{d}t\right).$$

上式第一个积分为

$$\frac{1}{2}(\ln(2L(\phi(T;\boldsymbol{x}^*))-1) - \ln(2L(\phi(0;\boldsymbol{x}^*))-1)),$$

由于

$$\phi(T;\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^* = \phi(0;\boldsymbol{x}^*),$$

因此

$$P'(\boldsymbol{x}^*) = \exp\left(-\int_0^T \frac{(1-x^2)^2}{2L-1}\mathrm{d}t\right) < 1.$$

这表明任一周期轨都是吸引的，又两个吸引的周期轨之间必须存在一个排斥的周期轨，所以只能存在唯一的周期轨.

这样无需计算发散量积分的值就可以判断其符号，发散量本来是可正可负的，但却可以将218 它分成两部分，一部分是严格负的，另一部分沿着周期轨的积分等于零. ■

6.8 应用

6.8.1 化学振荡

在20世纪50年代初期，Boris Belousov发现一种化学反应并不是趋于平衡位置，而是随着时间的增加而继续振荡. 后来，Zhabotinsky证实了这一发现，并将这一结果公布于众而引起科学界的注目. Field和Noyes提出一个化学反应的动力学模型，称其为俄勒冈振子(Oregonator)，"俄勒冈"是他们当时进行研究的地区名. 有关化学反应及其微分方程模型的更多的探讨参见文献[**79**]、[**104**]或[**36**]. 本小节只概述含有三个变量的微分方程具有周期轨的原因，这些结果选自文献[**99**].

俄勒冈微分方程组可写为下列形式:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = y - xy + x(1-qx) \\ \dot{y} = -y - xy + 2fz \\ \dot{z} = \delta(x-z), \end{cases} \tag{6.8.1}$$

其中ε, q, f, δ均为正数，以下设$0<q<1$.

空间管体

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y,z): 1 \leqslant x \leqslant q^{-1}, \frac{2fq}{1+q} \leqslant y \leqslant \frac{f}{q}, 1 \leqslant z \leqslant q^{-1}\right\}$$

是正不变集(读者可自行验证在$\mathcal{R}$的边界上$\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$的符号).

不动点满足下列方程组:

$$\begin{cases} z = x \\ y = \dfrac{2fx}{1+x} \\ 0 = (1-x)\dfrac{2fx}{1+x} + x - qx^2. \end{cases}$$

对第三个方程两边同乘以 $-(1+x)$，并约去 x，得

$$0 = qx^2 + (2f+q-1)x - (2f+1).$$

它只有一个正根，为

$$x^* = \frac{1}{2q}\left((1-q-2f) + [(1-q-2f)^2 + 4q(2f+1)]^{1/2}\right).$$

记 $z^* = x^*$，$y^* = \dfrac{2fx^*}{1+x^*}$，另外，$(0, 0, 0)$ 为不动点，还有一个有负坐标的不动点.

偏导数矩阵为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}(1-y-2qx) & \varepsilon^{-1}(1-x) & 0 \\ -y & -(1+x) & 2f \\ \delta & 0 & -\delta \end{bmatrix}.$$

在点 (x^*, y^*, z^*) 的行列式为

$$\det(DF_{(x^*,y^*,z^*)}) = -\frac{\delta}{\varepsilon}(2y^* + qx^* + q(x^*)^2),$$

219

于是，或者三个特征值都有负实部，或者一个有负实部，其余两个有正实部. 文献[**79**]证明了对于不同的参数值两种情形都会出现.

对于在点 (x^*, y^*, z^*) 处有两个正实部特征值的情形，[**99**]证明了一定存在非平凡的周期轨. 首先，考虑到偏导数矩阵非对角线元素的符号，该系统可视为是"竞争"的. 在 $\mathcal{R}$ 中，矩阵中 $(1, 2)$ 与 $(2, 1)$ 元素是负的；$(2, 3)$ 与 $(3, 1)$ 元素是正的，但若第三行与第三列均乘以 -1，即使用 $-z$，这些元就变为负的；另外两元 $(1, 3)$ 与 $(3, 2)$ 为零，这样，对于 $(x, y, -z)$，按照定义系统就是竞争的.

Smith([**99**])已经证明了 $\mathbb{R}^3$ 上的竞争系统的不变集拓扑等价于一个二维系统的紧不变集上的流，该二维系统不必是可微的，只满足利普希茨条件，而这就足以应用庞加莱–本迪克松定理了，见[**99**]中的定理 3.4.

综合以上讨论有下述定理：

定理 6.8.1 *假设系统(6.8.1)参数值使得不动点 (x^*, y^*, z^*) 有两个有正实部的特征值，从而稳定流形 $W^s(x^*, y^*, z^*)$ 是一维的. 若初始值 $\mathbf{q} \in \mathcal{R}$ 但 $\mathbf{q} \notin W^s(x^*, y^*, z^*)$，则 $\omega(\mathbf{q})$ 是一个周期轨.*

注 6.8.2 *Smith 提及过其书中有关竞争系统的多数工作起始于 20 世纪 80 年代 Morris Hirsch 的工作.*

6.8.2 非线性电路

本小节考虑如何将具有一个回路的电路表示成范德波尔方程，读者可以参考 2.4.4 节有关 RLC 电路的微分方程的内容. 这里我们重新考虑带有一个电阻、一个电感器、一个电容的电路，由于各处电流都相等，即

$$x = i_R = i_L = i_C.$$

绕着回路的电压降为零，即

$$v_R + v_L + v_C = 0.$$

为了得到范德波尔系统，电阻不应是线性的，故假设电阻上的电压为

$$v_R = -i_R + i_R^3 = -x + x^3.$$

于是当电流很小时，$v_R<0$(反阻抗)；当电流很大时，$v_R>0$(阻抗)．为了使方程成为范德波尔方程的形式，令 $y=-v_C$，并设电感器与电容为线性关系，则有

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = v_L = -v_R - v_C$$

$$C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = i_C.$$

使用变量 x，y，则方程成为

$$L\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - (-x + x^3)$$

220

$$C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x.$$

上述系统正是由方程 6.3.4 的给出的李纳系统，其中 $g(x)=\frac{x}{C}$，$F(x)=-\frac{x}{L}+\frac{x^3}{L}$，它们满足李纳系统的要求.

将 i_R 的系数引入一个参数来改变电阻两端的电压降，即令

$$v_R = -\mu i_R + i_R^3 = -\mu x + x^3,$$

该系统当 $\mu=0$ 出现安德罗诺夫-霍普夫分支，读者可自行验证.

6.8.3　具有安德罗诺夫-霍普夫分支的捕食者-食饵系统

捕食者-食饵系统经变形处理后可出现安德罗诺夫-霍普夫分支，例如文献[**113**]所讨论的系统就是这样(这里已经改变了变量的记号，使之与其他例题一致，另外还给[**113**]中的原系数取定了某些特殊值)．种群 x 是食饵，当其数量较小时有正的增长率，且种群容量为 $x=1$，当$x>1$ 时有负的增长率；种群 y 是捕食者，当没有食饵时捕食者绝迹．两种种群相互间的影响包含在乘积项 xy 中，随着食饵种群数量的增加，对捕食者的利益是下降的．捕食者的净增长率趋近于 $1-\mu(x\to\infty)$．假设 $0<\mu<1$，则捕食者的增长率为正(当 x 充分大时).

$$\begin{cases}\dot{x} = x\left(1 - x - \dfrac{2y}{1+2x}\right)\\ \dot{y} = y\left(\dfrac{2x}{1+2x} - \mu\right).\end{cases}$$

欲求有正坐标的不动点，令$\dot{y}=0$ 得

$$2x^* = \mu(1+2x^*),$$

$$(2-2\mu)x^* = \mu,\qquad \text{也即}$$

$$x^* = \frac{\mu}{2(1-\mu)}.$$

进一步还有

$$1+2x^*=\frac{2x^*}{\mu}=\frac{1}{1-\mu},$$

$$1-x^*=\frac{2-2\mu-\mu}{2(1-\mu)}=\frac{2-3\mu}{2(1-\mu)}.$$

不动点处 y 的值是

$$y^*=\frac{(1-x^*)(1+2x^*)}{2}=\frac{(1-x^*)}{2(1-\mu)}$$

$$=\frac{2-3\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{1}{2(1-\mu)}=\frac{2-3\mu}{4(1-\mu)^2}.$$

221

不动点处的变分矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1-2x^*-\dfrac{2y^*}{(1+2x^*)^2} & -\dfrac{2x^*}{1+2x^*} \\ \dfrac{2y^*}{(1+2x^*)^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

其行列式值为

$$\Delta=\frac{4x^*y^*}{(1+2x^*)^3}>0.$$

其迹为

$$\tau=1-2x^*-\frac{2y^*}{(1+2x^*)^2}$$

$$=\frac{2-2\mu}{2(1-\mu)}-\frac{2\mu}{2(1-\mu)}-\frac{2-3\mu}{2(1-\mu)^2}\cdot(1-\mu)^2$$

$$=\frac{2-2\mu-2\mu-(2-5\mu+3\mu^2)}{2(1-\mu)}$$

$$=\frac{\mu(1-3\mu)}{2(1-\mu)}.$$

当 $\tau=0$ 或 $\mu_0=\frac{1}{3}$时，特征值为纯虚数 $\pm\mathrm{i}\sqrt{\Delta}$，此时相应地有

$$x^*=\frac{1}{4},\quad y^*=\frac{9}{16}\quad 且\quad 1+2x^*=\frac{3}{2}.$$

特征值的实部为 $\alpha_\mu=\frac{\tau}{2}$，即有

$$\alpha_\mu=\frac{\mu(1-3\mu)}{4(1-\mu)}=\frac{3\mu(1-\mu)+2(1-\mu)-2}{4(1-\mu)}=\frac{3}{4}\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1-\mu)},$$

且

$$\left.\frac{\mathrm{d}\alpha_\mu}{\mathrm{d}\mu}\right|_{\mu=\frac{1}{3}}=\left.\frac{3}{4}-\frac{1}{2(1-\mu)^2}\right|_{\mu=\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}-\frac{9}{8}=-\frac{3}{8}<0.$$

222

因此 α_μ 关于 μ 是递减的.

欲知当 $\mu=\frac{1}{3}$ 时不动点的稳定性，应用定理6.4.4，按该定理的记号，有

$$f_x=1-2x-\frac{2y^*}{(1+2x^*)^2}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=0,\qquad f_y=-\frac{2x^*}{1+2x^*}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3},$$

$$g_x=\frac{2y^*}{(1+2x^*)^2}=\frac{2(3/16)}{9/4}=\frac{1}{6},\qquad g_y=1-\mu-\frac{1}{1+2x^*}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=0,$$

$$f_{xx}=-2-\frac{2y^*(-2)(2)}{(1+2x^*)^3}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=-2+\frac{8(3/16)}{27/9}=\frac{-18+4}{9}=\frac{-14}{9},$$

$$f_{xxx}=\frac{8x^*(-3)(2)}{(1+2x^*)^4}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=-\frac{48(3/16)}{(81/81)}=-\frac{16}{9},$$

$$f_{xy}=-\frac{2}{(1+2x^*)^2}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=-\frac{2}{(9/4)}=-\frac{8}{9},$$

$$f_{xxy}=\frac{8}{(1+2x^*)^3}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=\frac{8}{(27/8)}=\frac{64}{27},$$

$$f_{yy}=0=f_{xyy},$$

$$g_{xx}=\frac{2y^*(-2)(2)}{(1+2x^*)^3}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=-\frac{8(9/16)}{(27/8)}=-\frac{4}{3},$$

$$g_{xxx}=-\frac{8y^*(-3)(2)}{(1+2x^*)^4}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=\frac{48(9/16)}{(81/16)}=\frac{48}{9}=\frac{16}{3},$$

$$g_{xy}=\frac{2}{(1+2x^*)^2}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=\frac{2}{(9/4)}=\frac{8}{9},$$

$$g_{xxy}=\frac{2(-2)(2)}{(1+2x^*)^3}\bigg|_{\mu=\frac{1}{3}}=-\frac{8}{(27/8)}=-\frac{64}{27},$$

$$g_{yy}=0=g_{yyy}=g_{xyy},$$

其他偏导数均为零，因此有

$$\begin{aligned}16K_{1/3}=&\left(\left|\frac{f_y}{g_x}\right|^{1/2}f_{xxx}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|^{1/2}f_{xyy}+\left|\frac{f_y}{g_x}\right|^{1/2}g_{xxy}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|^{1/2}g_{yyy}\right)\\&+\frac{1}{g_x}\left|\frac{g_x}{f_y}\right|^{1/2}\left(f_{xy}f_{xx}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|f_{xy}f_{yy}+\left|\frac{g_x}{f_y}\right|f_{yy}g_{yy}\right)\\&+\frac{1}{f_y}\left|\frac{f_y}{g_x}\right|^{1/2}\left(g_{xy}g_{yy}+\left|\frac{f_y}{g_x}\right|g_{xy}g_{xx}+\left|\frac{f_y}{g_x}\right|f_{xx}g_{xx}\right)\\=&\sqrt{2}\left(\frac{-16}{9}\right)+0+\sqrt{2}\left(-\frac{64}{27}\right)+0+\frac{6}{\sqrt{2}}\left(\left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{14}{9}\right)+0+0\right)\end{aligned}$$

$$-\frac{6}{\sqrt{2}}\left(0+2\left(\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)+2\left(-\frac{14}{9}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{27}(-48-64+112+192-336),$$

$$16K_{1/3}=-\frac{144\sqrt{2}}{27}<0.$$

因此，当 $\mu=\frac{1}{3}$ 时不动点是弱吸引的；当 $\mu<\frac{1}{3}$ 时跳出一个稳定的周期轨，这属于超临界分支（因为特征值实部的导数小于零）.

223

下面利用定理 6.6.3 的 Dulac 判据给出另外一种方法来验证当 $\mu=\frac{1}{3}$ 时不动点是弱吸引的，事实上可证当 $\mu\geqslant\frac{1}{3}$ 时在第一象限内不存在周期轨. 取 Dulac 函数

$$g(x,y)=\left(\frac{1+2x}{2x}\right)y^{\alpha-1},$$

其中 $\alpha=\frac{1}{2(1-\mu)}$，这样选取的目的是为了消去 xy 项，而 y 的幂可使最终结果是负的. 则有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(gF)&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y^{\alpha-1}(1-x)(1+2x)}{2}-y^{\alpha}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{\alpha}\left(\frac{2x-\mu(1+2x)}{2x}\right)\right]\\&=\frac{y^{\alpha-1}}{2}[-1(1+2x)+2(1-x)]+\frac{\alpha y^{\alpha-1}}{2x}[2x-\mu-2\mu x]\\&=\frac{y^{\alpha-1}}{2x}\left[x(-4x+1)+\frac{2(1-\mu)}{2(1-\mu)}x-\frac{\mu}{2(1-\mu)}\right]\\&=\frac{y^{\alpha-1}}{2x}\left[-4x^{2}+2x-\frac{\mu}{2(1-\mu)}\right].\end{aligned}$$

上式方括号内的项在 $x=\frac{1}{4}$ 处取得最大值，最大值为

$$\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2(1-\mu)}.$$

故只要当 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{\mu}{2(1-\mu)}$，即 $\mu\geqslant\frac{1}{3}$ 时，就有 $\nabla\cdot(gF)\leqslant0$. 也就是说，当 $\mu\geqslant\frac{1}{3}$ 时，在第一象限内闭曲线内部的积分恒不为零，因此由定理 6.6.3 知不存在周期轨.

系统有一个鞍点(1, 0)，其不稳定流形进入第一象限，在趋于无穷远之前与 $x=x^*$ 相交，之后 $\dot{y}<0$，于是它是有界的. 这使得在其下方所有的点有非空的 ω 极限集，由于没有周期轨，这极限集一定是点 (x^*, y^*). 事实上，进一步讨论可发现，从任一初始值 (x_0, y_0) 出发的轨线在与 $x=x^*$ 相交之后就趋于 (x^*, y^*)，因此当 $\mu\geqslant\frac{1}{3}$ 时，对任何 $x_0>0$，$y_0>0$，有 $\omega(x_0, y_0)=(x^*, y^*)$，即吸引域为整个第一象限.

6.9　理论与证明

庞加莱-本迪克松定理

定理 6.2.2　考虑$\mathbb{R}^2$上的微分方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

(a)假设$\boldsymbol{F}$在$\mathbb{R}^2$上有定义，正半轨$\{\phi(t;\ \boldsymbol{q}):\ t\geq 0\}$有界，则$\omega(\boldsymbol{q})$(i)含有不动点或(ii)是周期轨.

224

(b)假设$\mathcal{A}\subset R^2$是有界闭子集且是微分方程的正不变集，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$在$\mathcal{A}$内有定义，但没有不动点，则对任意的$\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{A}$，轨线$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$(i)是周期轨或(ii)趋于一个周期轨(当$t\to\infty$时)且$\omega(\boldsymbol{x}_0)$就是该周期轨.

证明　证明基于文献[**49**].

前面已提到过，证明要利用流关于初始条件的连续依赖性.

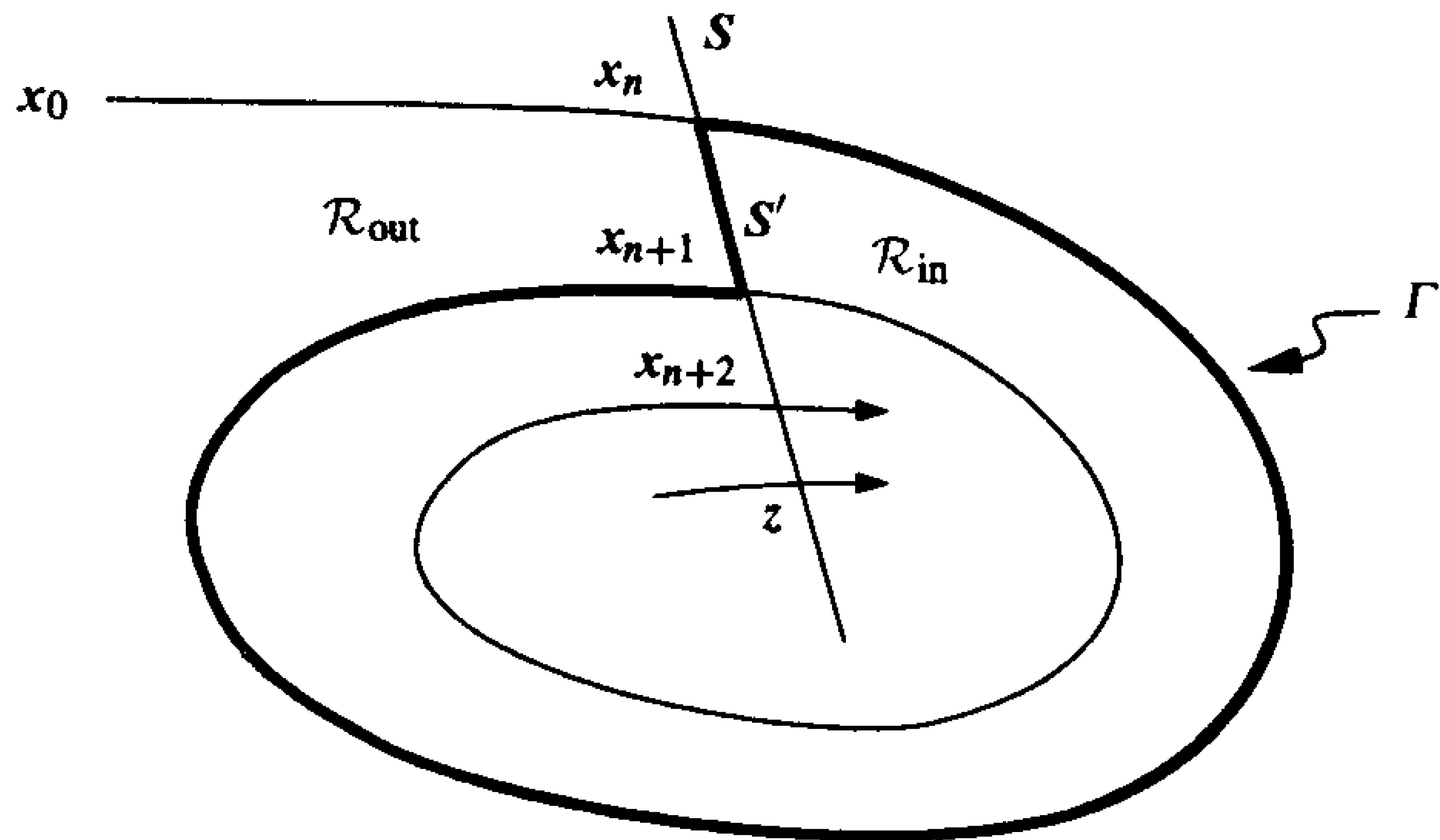
结论(b)可以由结论(a)得到，事实上，由于$\mathcal{A}$是正不变集，则对$\mathcal{A}$内的点$\boldsymbol{x}_0$，$\omega(\boldsymbol{x}_0)$一定仍在$\mathcal{A}$内，又由于$\mathcal{A}$内无不动点，故$\omega(\boldsymbol{x}_0)$只能是周期轨.

下面证明结论(a). 由轨线的有界性知$\omega(\boldsymbol{x}_0)$一定非空，且$\omega(\boldsymbol{x}_0)$也是有界的. 令$\boldsymbol{q}\in\omega(\boldsymbol{x}_0)$,则只需证明$\boldsymbol{q}$是一个周期点即可. 首先考察由$\boldsymbol{q}$出发的轨线的走向，由定理5.4.3可知$\omega(\boldsymbol{q})\subset\omega(\boldsymbol{x}_0)$且是非空的(因为$\boldsymbol{q}$的正半轨含于有界集$\omega(\boldsymbol{x}_0)$). 令$\boldsymbol{z}\in\omega(\boldsymbol{q})$，由于$\omega(\boldsymbol{x}_0)$不含不动点，所以$\boldsymbol{z}$不是不动点.

过z点作一截线$\boldsymbol{S}$，使得过$\boldsymbol{S}$上的点的轨线都同向穿过$\boldsymbol{S}$. 过$\boldsymbol{x}_0$与$\boldsymbol{q}$点的正半轨均不断地路经z附近，当然不断地与$\boldsymbol{S}$相交，即存在$\{t_n\}$，使得$t_n\to\infty$且$\boldsymbol{x}_n=\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)\in\boldsymbol{S}$. 令$\Gamma$是这样一条简单闭曲线，它是由轨线段$\{\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0):\ t_n\leq t\leq t_{n+1}\}$和截线$\boldsymbol{S}$上点$\boldsymbol{x}_n=\phi(t_n;\ \boldsymbol{x}_0)$与$\boldsymbol{x}_{n+1}=\phi(t_{n+1};\ \boldsymbol{x}_0)$之间的一段$\boldsymbol{S}'$构成，$\Gamma$将平面分成两部分(参见图6.9.1)，

$$\mathbb{R}^2\setminus\Gamma=\mathcal{R}_{\text{in}}\cup\mathcal{R}_{\text{out}}.$$

过$\phi(t_{n+1};\ \boldsymbol{x}_0)$的轨线要么进入$\Gamma$内部的区域$\mathcal{R}_{\text{in}}$，要么进入$\Gamma$外部的区域$\mathcal{R}_{\text{out}}$，不妨假设进入$\mathcal{R}_{\text{in}}$，另一情形可类似讨论. 于是过$\boldsymbol{S}'$上的点的轨线，与$\phi(t_{n+1};\ \boldsymbol{x}_0)$的轨线一样，都同向进入$\mathcal{R}_{\text{in}}$，因此当$t>t_{n+1}$时，$\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$不能再进入$\mathcal{R}_{\text{out}}$，也就是说轨线与$\boldsymbol{S}$的交点在$\boldsymbol{S}$上是单调的，它们必须在$z$的一侧并趋于$z$，故$\omega(\boldsymbol{x}_0)\cap\boldsymbol{S}=\{z\}$.



225

图 6.9.1　曲线Γ与区域$\mathcal{R}_{\text{in}}$、$\mathcal{R}_{\text{out}}$

对 $\boldsymbol{q}$ 做同样的讨论，存在递增的趋于 ∞ 的时间序列 $\{s_n\}$，使得 $\phi(s_n;\ \boldsymbol{q})$ 聚集于 z. 由于 $\boldsymbol{q}$ 的整条轨线含于 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$，则必有 $\phi(s_n;\ \boldsymbol{q})\in\omega(\boldsymbol{x}_0)\cap \boldsymbol{S}=\{z\}$，即对任意的 n，有 $\phi(s_n;\ \boldsymbol{q})=z$，或者 $\phi(s_n;\ \boldsymbol{q})=\phi(s_{n+1};\ \boldsymbol{q})$，即 $\boldsymbol{q}$ 是一个周期点. ■

下面要证明 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\mathcal{O}(\boldsymbol{q})$. 假设 $\omega(\boldsymbol{x}_0)\setminus\mathcal{O}(\boldsymbol{q})\neq\phi$. 根据定理 5.4.3，集合 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是连通的. 因此，必存在点 $\boldsymbol{y}_j\in\omega(\boldsymbol{x}_0)\setminus\mathcal{O}(\boldsymbol{q})$，聚集于 $\mathcal{O}(\boldsymbol{q})$ 中的一点 $\boldsymbol{y}^*$ 上. 取经过 $\boldsymbol{y}^*$ 的横断面 $\boldsymbol{S}$，可以调整点 $\boldsymbol{y}_j$ 使它们位于 $\boldsymbol{S}$ 上. 但前面已证明了 $\omega(\boldsymbol{x}_0)\cap\boldsymbol{S}$ 只是一个点. 这一矛盾说明了 $\omega(\boldsymbol{x}_0)\setminus\mathcal{O}(\boldsymbol{q})=\phi$ 且 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=\mathcal{O}(\boldsymbol{q})$，即 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 是一个周期轨.

自激振荡

定理 6.3.1 设函数 g 和 F 满足条件 1 ~ 3，则李纳方程(6.3.4)有唯一的周期轨，且是吸引的.

证明 设 $y>0$ 时，由于 $\dot{x}>0$，$\dot{y}<0$，从点 $\boldsymbol{Y}=(0,\ y)$ 出发的正半轨线向右行，并与曲线 $y=F(x)$ 相交，接着轨线进入 $\dot{x}<0$ 与 $\dot{y}<0$ 的区域，在与负 y 轴交于点 $\boldsymbol{Y}'$ 之后进入 $x<0$ 与 $y<F(x)$ 的区域，此时有 $\dot{x}<0$，$\dot{y}>0$，然后在第三象限再次与曲线 $y=F(x)$ 相交，尔后轨线回到正 y 轴上的某点 $\boldsymbol{Y}''$. 于是得到从正 y 轴到其自身的庞加莱映射 P，它将点 $\boldsymbol{Y}$ 映射为点 $\boldsymbol{Y}''$. 过 $\boldsymbol{Y}$ 的轨线是周期的当且仅当 $\boldsymbol{Y}''=\boldsymbol{Y}$. 又因为 $(x(t),\ y(t))$ 是解当且仅当 $(-x(t),\ -y(t))$ 是解，因此若 $\boldsymbol{Y}'=-\boldsymbol{Y}$ 时，则 $\boldsymbol{Y}''=-\boldsymbol{Y}'=\boldsymbol{Y}$，即轨线是周期的. 另一方面，可证当 $\boldsymbol{Y}'\neq-\boldsymbol{Y}$ 时轨线一定不是周期的. 事实上，假设 $\|\boldsymbol{Y}'\|<\|\boldsymbol{Y}\|$，由点 $-\boldsymbol{Y}$ 出发的轨线到达正 y 轴上的点 $-\boldsymbol{Y}'$，而从 $\boldsymbol{Y}'$ 出发的轨线在上述轨线的内侧，于是 $\|\boldsymbol{Y}''\|<\|\boldsymbol{Y}'\|<\|\boldsymbol{Y}\|$，即轨线不是周期的. 对 $\|\boldsymbol{Y}'\|>\|\boldsymbol{Y}\|$ 的情形，则类似可得 $\|\boldsymbol{Y}''\|>\|\boldsymbol{Y}'\|>\|\boldsymbol{Y}\|$，即轨线不是周期的. 总之，轨线是周期的当且仅当 $\boldsymbol{Y}'=-\boldsymbol{Y}$.

为了度量到原点的距离，我们取势能函数

$$G(x)=\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s.$$

由于 $g(x)$ 是奇函数且对 $x>0$ 有 $g(x)>0$，则 $G(x)>0(x\neq0)$. 令

$$L(x,y)=G(x)+\frac{y^2}{2},$$

这定义了到原点的一种度量，于是轨线是周期的当且仅当 $L(\boldsymbol{Y})=L(\boldsymbol{Y}')$. 函数 L 由点 $\boldsymbol{P}$ 到点 $\boldsymbol{Q}$ 的改变量记为

$$L_{PQ}=L(\boldsymbol{Q})-L(\boldsymbol{P}),$$

再令

$$K(\boldsymbol{Y})=L_{YY'}=L(\boldsymbol{Y}')-L(\boldsymbol{Y}).$$

则过 $\boldsymbol{Y}$ 的轨线是周期的当且仅当 $K(\boldsymbol{Y})=0$.

量 K 可以用沿轨线的积分形式来表示，即

$$K(\boldsymbol{Y})=\int_0^{t(\boldsymbol{Y})}\dot{L}\,\mathrm{d}t,$$

226

其中 $t(\boldsymbol{Y})$ 是轨线由 $\boldsymbol{Y}$ 到 $\boldsymbol{Y}'$ 经历的时间. 又

$$\dot{L}=g(x)\dot{x}+y\dot{y}=g(x)(y-F(x))-yg(x)$$

$$= -g(x)F(x) = F(x)\dot{y},$$

则

$$K(Y) = \int_0^{t(Y)} F(x)\,\dot{y}\mathrm{d}t = \int_Y^{Y'} F(x)\mathrm{d}y = -\int_{Y'}^{Y} F(x)\mathrm{d}y.$$

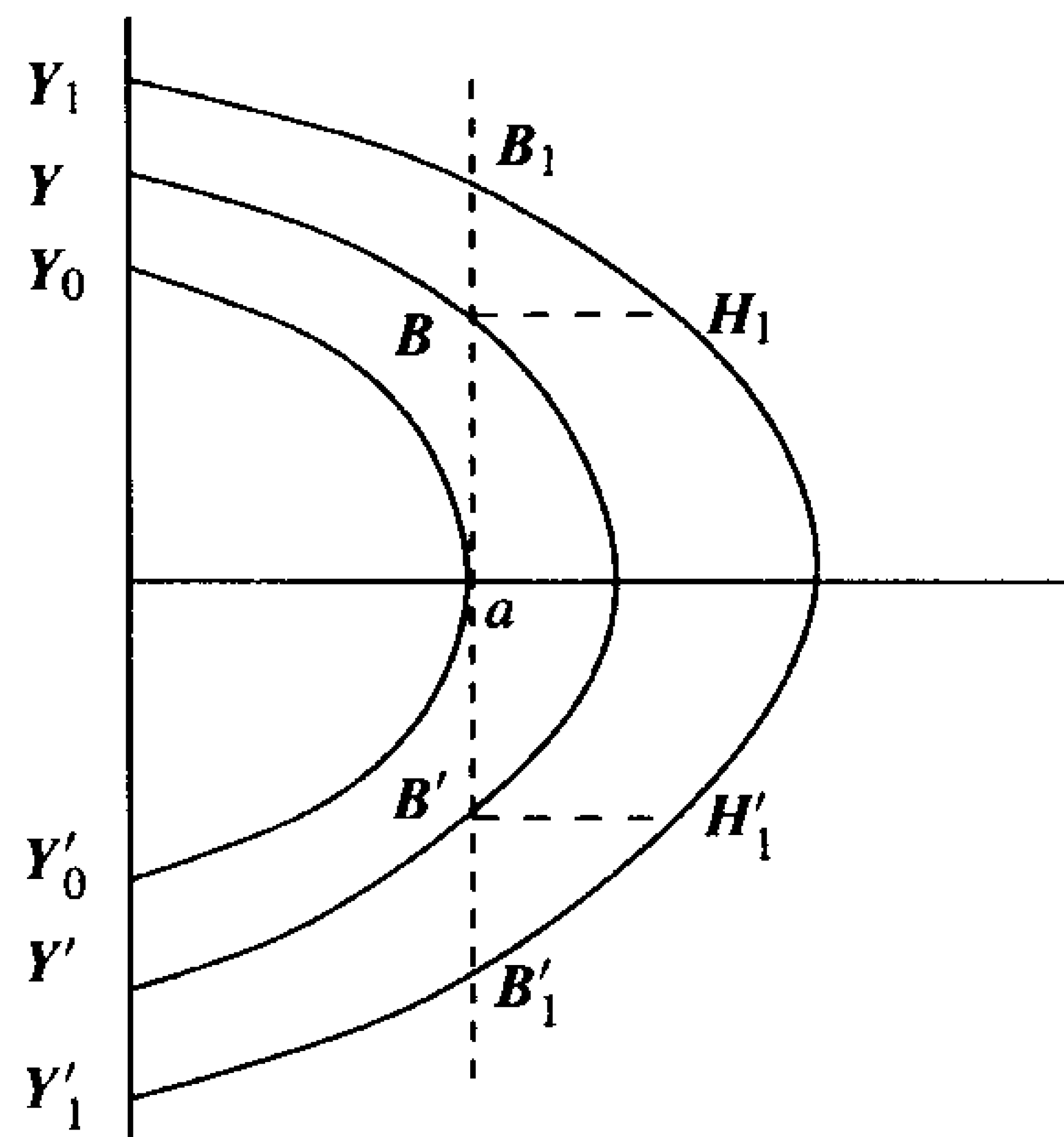


图 6.9.2 李纳方程的图像

在正 y 轴上必有点 $\boldsymbol{Y}_0$，使过 $\boldsymbol{Y}_0$ 的正半轨线与 $x=a$ 相切，之后到达负 y 轴上的点 Y'_0. 若$0<\boldsymbol{Y}<\boldsymbol{Y}_0$，由 $F(x)<0$ $(0<x<a)$知 $K(\boldsymbol{Y}) = L_{YY'}>0$，故轨线不会是周期的（我们在范德波尔方程中考虑 $\dot{r}$ 的方程时也得到这一结论）；若 $\boldsymbol{Y}_0<\boldsymbol{Y}$，记 $\boldsymbol{B}$ 为轨线与 $x=a$ 的第一个交点，$\boldsymbol{B}'$为第二个交点（参见图 6.9.2)，为了证明定理先给出几个引理. ■

引理 6.9.1 若 $\boldsymbol{Y}_0<\boldsymbol{Y}$，则 $L_{YB}>0$，$L_{B'Y'}>0$，且当 $\boldsymbol{Y}$ 递增时，$L_{YB}+L_{B'Y'}$是单调递减的.

[227]

证明 直接计算得

$$L_{YB} = \int_Y^B F\mathrm{d}y = \int \frac{F(x)}{\dot{x}}\dot{y}\mathrm{d}x = \int(-F(x))\left[\frac{g(x)}{y-F(x)}\right]\mathrm{d}x > 0,$$

这是因为积分号内的两项都是正的. 同理 $L_{B'Y'}>0$. 又过 $\boldsymbol{Y}_1(>\boldsymbol{Y})$的轨线上的 y 值总是大于从 $\boldsymbol{Y}_1$ 到 $\boldsymbol{B}_1$ 的轨线上的 y 值，于是 $L_{YB}>L_{Y_1B_1}$，类似地有 $L_{B'Y'}>L_{B'_1Y'_1}$. 相加即得结论. ■

引理 6.9.2 若 $\boldsymbol{Y}_0<\boldsymbol{Y}$，则 $L_{BB'}$是单调递减的，即当 $\boldsymbol{Y}_1>\boldsymbol{Y}>\boldsymbol{Y}_0$ 时，有

$$L_{BB'} > L_{B_1B'_1}.$$

证明 由于

$$L_{B_1B'_1} = -L_{B'_1B_1} = -\int_{B'_1}^{B_1} F(x)\mathrm{d}y.$$

设 $\boldsymbol{H}_1$ 与 $\boldsymbol{H}'_1$ 表示过 $\boldsymbol{Y}_1$ 的轨线上分别与点 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}'_1$ 有相同 y 坐标的点（参见图 6.9.2). 沿 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}'_1$ 之间的轨线段有 $F(x)>0$，如果缩短 H'_1 到 H_1 之间的路线，又因为到 $-F(x)$沿从 $\boldsymbol{H}'_1$ 到 $\boldsymbol{H}_1$ 的积分要比从 $\boldsymbol{B}'$到 $\boldsymbol{B}$ 的积分更小些，故

$$L_{B_1B'_1} < -\int_{H'_1}^{H_1} F(x)\mathrm{d}y < -\int_{B'}^{B} F(x)\mathrm{d}y = L_{BB'}. \qquad ■$$

因此，当 $0<y\leqslant y_0$ 时，$K(0,y)>0$ 且严格单调递减，故 K 至多有一个零点，即至多有一个极限环. 下述引理表明当 $y\to\infty$ 时 $K(0,y)\to-\infty$，于是 K 恰有一个零点，即恰有一个极限环.

引理 6.9.3 当 $y\to\infty$ 时 $K(0,y)\to-\infty$.

证明 取定 $x=x^*>a$，记 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}'$是由 $\boldsymbol{Y}$ 点出发的正半轨与直线 $x=x^*$ 的交点. 由于 $F(x)$ 在 $x>a$ 上单减，当 $x>x^*$时，有 $F(x)>F(x^*)>0$，则

$$L_{BB'} = -\int_{B'}^{B} F(x)\mathrm{d}y \leqslant -\int_{P'}^{P} F(x)\mathrm{d}y$$

[228]

$$< -\int_{P'}^{P} F(x^*)\mathrm{d}y = -F(x^*)\,\|\boldsymbol{PP}'\|.$$

因为 $Y\to\infty$ 时必有 $\|PP'\|\to\infty$，所以 $L_{BB'}<-F(x^*)\|PP'\|\to-\infty$. ■

定理得证.

安德罗诺夫-霍普夫分支

本小节给出定理 6.4.2 的部分结论之证明，该证明合并了文献[**24**]与[**26**]的有关证明，且与文献[**87**]的证明非常接近. 另外，这也是本书较为冗长的证明之一，而证明思路又是相当直观的. 利用极坐标，可以计算轨线绕不动点一周后半径的变化方式. 将轨线在 $\theta=0$ 时的半径视为变量，并证明可以解出使周期轨出现的参量 μ(或下面的 α). 如证明中所述，这将用到隐函数定理. 实际上我们既没有证明什么参数值使周期轨出现，也没有考察周期轨的稳定性，这些论证可在参考文献中找到. 因此，这里所证明的其实是下列定理，其中假设参数分支值为 $\mu_0=0$.

定理 6.9.4 *考虑含单参量的微分方程族*

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}_{\mu}(\boldsymbol{x}),\tag{6.9.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$. 假设方程有不动点 $\boldsymbol{x}_{\mu}$，在此点的特征值为 $\alpha(\mu)\pm\mathrm{i}\beta(\mu)$，满足 $\alpha(\mu_0)=0$，$\beta_0=\beta(\mu_0)\neq0$，且

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}(\mu_0)\neq0,$$

即特征值在 $\mu=0$ 是横穿虚轴的. 则存在 $\varepsilon_0>0$，使得当 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时：

(i) 存在可微函数 $\mu(\varepsilon)$ 与 $T(\varepsilon)$，满足 $T(0)=\dfrac{2\pi}{\beta_0}$，$\mu(0)=0$，$\mu'(0)=0$.

(ii) 当 $\mu=\mu(\varepsilon)$ 时，(6.9.1) 存在一个 $T(\varepsilon)$ 周期解 $\boldsymbol{x}^*(t,\varepsilon)$，其在极坐标下的初始条件为 $r^*(0,\varepsilon)=\varepsilon$，$\theta(0,\varepsilon)=0$.

证明 不妨设不动点总是原点，否则可以经变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mu}$ 而实现. 由于

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}(\mu_0)\neq0,$$

则在 μ_0 附近，$\alpha(\mu)$ 关于 μ 是严格单调的，因此可以将 α 视为微分方程组的独立参数，且可以用 α 表示 μ，那么特征值就是 α 的函数，即 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta(\alpha)$，$\alpha$ 是每个特征值的实部.

不妨设

$$D(\boldsymbol{F}_{\alpha})_{\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta(\alpha)\\ \beta(\alpha) & \alpha\end{bmatrix}\equiv\boldsymbol{A}(\alpha).$$

否则，可利用复特征值的特征向量，引入一线性变换而得. 此时微分方程成为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(\alpha)\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}B_2^1(x_1,x_2,\alpha)\\ B_2^2(x_1,x_2,\alpha)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_3^1(x_1,x_2,\alpha)\\ B_3^2(x_1,x_2,\alpha)\end{bmatrix}+O(r^4),\tag{6.9.2}$$

其中 $B_j^k(x_1,x_2,\alpha)$ 是关于 x_1，x_2 的 j 次齐次多项式，$O(r^4)$ 是高次项. 更详细地，用 $O(r^j)$ 来表示，即存在常数 $C>0$，使得

$$\|O(r^j)\|\leqslant Cr^j.$$

229

我们的目的是确定围绕原点一周后的结果，故选取极坐标. 下述引理给出了直角坐标下方

程的极坐标形式. ■

引理 6.9.5　方程(6.9.2)的极坐标方程为

$$\begin{cases}\dot{r} = \alpha r + r^2 C_3(\theta,\alpha) + r^3 C_4(\theta,\alpha) + O(r^4)\\ \dot{\theta} = \beta(\alpha) + rD_3(\theta,\alpha) + r^2 C_4(\theta,\alpha) + O(r^4),\end{cases}\tag{6.9.3}$$

其中 $C_j(\theta,\ \alpha)$与 $D_j(\theta,\ \alpha)$是关于 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的 j 次齐次多项式，且

$$C_3(\theta,\alpha) = \cos(\theta)B_2^1(\cos(\theta),\sin(\theta),\alpha) + \sin(\theta)B_2^2(\cos(\theta),\sin(\theta),\alpha)\tag{6.9.4}$$

$$D_3(\theta,\alpha) = -\sin(\theta)B_2^1(\cos(\theta),\sin(\theta),\alpha) + \cos(\theta)B_2^2(\cos(\theta),\sin(\theta),\alpha).\tag{6.9.5}$$

此外,

$$\int_0^{2\pi} C_3(\theta,\alpha)\mathrm{d}\theta = 0.$$

证明　直接进行极坐标变换，即令 $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, 则

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} &= \frac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos(\theta) & r\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta)\dot{x}_1 + \sin(\theta)\dot{x}_2\\ -r^{-1}\sin(\theta)\dot{x}_1 + r^{-1}\cos(\theta)\dot{x}_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\alpha r\\ \beta(\alpha)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos(\theta)B_2^1 + \sin(\theta)B_2^2\\ -r^{-1}\sin(\theta)B_2^1 + r^{-1}\cos(\theta)B_2^2\end{bmatrix}\\ &\quad \begin{bmatrix}\cos(\theta)B_3^1 + \sin(\theta)B_3^2\\ -r^{-1}\sin(\theta)B_3^1 + r^{-1}\cos(\theta)3_2^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}O(r^4)\\ O(r^3)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $B_j^k = B_j^k(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \alpha)$是 $r\cos\theta$, $r\sin\theta$, α 的函数，又 B_j^k 是 r 的 j 次齐次多项式，将 r^j从 B_j^k 中提出，就可得到引理的结果.

又由于 $C_3(\theta,\ \alpha)$是关于 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的 3 次齐次式，故其在$[0,\ 2\pi]$上的积分为零. ■

像在第 6.4 节那样，令

230

$$K_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[C_4(\theta,\alpha) - \frac{1}{\beta(\alpha)}C_3(\theta,\alpha)D_3(\theta,\alpha)\right]\mathrm{d}\theta.$$

因为$\dot{\theta}\neq 0$, 不用$\dot{r}$，而用$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$来寻求当 θ 增加 2π 时 r 如何改变. 由(6.9.3)式，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{\alpha r + r^2 C_3(\theta,\alpha) + r^3 C_4(\theta,\alpha) + O(r^4)}{\beta(\alpha) + rD_3(\theta,\alpha) + r^2 C_4(\theta,\alpha) + O(r^4)}\\ &= \frac{\alpha}{\beta}r + r^2\left[\frac{1}{\beta}C_3(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{\beta^2}D_3(\theta,\alpha)\right]\end{aligned}$$

$$+ r^3\left[\frac{1}{\beta}C_4(\theta,\alpha) - \frac{1}{\beta^2}C_3(\theta,\alpha)D_3(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{\beta^2}D_4(\theta,\alpha) + \frac{\alpha}{\beta^3}D_3(\theta,\alpha)^2\right]$$
$$+ O(r^4).$$

思路是对某 α，寻求半径为 ε 的周期轨，为此引入新参量 ε，它表示周期轨的半径. 令 $r(\theta,\ \varepsilon,\ \alpha)$ 为上述方程的解，满足 $r(0,\ \varepsilon,\ \alpha)=\varepsilon$，则求解方程 $r(2\pi,\ \varepsilon,\ \alpha)=\varepsilon$，即可得到一个周期轨. 由于原点是不动点，则 $r(\theta,\ 0,\ \alpha)=0$，因此 $r(\theta,\ \varepsilon,\ \alpha)$ 含有因子 ε，令

$$g(\varepsilon,\alpha) = \frac{r(2\pi,\varepsilon,\alpha)-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

则对 $\varepsilon>0$ 时方程 $g(\varepsilon,\ \alpha)=0$ 的解与周期轨相对应.

利用隐函数定理可证，存在 ε 的函数 $\alpha(\varepsilon)$，使得 $g(\varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))=0$，为此，需要证明 $g(0,\ 0)=0$ 与 $\frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,\ 0)\neq0$. 于是，由隐函数的微分法便有

$$\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}(0,0) + \frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,0)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,0)}.$$

隐函数定理是说若 $g(0,\ 0)=0$，$\frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,\ 0)\neq0$，则一定可将 α 表示成 ε 的可微函数，且使得 $g(\varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))=0$ 恒成立.

下面通过尺度变换 $r=\varepsilon\rho$ 来验证 g 满足要求. 先证 $r(2\pi,\ \varepsilon,\ 0)-\varepsilon=O(\varepsilon^3)$（这蕴涵 $g(\varepsilon,\ 0)=O(\varepsilon^2)$）. 令 $\rho(\theta,\ \varepsilon,\ \alpha)=\frac{r(\theta,\ \varepsilon,\ \alpha)}{\varepsilon}$，它是 ρ 方程的解，且满足 $\rho(0,\ \varepsilon,\ \alpha)=\frac{r(0,\ \varepsilon,\ \alpha)}{\varepsilon}=\varepsilon/\varepsilon=1$，而关于 ρ 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\alpha}{\beta}\rho + \varepsilon\rho^2\left[\frac{1}{\beta}C_3(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{\beta^2}D_3(\theta,\alpha)\right]$$
$$+ \varepsilon^2\rho^3\left[\frac{1}{\beta}C_4(\theta,\alpha) - \frac{1}{\beta^2}C_3(\theta,\alpha)D_3(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{\beta^2}D_4(\theta,\alpha) + \frac{\alpha}{\beta^3}D_3(\theta,\alpha)^2\right]$$
$$+ O(\varepsilon^3\rho^4).$$

231

将线性项移到方程的左边，并乘以积分因子 $\mathrm{e}^{-\alpha\theta/\beta}$，则 $\mathrm{e}^{-\alpha\theta/\beta}\rho$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{e}^{-\alpha\theta/\beta}\rho) = \varepsilon\mathrm{e}^{-\alpha\theta/\beta}\rho^2\left[\frac{1}{\beta}C_3 - \frac{\alpha}{\beta^2}D_3\right] + \varepsilon^2\mathrm{e}^{-\alpha\theta/\beta}\rho^3\left[\frac{1}{\beta}C_4 - \frac{1}{\beta^2}C_3D_3 - \frac{\alpha}{\beta^2}D_4 + \frac{\alpha}{\beta^3}D_3^2\right] + O(\varepsilon^3\rho^4).$$

由 0 到 2π 积分有

$$\mathrm{e}^{-2\pi\alpha/\beta}\rho(2\pi,\varepsilon,\alpha) - 1$$
$$= \varepsilon\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha\theta}{\beta}}\rho(\theta,\varepsilon,\alpha)^2\left[\frac{1}{\beta}C_3(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{\beta^2}D_3(\theta,\alpha)\right]\mathrm{d}\theta$$
$$+ \varepsilon^2\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\alpha\theta/\beta}\rho(\theta,\varepsilon,\alpha)^3\left[\frac{1}{\beta}C_4(\theta,\alpha) - \frac{1}{\beta^2}C_3(\theta,\alpha)D_3(\theta,\alpha) - \frac{\alpha}{\beta^2}D_4(\theta,\alpha) + \frac{\alpha}{\beta^3}D_3(\theta,\alpha)^2\right]\mathrm{d}\theta$$

$$+O(\varepsilon^3\rho^4)$$
$$=\varepsilon h(\varepsilon,\alpha).$$

上式最后一行是 h 的定义. 由 g 与 h 的定义，有

$$\begin{aligned} g(\varepsilon,\alpha) &= \rho(2\pi,\varepsilon,\alpha)-1 \\ &= [\mathrm{e}^{2\pi\alpha/\beta}-1]+\varepsilon \mathrm{e}^{2\pi\alpha/\beta}h(\varepsilon,\alpha). \end{aligned}$$

利用上式容易算出 $g(0,\ 0)$ 与 $\frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,\ 0)$. 事实上，

$$g(0,0)=\mathrm{e}^0-1=0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,0)=\left[\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}-\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta^2}\right)\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)\mathrm{e}^{2\pi\alpha/\beta}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}h(\varepsilon,\alpha))\right]\Bigg|_{\varepsilon=0,\alpha=0}=\frac{2\pi}{\beta(0)}\neq 0.$$

因此隐函数定理的条件成立，即由方程 $g(\varepsilon,\ \alpha)=0$ 可解得唯一的函数 $\alpha=\alpha(\varepsilon)$，即 $g(\varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))\equiv 0$，从而 $1=\rho(0,\ \varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))=\rho(2\pi,\ \varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))$，$\varepsilon=r(0,\ \varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))=r(2\pi,\ \varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))$，这样就可得到周期轨.

前面我们提到隐函数的导数是

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,0)}.$$

232　为了确定 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)$，还需计算 $\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}(0,\ 0)$. 由前面 $g(\varepsilon,\ \alpha)$ 的表达式，有

$$\begin{aligned} g(\varepsilon,0) &= \varepsilon h(\varepsilon,0) \\ &= \varepsilon\int_0^{2\pi}\rho(\theta,\varepsilon,0)^2\left(\frac{1}{\beta}\right)C_3(\theta,0)\mathrm{d}\theta \\ &\quad+\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\rho(\theta,\varepsilon,0)^3\left[\frac{1}{\beta}C_4(\theta,0)-\frac{1}{\beta^2}C_3(\theta,0)D_3(\theta,0)\right]\mathrm{d}\theta+O(\varepsilon^3\rho^4). \end{aligned}$$

又由于 $\rho(\theta,\ \varepsilon,\ 0)=1$，则

$$\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}(0,0)=\frac{1}{\beta}\int_0^{2\pi}C_3(\theta,0)\mathrm{d}\theta=0.$$

故有

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}(0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial\alpha}(0,0)}=0.$$

这样就完成了定理的证明. ■

尽管更多细节可参见文献[**87**]，但在这里还是简述一下如何确定产生周期轨的参数，以及如何确定周期轨的稳定性.

对方程 $0=\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))+\frac{\partial g}{\partial\alpha}(\varepsilon,\ \alpha(\varepsilon))\alpha'(\varepsilon)$ 再次应用隐函数的微分法，得

$$0=\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}(0,0)+2\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon \partial \alpha}(0,0)\alpha'(0)+\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(0,0)\alpha'(0)^2+\frac{\partial g}{\partial \alpha}(0,0)\alpha''(0).$$

利用 $\alpha'(0)=0$，可从上式解出 $\alpha''(0)$：

$$\alpha''(0)=-\frac{\dfrac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}(0,0)}{\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}(0,0)}=-\left(\frac{\beta_0}{2\pi}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}(0,0).$$

从文献[**87**]中可得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}(0,0)=\frac{4\pi}{\beta_0}K_0,$$

于是有

$$\alpha''(0)=-2K_0.$$

这表明周期轨出现时(i)当 $K_0<0$ 且不动点在 $\alpha=0$ 处为弱吸引时，有 $\alpha(\varepsilon)-K_0\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)>0$.(ii)当 $K_0>0$ 且不动点在 $\alpha=0$ 处为弱排斥时，有 $\alpha(\varepsilon)<0$.

要验证周期轨的稳定性，需要利用如下的庞加莱映射：

$$P(\varepsilon,\alpha)=r(2\pi,\varepsilon,\alpha).$$

233

由文献[**87**]中的结果可得

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}(\varepsilon)=1+\left(\frac{4\pi}{\beta_0}\right)K_0\varepsilon^2+O(\varepsilon^3).$$

因此当 $K_0<0$ 时，周期轨是吸引的；当 $K_0>0$ 时，周期轨是排斥的. 详细内容见参考文献.

流作用下的体积的变化

我们先证明体积变换公式，然后利用它证明刘维尔公式.

定理 6.6.1 *设有$\mathbb{R}^n$上的微分方程组$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，其流为$\phi(t;\boldsymbol{x})$. 令$\mathcal{D}$为$\mathbb{R}^n$中的区域，且有(i)有限体积；(ii)光滑边界$\partial\mathcal{D}$. 用$\mathcal{D}(t)$表示流在时间$t$所形成的区域，即*

$$\mathcal{D}(t)=\{\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0):\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{D}\}.$$

(a)令$V(t)$为$\mathcal{D}(t)$的体积，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t)=\int_{\mathcal{D}(t)}\nabla\cdot\boldsymbol{F}_x\mathrm{d}V,$$

其中$\nabla\cdot\boldsymbol{F}_x$是$\boldsymbol{F}$在点$\boldsymbol{x}$处的发散量，$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$是体积元素. 若$n=2$，则$V(t)$是面积，$\mathrm{d}V$是面积元素$\mathrm{d}A=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$.

(b)若$\boldsymbol{F}$的发散量是常数(即与$\boldsymbol{x}$无关)，则

$$V(t)=V(0)\mathrm{e}^{\nabla\cdot\boldsymbol{F}t}.$$

这样，若向量场的发散量为零(即$\nabla\cdot\boldsymbol{F}\equiv0$)，则体积保持不变；若$\nabla\cdot\boldsymbol{F}<0(>0)$，则体积指数级减少(增加).

证明 只按三维的记法来证明，对于二维或更高维的情况，证明是相同的.

$V(t)$的导数等于向量场$\boldsymbol{F}$通过$\mathcal{D}(t)$边界$\partial\mathcal{D}(t)$的流量，即

$$\dot{V}(t)=\int_{\partial\mathcal{D}(t)}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}A,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是向外单位法向量，注意到只是 $\boldsymbol{F}$ 在方向 $\boldsymbol{n}$ 的分量对体积的改变起作用，若该量为正，则体积增加，反之体积减小. 由散度定理，上式右端恰是发散量的积分，即

$$\dot{V}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{F}_x \mathrm{d}V.$$

这就证明了结论(a).

若发散量为常数，则有

$$\dot{V}(t) = (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) V(t).$$

其解为

$$V(t) = V(0) \mathrm{e}^{(\nabla \cdot \boldsymbol{F})t}.$$

234 此即结论(b). ■

对一时变线性微分方程基本解矩阵的行列式求导可以得到刘维尔公式，这在前面曾说过. 在这里我们利用上述定理来证明刘维尔公式.

定理 6.6.2（刘维尔公式）　*考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的微分方程组*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 与 $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ 在某开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上关于 $\boldsymbol{x}$ 连续，则流的偏导数矩阵的行列式等于向量场的发散量 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_x$ 沿着轨线之积分的指数，即

$$\det(D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}) = \exp\left(\int_0^t (\nabla \cdot \boldsymbol{F})_{\boldsymbol{\phi}(s;\boldsymbol{x}_0)} \mathrm{d}s \right).$$

证明　我们知道，多重积分变量变换的一般公式是

$$\int_{G(\mathcal{D})} h(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{D}} h(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) \mid \det(D\boldsymbol{G}_{(\boldsymbol{x})}) \mid \mathrm{d}V.$$

等会要用到它. 因为 $\boldsymbol{\phi}(-t;\ \boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{x}_0$，所以

$$D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))} D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)} = \boldsymbol{I},$$

从而 $D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}$ 对所有的 t 都是可逆的，在 $t=0$ 处它就是单位矩阵，故它有正的行列式. 因此，对所有的 t，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 的偏导数矩阵的行列式为正，即

$$\det(D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}) > 0.$$

这允许我们在应用多重积分变量变换公式时可不用绝对值的记号，应用上一定理有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{F}_x \mathrm{d}V \\ &= \int_{\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}(0)} \nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0)} \det(D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}) \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{D}(t)} \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{D}(0)} \det(D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}) \mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{D}(0)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(D_x \boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}) \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

于是对任意的区域 $\mathcal{D}$，我们有

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot F_{\phi(t;x_0)} \det(D_x\phi_{(t;x_0)})\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(D_x\phi_{(t;x_0)})\,\mathrm{d}V.$$

在圆心为 x_0，半径为 r 的实心球 $\mathcal{B}_r = B(x_0, r)$ 上应用上述公式，并除以 $\mathcal{B}_r$ 的体积，得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_r)}\int_{\mathcal{B}_r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(D_x\phi_{(t;x_0)})\,\mathrm{d}V$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_r)}\int_{\mathcal{B}_r}\nabla\cdot F_{\phi(t;x_0)}\det(D_x\phi_{(t;x_0)})\,\mathrm{d}V.$$

235

由于等式两边是对连续函数在球域上的平均值取极限，上式即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(D_x\phi_{(t;x_0)}) = \nabla\cdot F_{\phi(t;x_0)}\det(D_x\phi_{(t;x_0)}),$$

这就是曾得到的微分方程.

若令 $J(t) = \det(D_x\phi_{(t;x_0)})$，$T(t) = \nabla\cdot F_{\phi(t;x_0)}$，则上述微分方程成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(t) = T(t)J(t),$$

由于 $J(0) = \det(I) = 1$，解方程得

$$J(t) = \exp\left(\int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

将 $J(t)$，$T(s)$ 代换回去，即得定理结论中的积分形式. ■

练习

6.1 定义与例题

6.1.1 证明系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)\end{cases}$$

存在一个周期轨.

6.2 庞加莱–本迪克松定理

6.2.1 证明系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -4x + y(1 - x^2 - y^2)\end{cases}$$

有一个周期轨(提示：利用约束函数).

6.2.2 考虑微分方程

$$\begin{cases}\dot{x} = x - 2y - x(x^2 + 3y^2)\\ \dot{y} = 2x + y - y(x^2 + 3y^2).\end{cases}$$

a. 求在原点处的不动点类型.

b. 将微分方程组改写为极坐标形式.

c. 求圆的半径的最大值 r_1，使得与该圆相遇的所有解都跑向其外部.

d. 求圆的半径的最小值 r_2，使得与该圆相遇的所有解都跑向其内部.

e. 证明在区域 $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ 内部，存在一个周期轨.

f. 应用计算机程序，绘出该周期轨.

6.2.3 考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x + 2y - x(x^2 + y^2)\\ \dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2).\end{cases}$$

236

a. 求在原点处的不动点类型.

b. 证明原点是唯一的不动点.

c. 根据 x 和 y 计算 $r\dot{r}$.

d. 证明当 r 充分小时 $\dot{r} > 0$，当 r 充分大时 $\dot{r} < 0$(提示：证明对所有的 $(x, y) \neq (0, 0)$)，二次项是正的，可以用完全配方法或检验函数求最小值的方法).

e. 证明系统存在一个周期轨.

6.2.4 考虑平面微分方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$，假设有一环域

$$\{\mathbf{x} : r_1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq r_2\},$$

其边界上的轨线都进入环域内部，且在环域内没有不动点.

a. 若在环域内恰有一个周期轨，证明它是轨道渐近稳定的(提示：利用推论 6.2.6 与庞加莱–本迪克松定理).

b. 若在环域内恰有两个周期轨，证明其中一个是轨道渐近稳定的.

c. 若在环域内恰有 n 个周期轨($n = 3$ 或 4)，证明必至少有一个周期轨是轨道渐近稳定的(此结果对任何正整数 n 都成立).

6.2.5 考虑方程组

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x - 2y - x(x^2 + 4y^2)\\ \dot{y} = 4x - y - y(x^2 + 4y^2).\end{cases}$$

a. 证明原点是线性化系统的不稳定不动点.

b. 证明原点是唯一的不动点(提示：一种方法是假设 (x_*, y_*) 是一个非零不动点，将其满足的方程表示成一个矩阵方程，这个矩阵方程与结论(a)矛盾).

c. 令 $L(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$，$M(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(x-y)^2}{2}$，证明当 (x, y) 充分接近于 $(0, 0)$ 时有 $\dot{M} > 0$，当 (x, y) 充分远离 $(0, 0)$ 时有 $\dot{L} < 0$.

d. 证明存在一形如 $\{(x, y) : a^2 \leq M(x, y),\ L(x, y) \leq A^2\}$ 的正不变区域，其中 a 适当小，A 适当大.

e. 证明在(d)定义的区域中存在一个闭轨.

6.2.6 在文献[79]中，Murray 提出一个三分子化学反应模型

$$\begin{cases}\dot{u} = a - u + u^2 v\\ \dot{v} = b - u^2 v,\end{cases}$$

其中 $a > 0$，$b > 0$. 这里取 $a = \dfrac{1}{8}$，$b = \dfrac{1}{2}$(注意该模型类似于书中的 Brusselator 振子).

a. 求不动点.

b. 证明不动点是源，两个特征值的实部都大于零.

c. 证明区域 $\mathcal{R} = \{(u, v) : u \geq \dfrac{1}{16},\ 0 \leq v \leq 128,\ u + v \leq 130\}$ 是正不变集.

237

d. 解释为什么在 $\mathcal{R}$ 内存在一个周期轨.

6.2.7 在文献[20]中，Brauer 与 Castillo-Chávez 给出下述一般类型的捕食者–食饵系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - \dfrac{x}{30} - \dfrac{y}{x+10}\right) \\ \dot{y} = y\left(\dfrac{x}{x+10} - \dfrac{1}{3}\right). \end{cases}$$

a. 证明不动点是(0, 0), (30, 0)与(5, 12.5), 且(0, 0), (30, 0)是鞍点, (5, 12.5)是不稳定的(源).

b. 证明区域$\mathcal{R} = \{(x, y): 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x + y \leqslant 50\}$是正不变集(提示: 证明直线 $x + y = 50$ 位于曲线 $\dot{x} + \dot{y} = 0$ 的上方).

c. 利用定理 6.2.8 证明: 对$\mathcal{R}$中任一点 $\boldsymbol{x}_0$, $\omega(\boldsymbol{x}_0)$不包含任何不动点, 且一定是周期轨(提示: 找出(0, 0), (30, 0)的稳定流形, 并说明 $W^s(0, 0) \cap W^u(30, 0) = \varnothing$, 于是不存在任何轨线满足 $\alpha(\gamma) = (30, 0)$, $\omega(\gamma) = (0, 0)$.

6.2.8 Selkov 提出下述糖酵解过程的生化反应模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} = b - ay - x^2 y, \end{cases}$$

其中 $a > 0$, $b > 0$.

a. 证明唯一的不动点是$(x^*, y^*) = \left(b, \dfrac{b}{a + b^2}\right)$.

b. 对于 $a = 0.1$, $b = 0.5$, 证明不动点(x^*, y^*)是不稳定的.

c. 为得到不变集, 采用形如"$x + y =$ 常数" 且经过点$\left(b, \dfrac{b}{a}\right)$的直线作为一条边界, 其中 $b = x^*$, $\dfrac{b}{a}$是 $\dot{y} = 0$ 的 y 轴截距, 因此考虑直线 $x + y = b + \dfrac{b}{a}$和零倾线 $\dot{x} = 0$. 证明存在唯一的点(x_1, y_1), 使得

$$b + \frac{b}{a} = x + y$$

$$y = \frac{x}{a + x^2}.$$

(提示: 描绘这两条曲线.)

d. 证明区域$\mathcal{R} = \left\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant x_1, 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{b}{a}, x + y \leqslant b + \dfrac{b}{a}\right\}$是一个正不变集, 其中 x_1 是从(c)中解得的.

e. 当 $a = 0.1$, $b = 0.5$ 时, 证明对于任意$(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$且$(x_0, y_0) \neq (x^*, y^*)$, 其正极限集 $\omega(x_0, y_0)$ 是一个周期轨.

6.3 自激振子

6.3.1 证明系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 - \mu(x^4 - 1)y \end{cases}$$

当 $\mu > 0$ 时存在唯一的周期轨.

238

6.3.2 瑞利微分方程为

$$\ddot{z} + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\dot{z}^3 - \dot{z}\right) + z = 0.$$

a. 证明变换 $x = \dot{z}$ 可将瑞利微分方程化为范德波尔方程. (提示: $\ddot{x} = ?$)

b. 证明对于变换 $x=\dot{z}$，$y=-z$，瑞利微分方程化为(6.3.4)式的形式.

c. 证明方程存在唯一的极限环.

6.4　安德罗诺夫–霍普夫分支

6.4.1　考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x-2x^3-3x^5+y(2\mu+x^2+y^2).\end{cases}$$

a. 对于不同的 μ 值，不动点在原点处的特征值是多少？

b. 当 $\mu=0$ 时，原点是吸引的还是排斥的？

c. 证明当 $\mu=0$ 时存在安德罗诺夫–霍普夫分支，并说明它是超临界还是亚临界分支？周期轨是吸引的还是排斥的？对所得结果给出解释.

6.4.2　考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y+\mu x,\\ \dot{y}=-x+\mu y-x^2y.\end{cases}$$

a. 利用李雅普诺夫函数说明当 $\mu=0$ 时不动点是吸引的还是排斥的.

b. 证明当 μ 变化时出现安德罗诺夫–霍普夫分支.

c. 分支是超临界还是亚临界分支？周期轨是吸引的还是排斥的？

6.4.3　考虑捕食者–食饵系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x(1+2x-x^2-y)\\ \dot{y}=y(x-a),\end{cases}$$

其中 $a>0$，x 种群是食饵，当种群数量较小时有正的增长率，当 $x>1$ 时有负的增长率；y 种群是捕食者，当没有食饵时捕食者绝迹．参数为 a，试证明该系统存在安德罗诺夫–霍普夫分支.

a. 求坐标为正的不动点 (x_a, y_a).

b. 求在不动点 (x_a, y_a) 处的线性化及特征值，对那些参数值，特征值是纯虚数？若 α_a 是特征值的实部，证明在分支值处有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\alpha_a)\neq 0$.

c. 利用定理 6.4.4，判定在分支值处不动点是弱吸引的还是弱排斥的？

239

d. 当 a 大于还是小于分支值时出现周期轨？是吸引的还是排斥的？

6.4.4　考虑含参数的范德波尔微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y+\mu x-x^3\\ \dot{y}=-x.\end{cases}$$

a. 通过一个检验函数，判定当 $\mu=0$ 时原点是弱吸引的还是弱排斥的.

b. 证明当 μ 变化时出现安德罗诺夫–霍普夫分支.

c. 分支是超临界还是亚临界分支？周期轨是吸引的还是排斥的？

6.5　周期轨的同宿分支

6.5.1　考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-2x^3+y(\mu+x^2-x^4-y^2),\end{cases}$$

其中 μ 是参量.

a. 利用检验函数 $L(x, y)=\frac{-x^2+x^4+y^2}{2}$，证明：

(i)当 $\mu=0$ 时有两个同宿轨；(ii)当 $\mu>0$ 时存在一个稳定的极限环；(iii)当 $-\frac{1}{4}<\mu<0$ 时存在两个稳定的极限环.

b. 当 $\mu<0$，$\mu=0$，$\mu>0$ 时，各点的 ω 极限集是什么？

c. 分别画出 $\mu>0$，$\mu=0$，$-\frac{1}{4}<\mu<0$，$\mu<-\frac{1}{4}$ 时的相图.

6.6 流作用下面积或体积的变化

6.6.1 利用定理6.6.3证明下述微分方程组在第一象限不存在周期轨：

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a-by)\\ \dot{y}=y(-a-bx).\end{cases}$$

其中 $a>0$，$b>0$.

6.6.2 考虑捕食者–食饵微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a-x-y)\\ \dot{y}=y(-a+x),\end{cases}$$

其中 $a>0$.

a. 求不动点并判断其类型(鞍点、吸引、排斥等).

b. 利用定理6.6.3证明系统在第一象限不存在周期轨.

c. 每一个稳定不动点的吸引域是什么？

d. 利用(a)～(c)的结论与零倾线画出系统相图的草图，说明鞍点的稳定流形与不稳定流形的位置关系.

6.6.3 证明下述微分方程组不存在周期轨：

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+y^2\\ \dot{y}=x^2-y^3.\end{cases}$$

240

6.6.4 考虑有阻尼的钟摆方程

$$\begin{cases}\dot{\tau}=1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)\\ \dot{x}=y\\ \dot{y}=-\sin(x)-y-\cos(\tau).\end{cases}$$

a. 求系统的发散量.

b. 区域在方程的流的作用下，体积是递减还是递增的？

c. 证明区域 $R=\{(\tau, x, y):\ |y|\leq 2\}$ 是正不变集.

6.7 周期轨的稳定性与庞加莱映射

6.7.1 考虑周期强迫标量微分方程

$$\dot{x}=-x+\sin(t).$$

a. 用参数变易公式求方程的解(在一维情形下，参数变易公式通常称为用积分因子法求解非齐次线性方程).

b. 求庞加莱映射.

c. 求庞加莱映射的不动点并决定其稳定性.

6.7.2 考虑具有周期阻尼的微分方程

$$\dot{x} = (1+\cos(t))x - x^2.$$

a. 证明 $x=0$ 位于一个不稳定的周期轨上.

b. 证明没有周期轨满足 $x<0$(提示：证明 $\dot{x}<0$).

c. 令 P 是 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的庞加莱映射，证明当 $x\geqslant 1$ 时 $P(x)<x$，在 $x>2$ 上没有周期轨，存在初始值满足 $0<x_0<2$ 的周期轨.

d. 利用定理 6.7.7 证明任一满足 $x_0>0$ 的周期轨是轨道稳定的(提示：用类似于例 6.7.8 的方法).

e. 证明存在两个周期轨，一个稳定，一个不稳定.

6.7.3　考虑方程

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \qquad (\mathrm{mod} 2\pi) \\ \dot{x} = x(1-x)[1+\cos(\tau)]. \end{cases}$$

注意到有两个周期轨：$(\tau, x)=(\tau, 0)(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$，$(\tau, x)=(\tau, 1)(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$.

a. 求系统的发散量.

b. 求庞加莱映射在两个周期轨 $(\tau, x)=(0, 0)$ 与 $(\tau, x)=(0, 1)$ 处的导数. 提示：利用庞加莱映射的导数公式

$$P'(x) = \exp\left(\int_0^{2\pi} \nabla\cdot \boldsymbol{F}_{\phi(t;(0;x))}\mathrm{d}t\right),$$

其中 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 是微分方程的发散量，且

$$\exp(u) = \mathrm{e}^u.$$

6.7.4　考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2x^3 + y(\mu - y^2 - x^2 - x^4), \end{cases}$$

[241]　其中 $\mu>0$.

a. 证明 $\gamma=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}:\ \mu = y^2+x^2+x^4\right\}$ 是周期轨.

b. 记 $f(x, y)=(f_1(x, y), f_2(x, y))$ 是方程组的向量场，证明系统沿着周期轨 γ 的发散量是 $-2y^2$.

c. 令 $\Sigma=\left\{\begin{bmatrix} x \\ 0\end{bmatrix}:\ x>0\right\}$，$P$ 为从 Σ 到其自身的庞加莱映射. 证明庞加莱映射的导数有 $0<P'(x_0)<1$，$\begin{bmatrix} x_0 \\ 0\end{bmatrix}\in\gamma$，进一步证明周期轨 γ 是渐近稳定的.

6.7.5　考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = x + yx(1-x^2-y^2) \\ \dot{z} = -z. \end{cases}$$

a. 证明 $x^2+y^2=1$ 是周期轨.

b. 对此周期轨，其特征乘数是多少？

6.7.6　假设 $\boldsymbol{x}_0$ 位于某流的周期轨 γ 上，Σ 是过 $\boldsymbol{x}_0$ 的横截，庞加莱映射 $\boldsymbol{P}$ 将 Σ 中的开集 U 映到 Σ 上. 那么，$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的不动点，称其为在 $\boldsymbol{P}$ 下 L 稳定的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in U$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，对所有 $j\geqslant 0$ 都有 $\|\boldsymbol{P}^j(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{P}^j(\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon$；称该不动点为渐近稳定的，若它是 L 稳

定的，且存在 $\delta_0>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in U$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta_0$ 时

$$\lim_{j\to\infty}\|\boldsymbol{P}^j(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{P}^j(\boldsymbol{x}_0)\|=0.$$

a. 证明：若 $\boldsymbol{x}_0$ 在庞加莱映射 $\boldsymbol{P}$ 下是 L 稳定的，则周期轨 γ 在流下是轨道 L 稳定的．

b. 证明：若 $\boldsymbol{x}_0$ 在庞加莱映射 $\boldsymbol{P}$ 下是渐近稳定的，则周期轨 γ 在流下是轨道渐近稳定的.

6.8 应用

6.8.1 考虑 Lengyel 给出的简化的化学反应振荡模型

$$\begin{cases}\dot{x}=a-x-\dfrac{4xy}{1+x^2}\\ \dot{y}=bx\left(1-\dfrac{y}{1+x^2}\right),\end{cases}$$

其中 $a>0$，$b>0$.

a. 描绘零倾线，求平衡点 (x^*, y^*)，且 $x^*>0$，$y^*>0$.

b. 证明在 (x^*, y^*) 处的变分矩阵的行列式与迹分别为

$$\Delta=\frac{5bx^*}{1+(x^*)^2}>0,$$

$$\tau=\frac{3(x^*)^2-5-bx^*}{1+(x^*)^2}.$$

求 b 满足的不等式，以保证不动点是排斥的. 242

c. 证明区域 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$，$y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 是正不变集，其中 $0<x_1<x_2$，$0<y_1<1<y_2$，$y_2=1+x_2^2$，$4x_2y_1=(a-x_2)(1+x_2^2)$，$y_2<\dfrac{(a-x_1)(1+x_1^2)}{4x_1}$.

d. 证明若参数满足(b)中的条件，即保证不动点是排斥的，则存在一个极限环. 243

第7章 混沌吸引子

庞加莱-本迪克松定理蕴涵着平面微分方程组的极限集无非是极限环、奇点、以及不动点与连接它们的稳定和不稳定流形，这就是最复杂的行为了：这样的系统不可能有混沌行为．因此出现混沌的最低维数是三维，或者是具有周期强迫的二维方程．

正如前言中提到的，洛伦兹发现了具有三个变量的微分方程组，其极限集有复杂的动力学行为，后来称之为混沌吸引子．几乎在同时，Ueda 发现了具周期振荡强迫的非线性振子，其极限集也有混沌吸引子出现．见文献[**110**]或历史文献[**109**]．

在 7.1 节和 7.2 节，我们提出有关混沌行为的主要概念，其中包括吸引子、关于初始值的敏感依赖性和混沌吸引子等．接着讨论了一系列出现混沌吸引子或者数值模拟出现混沌吸引子的系统．详细内容将在 7.3 节考虑洛伦兹系统，7.4 节考虑 Rössler 系统，7.5 节考虑 Ueda 研究过的具有周期强迫的方程等．

7.6 节介绍了有关依赖于初始值的敏感度的数值度量，称之为李雅普诺夫指数．7.7 节给出了验证系统是否具有混沌吸引子的较实用的方法．

总之，与前面几章相比，本章的内容主要是定性与几何方法的描述，而定量描述较少．

7.1 吸引子

前面的章节已经讨论了吸引的不动点与吸引的周期轨，在本节我们将这一概念拓展到更加复杂的吸引集．尽管在 7.3 节才较完整地讨论洛伦兹系统，但在这里用该系统引入吸引集(attracting set)、吸引子(attractor)与收缩区域(trapping region)的概念．

例 7.1.1(洛伦兹系统的不动点汇) 洛伦兹系统是下列系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=-\sigma x+\sigma y\\ \dot{y}=rx-y-xz\\ \dot{z}=-bz+xy,\end{cases}\tag{7.1.1}$$

其中 σ，r，b 为三个正参数．洛伦兹考虑的参数值为 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$，$r=28$．在这里通常是固定 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$，考虑当 r 变化时系统的动力学行为．

对所有的参数，原点都是一个不动点，在原点的偏导数矩阵为

$$\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ r & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{bmatrix},$$

特征方程为

$$(\lambda+b)(\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r))=0.$$

原点的特征值为

$$\lambda_s = -b < 0,$$

$$\lambda_{ss} = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2} < 0,$$

$$\lambda_u = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2}.$$

前两个特征值总为负值，用"s"表示是稳定的．对于通常所考虑的参数值，都有 $\lambda_{ss} < \lambda_s < 0$(这也是在 λ 的下标有两个"s"的原因，表明是强稳定的特征值)．第三个特征值当 $0 < \lambda < 1$ 时为负，当 $\lambda > 1$ 时为正，所以当 $0 < \lambda < 1$ 时原点是吸引的；当 $\lambda > 1$ 时原点是鞍点，这是因为三个特征值均为实的，且其中两个是负的(吸引的)，另外一个是正的(排斥的)．

当 $0 < \lambda < 1$ 时，洛伦兹系统仅有一个不动点，可以利用李雅普诺夫函数来证明对于这些参数，原点是全局吸引的．为此令

$$L_1(x,y,z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}.$$

这是正定函数，且是度量到原点的距离的平方，只不过 x 坐标有一个尺度换算．则

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= \frac{1}{\sigma}x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &= x(y-x) + y(rx - y - xz) + z(-bz + xy) \\ &= -x^2 + (r+1)xy - y^2 - bz^2 \\ &= -\left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right)y^2 - bz^2,\end{aligned}$$

其中最后的等式进行了配方．若 $r < 1$，则 $r + 1 < 2$ 或 $\frac{r+1}{2} < 1$，即 y^2 项的系数小于零．令 $\dot{L}_1 = 0$，则有 $y = z = 0$ 且 $0 = x - \frac{r+1}{2}y$，从而有 $x = \frac{r+1}{2}y = 0$，因此只有当$(x, y, z) = (0, 0, 0)$时才有 $\dot{L}_1 = 0$，即在$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$上 $\dot{L}_1$ 是严格小于零的，这说明 L_1 是全局李雅普诺夫函数，原点的吸引域是整个$\mathbb{R}^3$．

■

例 7.1.2(洛伦兹系统的吸引集)　这里单独考虑洛伦兹系统 $r > 1$ 的情形．取检验函数

$$L_2(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2}{2},$$

246

利用该函数可证所有的解都将进入一个大球内，但却不能用它获得 ω 极限集的性质．其导数为

$$\begin{aligned}\dot{L}_2 &= x(-\sigma x + \sigma y) + y(rx - y - xz) + (z - r - \sigma)(-bz + xy) \\ &= -\sigma x^2 + \sigma xy + rxy - y^2 - xyz - bz^2 + xyz + rbz - rxy + \sigma bz - \sigma xy \\ &= -\sigma x^2 - y^2 - b(z^2 - (r+\sigma)z) \\ &= -\sigma x^2 - y^2 - b\left(z - \frac{r+\sigma}{2}\right)^2 + \frac{b(r+\sigma)^2}{4}.\end{aligned}$$

前三项之和为负，因此当

$$\sigma x^2+y^2+b\left(z-\frac{r+\sigma}{2}\right)^2>\frac{b(r+\sigma)^2}{4}$$

时，$\dot{L}_2<0$. 集合 $\sigma x^2+y^2+b\left(z-\frac{r+\sigma}{2}\right)^2=\frac{b(r+\sigma)^2}{4}$ 构成一个椭球面，其3个轴的端点坐标分别为

$$(x,y,z)=\left(\frac{\pm\sqrt{b/\sigma}(r+\sigma)}{2},0,0\right),\ =\left(0,\frac{\pm\sqrt{b}(r+\sigma)}{2},0\right),$$
$$=(0,0,r+\sigma),\ =(0,0,0).$$

L_2 在这些端点处的值分别为

$$\frac{(r+\sigma)^2}{8}\left(\frac{b}{\sigma}+1\right),\frac{(r+\sigma)^2}{8}(b+1),\frac{(r+\sigma)^2}{2},0.$$

当 $\sigma>1$，$b<3$ 时，这些值中最大者为 $\frac{(r+\sigma)^2}{2}$. 取 c_2 比该值稍大，即 $C_2>\frac{(r+\sigma)^2}{2}$.

令

$$\boldsymbol{U}_2=L_2^{-1}((-\infty,C_2])=\{(x,y,z):L_2(x,y,z)\leqslant C_2\},$$

其内部定义为

$$\operatorname{int}(\boldsymbol{U}_2)=\{(x,y,z):L_2(x,y,z)<C_2\}.$$

设 $\phi(t;\ \boldsymbol{X})$ 是洛伦兹系统的流. 由上述对 L_2 导数的计算可得，对任一初始值 $(x_0,\ y_0,\ z_0)\in\boldsymbol{U}_2$，都有 $\phi(t;\ (x_0,\ y_0,\ z_0))\in\operatorname{int}(\boldsymbol{U}_2)\ (t>0)$. 于是 $\boldsymbol{U}_2$ 是一个收缩区域，且任何 ω 极限集都包含在其内，也即当 $t>0$ 时流把整个 $\boldsymbol{U}_2$ 都映入其内部，即

$$\phi(t;\boldsymbol{U}_2)\subset\operatorname{int}(\boldsymbol{U}_2)\quad(t>0).$$

因此，集合 $\boldsymbol{U}_2$ 的前行流的交集

$$\boldsymbol{A}=\bigcap_{t\geqslant 0}\phi(t;\boldsymbol{U}_2)$$

是 $\boldsymbol{U}_2$ 中最大的不变集，它称为相应于收缩区域 $\boldsymbol{U}_2$ 的吸引集. 事实上，由 $\phi(t_1;\ \boldsymbol{U}_2)\subset\operatorname{int}(\boldsymbol{U}_2)$ 可知，闭集 $\boldsymbol{A}$ 不与 $\boldsymbol{U}_2$ 的边界相交，而是包含于 $\boldsymbol{U}_2$ 的内部 $\operatorname{int}(\boldsymbol{U}_2)$ 中.

在定理7.1.8中将会发现，$\boldsymbol{A}$ 一定包含原点的不稳定流形，即 $W^u(\boldsymbol{0})\subset\boldsymbol{A}$. 有关集合 $\boldsymbol{A}$ 的其他性质将在7.3节中讨论. ■

247

不变集 $\boldsymbol{A}$ 称为是吸引集，若存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个邻域 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{U}$ 中点的 ω 极限集都在 $\boldsymbol{A}$ 中. 我们是想让吸引集具有类似于L稳定性的性质，因此这里给出的定义实际上表示整个邻域的前行轨线的交，而不仅仅表示点的 ω 极限集. 下面的定义是对洛伦兹系统有关概念的精确描述.

定义7.1.3　一个有界闭集 $\boldsymbol{U}$ 称为微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的收缩域(trapping region)，如果 $\phi(t;\ \boldsymbol{U})\subset\operatorname{int}(\boldsymbol{U})\ (t>0)$. 此处的闭集 $\boldsymbol{U}$ 是指包含它的边界，而其内部 $\operatorname{int}(\boldsymbol{U})$ 不包括边界.

对上述例题，内部是用严格不等式表示的，对于一个收缩域，其边界在某时刻 $t>0$ 被移动了一个正的距离. 若用一个函数 L 定义集合 U 为

$$\boldsymbol{U}=L^{-1}((-\infty,C])=\{\boldsymbol{x}:L(\boldsymbol{x})\leqslant C\},$$

则

$$\text{int}(U) \supset L^{-1}((-\infty, C)) = \{x : L(x) < C\}.$$

(如果在集合 $L^{-1}(C)$ 上某些点的附近，函数 L 的值不大于 C，则 int(U)可以包含这些点.) U 成为收缩域的一个充分条件是

$$\phi(t;U) \subset \{x : L(x) < C\} \quad (t > 0).$$

在数学上，这可以解释为 $\phi(t;\ U)$ 的闭包含于 U 的内部(一个集合 V 的闭包是指集合 V 连同它的边界点，它是包含 V 的最小闭集；集合 U 的内部是指将 U 的所有边界点去掉后所剩下点的集合，它是含于 U 的最大开集).

定义 7.1.4 集合 A 称为相应于收缩域 U 的吸引集，只要满足

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \phi(t;U).$$

显然，集合 A 是包含在 U 中的最大不变集. 由于已经假设收缩域是有界闭集，从定义可以看出，任何吸引集也是有界闭集的，因而是紧的.

定义 7.1.5 若一个吸引集的任何真子集都不是吸引的，则称该吸引集为不可分的(indecomposable)(亦即，若 $\varnothing \neq A' \subset A$ 是一个吸引集，则必有 $A' = A$)；一个不可分的吸引集称为吸引子.

注 7.1.6 下述条件是验证吸引集为不可分的一个较强但较易验证的条件：

在收缩域 U 中有一个初始值 x_0，使得 $\omega(x_0) = A$.

一些作者根本不考虑混沌集的不可分性，但在这里总保留它的某些形式，甚至仅仅是用计算机模拟来获得的. 虽然目前尚没有一种给出这种要求的方法，但我们感到在某种意义上吸引子应该是不可分的.

由上述定义可知，渐近稳定的不动点及轨道渐近稳定的周期轨都是吸引子，因为每种情形都是不可分的不变集，且有收缩到它的收缩域.

注 7.1.7 吸引集的定义实质上是 A 的某邻域中所有点的 ω 极限集都包含于 A. C. Conley 证明了具有"不可分性"的吸引子都有一种回归性，在这样一个集合 A 中的每一个点都是链回归的，且 A 中任两点之间存在一个 ε 链. 换句话说，对给定的 p，$q \in A$，及任一小的跳跃量 $\varepsilon > 0$，存在一列点 $x_0 = p$，x_1，⋯，$x_n = q$，及一列时刻 $t_1 \geq 1$，$t_2 \geq 1$，⋯，$t_n \geq 1$，使得 $\|\phi^{t_i}(x_{i-1}) - x_i\| < \varepsilon$，$1 \leq i \leq n$. 这样，就有一条轨道，带有从 p 到 q 的误差，又有一条从 p 回到 p 的 ε 链. 详细内容参见 13.4 节或文献[**87**]. 248

我们经常可找到一个点 x_0，使得 $\omega(x_0) = A$，则 A 是严格意义下的不可分. 若存在这样的点，则称 A 为拓扑传递的.

定理 7.1.8 设 U 是相应于吸引集 A 的收缩域，则有下列性质：

(a) A 是闭集(含其边界)；(b) A 是正、负不变集；(c) 若 $x_0 \in U$，则 $\omega(x_0) \subset A$；(d) 若 x_0 是 A 中的双曲不动点，则 $W^u(x_0) \subset A$；(e) 若 γ 是 A 中的双曲周期轨，则 $W^u(\gamma) \subset A$.

证明见 7.9 节.

例 7.1.9　考虑例 5.4.4 中的方程

$$\begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2x^3 + y(x^2 - x^4 - y^2).\end{cases}$$

利用检验函数

$$L(x,y) = \frac{-x^2 + x^4}{2} + \frac{y^2}{2},$$

得

$$\dot{L} = -2y^2 L\begin{cases}\geqslant 0 & L < 0 \\ = 0 & L = 0 \\ \leqslant 0 & L > 0.\end{cases}$$

集合 $L^{-1}(0) = \{(x, y): L(x, y) = 0\} = \Gamma$ 由原点及其稳定和不稳定流形所组成，在其他两个不动点处有 $L(\pm 2^{-1/2}, 0) = -\frac{1}{8}$. 令开集 $\boldsymbol{U}_1$ 为

$$\boldsymbol{U}_1 = \left\{(x,y): -\frac{1}{16} < L(x,y) < \frac{1}{16}\right\},$$

则有

$$\Gamma = \bigcap_{t \geqslant 0} \phi(t; \boldsymbol{U}_1).$$

所以 Γ 是一个吸引集. 任一包含原点的收缩域一定也包含原点的部分不稳定流形，因而包含整个 Γ，因此 Γ 是一个不可分的吸引集，也就是说 Γ 是一个吸引子.

如果我们将 $\boldsymbol{U}_1$ 的某些“洞”填充，可以得到其他的吸引集，比如令

$$\boldsymbol{U}_2 = \left\{(x,y): L(x,y) < \frac{1}{16}\right\},$$

注意到 $\dot{L}$ 的符号，有

$$\boldsymbol{A}_2 = \bigcap_{t \geqslant 0} \phi(t; \boldsymbol{U}_2) = \{(x,y): L(x,y) \leqslant 0\}$$

就是由 Γ 及其内部的一切点所组成之集. 易验证 $\boldsymbol{A}_2$ 也是一个吸引集，但由于 $\Gamma \subset \boldsymbol{A}_2$，故 $\boldsymbol{A}_2$ 不是吸引子.

还存在另外两个吸引集，它们仅填充了 Γ 的一个洞，即

$$\Gamma \cup \{(x,y) \in \boldsymbol{A}_2: x \geqslant 0\}$$

与

249

$$\Gamma \cup \{(x,y) \in \boldsymbol{A}_2: x \leqslant 0\}.$$

易证上述四个集合是该例仅有的吸引集. ■

注 7.1.10　有关吸引子的定义，并不是所有的作者都要求吸引子吸引给定集合 $\boldsymbol{A}$ 的邻域中的全部的点. 许多人接受米尔诺(J. Milnor)给出的定义，它仅仅要求存在一个集合 $\boldsymbol{U}$，使得对任意的 $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{U}$，有 $\omega(\boldsymbol{x}_0) \subset \boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{U}$ 有正的体积(或面积).

为了给出精确的定义，我们使用吸引域和集合测度的概念. 所谓一个闭的不变集 A 的吸引域是指 ω 极限集含于 A 的所有点的集合，即

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{A};\phi) = \{\boldsymbol{x}_0:\omega(\boldsymbol{x}_0;\phi) \subset \boldsymbol{A}\}.$$

集合$\mathcal{B}(\boldsymbol{A};\ \phi)$的测度是指广义的“面积”($\mathbb{R}^2$ 中的子集)和广义的“体积”($\mathbb{R}^3$ 或更高维空间中的子集).

不变闭集 $\boldsymbol{A}$ 称为流 ϕ 的米尔诺吸引子(Milnor attractor)，是指(i)$\boldsymbol{A}$ 的吸引域$\mathcal{B}(\boldsymbol{A})$有正测度；(ii)不存在真子集 $\boldsymbol{A}'\subset\boldsymbol{A}$，使得$\mathcal{B}(\boldsymbol{A}) \setminus \mathcal{B}(\boldsymbol{A}')$的测度为零.

然而如果我们使用上述定义，则从一侧吸引的不动点也称为一个吸引子. 比如 0 是方程 $\dot{x}=x^2$的米尔诺吸引子；其他不是吸引子而是米尔诺吸引子的例子如例 4.1.10 的点(1，0)和例 4.1.11 的原点. 我们不愿把这样的集合称为吸引子，而把使用收缩域吸引其整个邻域的不变集视为真正的吸引子.

注 7.1.11 为得到洛伦兹系统的可能包含一个吸引子的收缩域，需要考虑这样的区域，它不包含 $\boldsymbol{P}^{\pm}$或它们的稳定流形(我们将要考虑使 $\boldsymbol{P}^{\pm}$为鞍点时的 r 的值)，故必须将例 7.1.2 中定义的开集 $\boldsymbol{U}_2$ 中除去围绕 $W^s(\boldsymbol{P}^+)\cup W^s(\boldsymbol{P}^-)$的一个管形域. 要使得所得吸引集是一个混沌吸引子，我们要证明它是一个不可分的吸引集且在某种意义上是混沌的，该理论最困难的部分是证明这最后一个条件. 在下一节，我们将给出混沌的精确定义，在 7.3.2 节，讨论洛伦兹方程的庞加莱映射，并解释其某些性质如何蕴涵吸引集是混沌的.

事实上，洛伦兹系统的轨线都趋向于一个零体积的集合，为弄清楚这一点，需要考虑一个区域在流作用下迁移时其体积是如何改变的. 下面的定理表明在洛伦兹方程的流的作用下任一区域体积在迁移过程中是如何趋于零的.

定理 7.1.12 (a)设$\mathcal{D}$为$\mathbb{R}^3$ 中的区域，具有光滑的边界$\partial\mathcal{D}$，记$\mathcal{D}(t)$为洛伦兹方程的流的作用下$\mathcal{D}$的迁移：

$$\mathcal{D}(t) = \{\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0):\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}\}.$$

再记 $V(t)$是$\mathcal{D}(t)$的体积，则

$$V(t) = V(0)\mathrm{e}^{-(\sigma+1+b)t}.$$

即体积是指数级地递减.

(b)设 $\boldsymbol{A}$ 是具有有限体积的不变集，则它一定是零体积的，这样，洛伦兹方程的不变集是零体积的.

证明 由定理6.6.1，有

$$\dot{V}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \nabla\cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}V.$$

250

对于洛伦兹方程，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=-\sigma-1-b<0$，故有

$$\dot{V}(t) = -(\sigma+1+b)V(t),$$

显然体积是递减的，且

$$V(t) = V(0)\mathrm{e}^{-(\sigma+1+b)t},$$

不变集 $\boldsymbol{A}$ 包含在有有限体积的区域$\mathcal{D}(t)$中，则

$$\mathrm{vol}(A) \leqslant \mathrm{vol}(\mathcal{D}(t)) = \mathrm{vol}(\mathcal{D}(0))\mathrm{e}^{-(\sigma+1+b)t},$$

故 vol($\boldsymbol{A}$)一定为零. ■

7.2　混沌

7.2.1　敏感依赖性

在前言中提到了蝴蝶效应，即初始值的微小变化就将导致后来位置的巨大变化，这样的微分方程组就是放大了最初的微小变化. 洛伦兹在他研究的方程组中发现了这种性质，这点是定义混沌系统的要素之一. 本节我们精确阐述这一性质，称其为关于初始值的敏感依赖性.

如果解是有界的，则它们最终的差别不可能任意大，这样，在给出正式定义时，就不能要求 $\|\phi(t;\ \mathbf{y}_0)-\phi(t;\ \mathbf{x}_0)\|$ 成为任意大，而是仅仅比预先给定的常数 r 更大.

定义 7.2.1　系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 点具有对初始值的敏感依赖性是指：存在 $r>0$，使得对任意的 $\delta>0$，存在 $\mathbf{y}_0$，满足 $\|\mathbf{y}_0-\mathbf{x}_0\|<\delta$，及时间 $\tau>0$，使得

$$\|\phi(\tau;\mathbf{y}_0)-\phi(\tau;\mathbf{x}_0)\|\geqslant r.$$

当扰动 δ 变小时，$\mathbf{y}_0$ 随之变动，而时间 τ 一般是变大的.

至于一点集对初始值的敏感依赖性，则有两个不同的概念.

定义 7.2.2　称系统在集合 $\mathbf{S}$ 中的点具有对初始值的敏感依赖性是指：系统在集合 $\mathbf{S}$ 中的每一点都具有对初始值的敏感依赖性.

若 $\mathbf{S}$ 是一个不变集，称系统限制在 $\mathbf{S}$ 上具有对初始值的敏感依赖性是指：存在 $r>0$，对任意的 $\mathbf{x}_0\in\mathbf{S}$，及 $\delta>0$，存在 $\mathbf{y}_0\in\mathbf{S}$，满足 $\|\mathbf{y}_0-\mathbf{x}_0\|<\delta$，及时间 $\tau>0$，使得

$$\|\phi(\tau;\mathbf{y}_0)-\phi(\tau;\mathbf{x}_0)\|\geqslant r.$$

注 7.2.3　对于一个集合 $\mathbf{S}$，若设其中的点具有对初始值的敏感依赖性，则允许点 $\mathbf{y}_0$ 在集合 $\mathbf{S}$ 之外；若限制在 $\mathbf{S}$ 上关于初始值的敏感依赖性成立，则要求 $\mathbf{y}_0\in\mathbf{S}$.

251

例 7.2.4　考虑一个具有对初始值的敏感依赖性的简单例子，取极坐标方程为

$$\begin{cases}\dot{r}=r(-1+r^2)\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}$$

集合 $r=1$ 是不稳定的周期轨且是不变集，该周期轨上任意一点 $(x_0,\ y_0)$ 都具有对初始值的敏感依赖性，这是因为对满足 $r_1\neq 1$ 的任一初始值 $(x_1,\ y_1)$，最终有 $|r(t)-1|>\frac{1}{2}$，且 $\|\phi(t;\ (x_1,\ y_1))-\phi(t;\ (x_0,\ y_0))\|>\frac{1}{2}$；故限制在不变集 $r=1$ 上的系统不具有敏感依赖性，这也可以直接验证. ■

例 7.2.5（吸引子的敏感依赖性）　在例 5.4.4 与例 7.1.9 中考虑了下述微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-2x^3-y(-x^2+x^4+y^2)\\ \dot{\tau}=1\bmod(2\pi).\end{cases}$$

这里“mod(2π)”是模 2π 的缩写，指减去 2π 的整数倍后，仅取所剩小于 2π 的部分. 在例 7.1.9 中证明了 $\mathbf{A}=L^{-1}(0)$ 是吸引子，用的检验函数为

$$L(x,y,\tau)=\frac{-x^2+x^4+y^2}{2}.$$

若在 A 中取两个接近的点，且 $|x|\approx\frac{1}{\sqrt{2}}$，则当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时，它们将靠的越来越近. 这说明系统限制在 A 上没有对初始值的敏感依赖性.

然而若取 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{y}_0\notin\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{y}_0$ 靠近 $\boldsymbol{x}_0$，则 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 趋于周期轨

$$\gamma=\{(0,0,\tau):0\leqslant\tau\leqslant 2\pi\}.$$

而 $\phi(t;\ \boldsymbol{y}_0)$ 在

$$\{(\pm 1/\sqrt{2},\tau):0\leqslant\tau\leqslant 2\pi\}$$

附近反复经过. 这说明系统在 A 中所有点处确实具有对初始值的敏感依赖性.

在例 7.2.21 中还将回到该系统，讨论其混沌吸引子. ■

用数值方法不难发现洛伦兹系统限制在其不变集上具有对初始值的敏感依赖性，因为附近的初始值有最终落在不变集对侧上的轨线. 图 7.2.1a 与 b 中给出的是初始值(1.4，1.4，28)与(1.5，1.5，28)在直到时刻 1.5 与 2.3 时的轨线图像，注意到较小初始值的解在第二次环绕时走到另一侧，而另一解仍在同侧. 经过时间 2.3 后，第一个解又返回到右侧，第二个解到了左侧，这两个解的轨线互不相干，尽管它们有较相似的初始值.

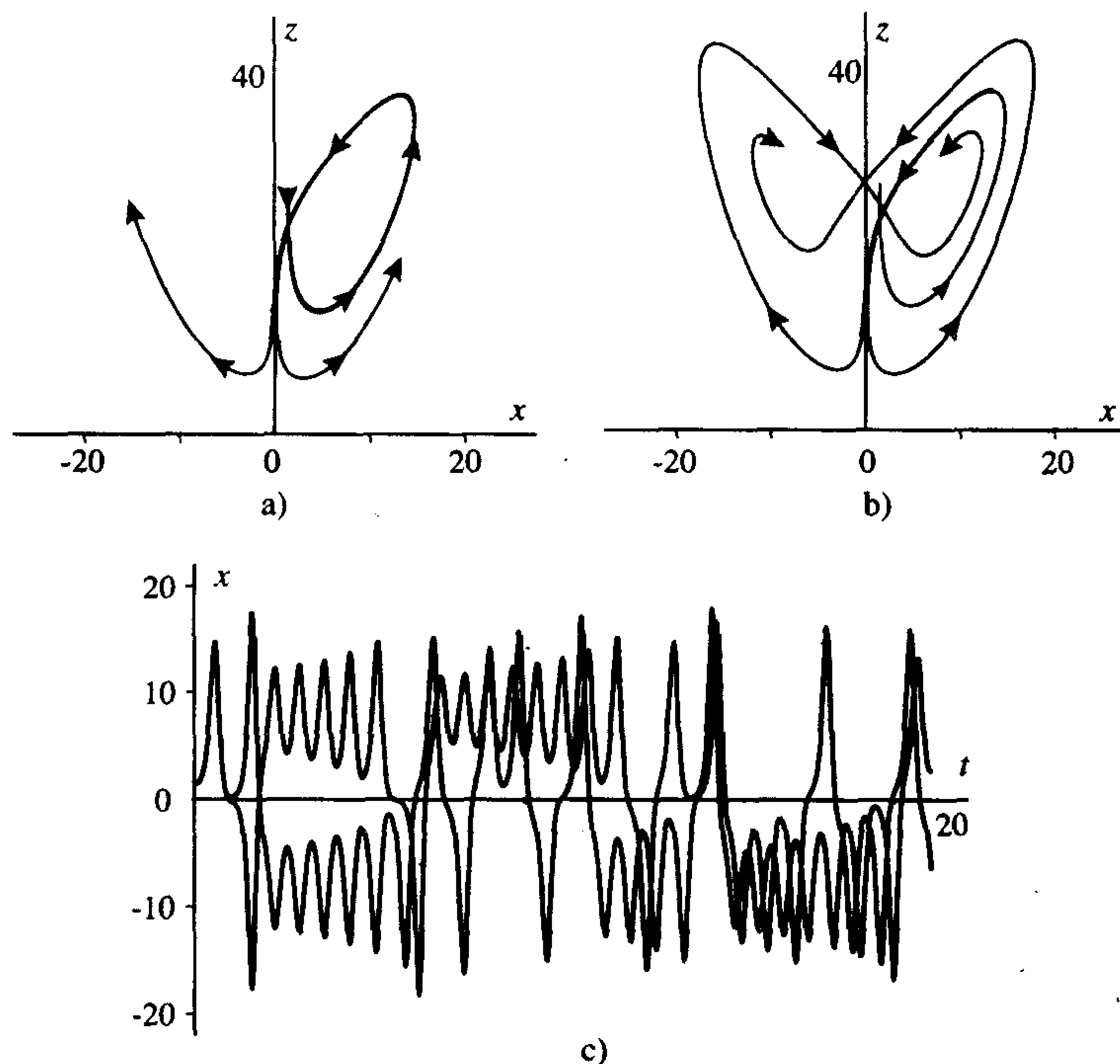


图 7.2.1 洛伦兹系统的敏感依赖性：前两个图是初始值(1.4，1.4，28)与(1.5，1.5，28)在直到时刻 1.5 与 2.3 的轨线图像；图 c 给出了直到时刻 20 的解 x 的图

Warwick Tucker 已证明了取参数值 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$，$r=28$ 的洛伦兹系统具有对初始值的敏感依赖性，并有一个混沌吸引子. 他的证明借助了计算机，使用计算机进行方程的数值积分来

估计验证这些条件.

到目前为止，仅演示了洛伦兹系统限制在其不变集上具有对初始值的敏感依赖性，且仅是用计算机做出轨线的相图来说明这一点. 在7.3节和7.4节，我们将阐明由庞加莱映射而产生的两个一维函数限制在不变集上是如何具有敏感依赖性的.

7.2.2 混沌吸引子

现在给出混沌吸引子的数学定义. 在7.7节，我们给出一种变通的检验方法，这种检验依据于通过计算机模拟或试验数据易于验证的一组量. 13.4.1节将对映射定义相同的概念，并建立更多的理论.

定义 7.2.6 若某系统有吸引子 A，且限制在 A 上具有对初始值的敏感依赖性，则称集合 A 为混沌吸引子.

252 ≀ 253

注 7.2.7 对于混沌吸引子，要求系统限制在吸引子上具有对初始值的敏感依赖性，而不仅仅要求在吸引子中的所有点具有对初始值的敏感依赖性. 例7.2.11说明这两个条件是不同的，这里较强的条件消除了该例所显示的这类非混沌动力学性态.

注 7.2.8 Martelli 在文献[**73**]中指出下述条件蕴涵系统限制在吸引子 A 上具有对初始值的敏感依赖性:

存在初始值 $\boldsymbol{x}_0 \in A$，使得 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=A$，且 $\boldsymbol{x}_0$ 的前行轨线在 A 中是不稳定的(即存在 $r>0$，使得对任意的 $\boldsymbol{x}_{t_0}=\phi(t_0,\ \boldsymbol{x}_0)$ 及 $\delta>0$，存在 $\boldsymbol{y}_0\in A$，及 $t_1>0$，使得 $\|\phi(t_1;\ \boldsymbol{x}_{t_0})-\phi(t_1;\ \boldsymbol{y}_0)\|\geqslant r$).

注 7.2.9 正如前言中指出的，T. Y. Li 与 J. Yorke 在文献[**66**]中引入"混沌"一词，尽管他们的论文包含了所研究系统的许多准确的数学性质，但对混沌的刻画尚欠准确.

Devaney[**31**]是给出混沌确切的数学定义的第一人，他的定义涉及一个混沌集(或限制在不变集以后的混沌系统)，他要求的三个性质是：系统具有对初始值的敏感依赖性、周期点在不变集中稠密、有在不变集中稠密的轨道. 有一个稠密轨道等价于存在 $\boldsymbol{x}_0\in A$，使得 $\omega(\boldsymbol{x}_0)=A$. 我们略去了周期轨的稠密性这一要求，因为这点对于所希望的性质似乎并非本质的，也没有可观察性. 至于为何"通有"的系统的周期轨在任一吸引子中是稠密的，其原因可参见附录D.

注 7.2.10 Ruelle 与 Takens 在1971年引入了奇怪吸引子这一相关的概念，参见[**90**]或[**42**]. 这个概念强调了吸引子具有复杂的几何或拓扑方面的表现这一事实.

例 7.2.11(非混沌吸引子) 在例6.5.1、例7.1.9和例7.2.5中，考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-2x^3-y(-x^2+x^4+y^2)\\ \dot{\tau}=1 \quad (\bmod 2\pi).\end{cases}$$

利用检验函数

$$L(x,y,\tau)=\frac{-x^2+x^4+y^2}{2},$$

已经知道集合 $A=L^{-1}(0)$ 是一个对其所有的点具有初始值的敏感依赖性的吸引子，但限制在 A 上并不具有敏感依赖性，故不满足混沌吸引子定义中第三个条件.

不能将该系统的动力行为称为混沌有几个方面的理由. 存在 $\boldsymbol{p}_1(x_1,\ y_1,\ \tau_1)\notin A$，使得

$\omega(\boldsymbol{p}_1)=\boldsymbol{A}$. 但是任给$(x_0, y_0, \tau_0)\in \boldsymbol{A}$，其 ω 极限集是周期轨

$$\gamma = \{(0,0,\tau):0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi\},$$

它并不是 $\boldsymbol{A}$ 的全部. 过 $\boldsymbol{p}_1$ 的轨线在周期轨附近经历了很长时间，接着又靠近同宿连线的一支，其后又在周期轨附近经历更长的时间. 参见图 7.2.2，这是起始于 $\boldsymbol{A}$ 外附近的点，其 x 坐标作为 t 的函数的图像. 在相空间中的轨线和一个坐标对时间的图像并不像是正常意义下的"混沌"，它们看上去大概是周期的，伴随或多或少的固定步数的突变，轨线在周期轨 γ 附近所经历的时间段是逐次增加的. ■

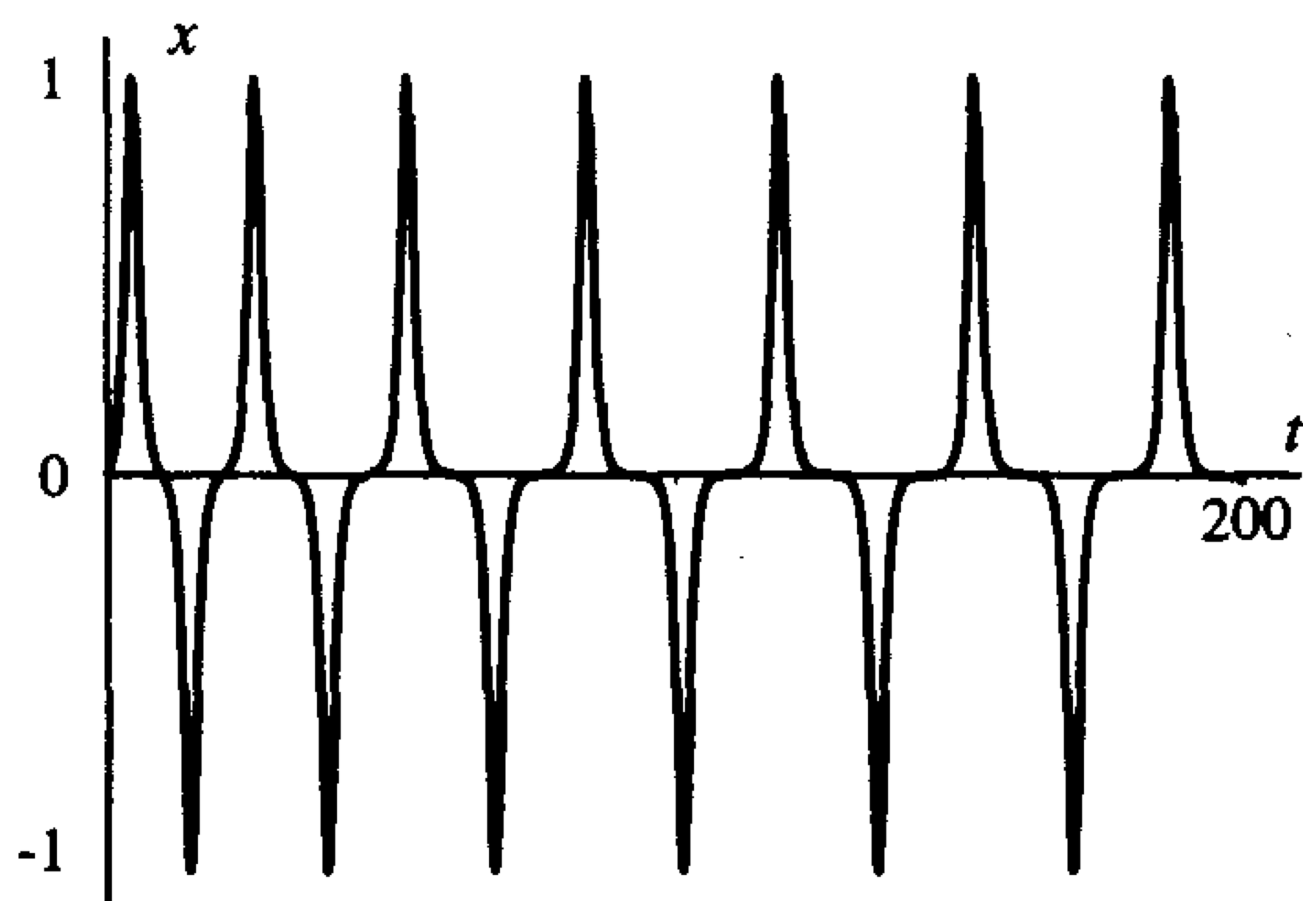


图 7.2.2　例 7.2.11 中对于初始值(0, 0.05, 0)的 x 作为 t 的函数的图像

下面的例题说明了这样的事实：拟周期系统限制在其吸引子上没有对初始值的敏感依赖性.

254

例 7.2.12（拟周期吸引子）　考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = y_1 + x_1(1 - x_1^2 - y_1^2) \\ \dot{y}_1 = -x_1 + y_1(1 - x_1^2 - y_1^2) \\ \dot{x}_2 = \sqrt{2}y_2 + 3x_2(1 - x_2^2 - y_2^2) \\ \dot{y}_2 = -\sqrt{2}x_2 + 3y_2(1 - x_2^2 - y_2^2).\end{cases}$$

引入极坐标 $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$，$\tan\theta_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$，$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$，$\tan\theta_2 = \dfrac{y_2}{x_2}$，则微分方程组化为

$$\begin{cases}\dot{r}_1 = r_1(1 - r_1^2) \\ \dot{\theta}_1 = 1(\operatorname{mod}2\pi) \\ \dot{r}_2 = 3r_2(1 - r_2^2) \\ \dot{\theta}_2 = \sqrt{2}(\operatorname{mod}2\pi).\end{cases}$$

易知集合 $r_1 = 1 = r_2$ 是吸引集. 因为在该集合上的运动是拟周期的，存在一个稠密轨道，且该集合是吸引子. 具有初始值$(\theta_{1,0}^1, \theta_{2,0}^1)$与$(\theta_{1,0}^2, \theta_{2,0}^2)$的两条轨线的角变量满足

$$(\theta_1^1(t),\theta_2^1(t)) = (\theta_{1,0}^1 + t,\theta_{2,0}^1 + t\sqrt{2}) \text{ 与}$$

$$(\theta_1^2(t),\theta_2^2(t)) = (\theta_{1,0}^2 + t,\theta_{2,0}^2 + t\sqrt{2}).$$

因此这两条轨线的距离保持常量，故没有对初始值的敏感依赖性，即

$$\begin{aligned}\|(\theta_1^1(t),\theta_2^1(t)) - (\theta_1^2(t),\theta_2^2(t))\| &= \|(\theta_{1,0}^1 + t,\theta_{2,0}^1 + t\sqrt{2}) - (\theta_{1,0}^2 + t,\theta_{2,0}^2 + t\sqrt{2})\| \\ &= \|(\theta_{1,0}^1 - \theta_{1,0}^2,\theta_{2,0}^1 - \theta_{2,0}^2)\|.\end{aligned}$$

由于系统没有对初始值的敏感依赖性，因此所述集合就不是混沌吸引子. 由于拟周期运动从其表现上不是"混沌"的，对于该例题这种分类是有意义的. ■

255

7.3 洛伦兹系统

7.1 节中引入了洛伦兹微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy.\end{cases} \tag{7.3.1}$$

在 7.8.1 节中，我们讨论洛伦兹对该系统所做发展的某些历史以及该系统如何模拟空气对流与渗漏倾斜的水轮. 本节较系统完整地讨论其混沌性质. 在这里固定 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$，而考虑当 r 变化时系统的动力学行为，这就包含了洛伦兹所研究的 $r=28$ 的情形.

该系统是展示 7.2.2 节所定义的混沌吸引子的很好的例子. 该系统只有线性项和二次项，是含三个变量的确定的系统，因为方程本身及其参数都是给定的，没有外部"随机"的输入. 然而这个确定的系统有着复杂的动力学行为，带有明显的随机行为. 混沌行为至少在两个方面得到显示：第一，单个轨线的图像看起来是随机的(参见图 7.3.1)；第二，如同 7.2.1 节所讨论的那样，它具有对初始值的敏感依赖性(参见图 7.2.1). 具有如此少的非线性项的系统其行为与其线性系统有着如此的差异，这一事实说明即使非线性项很少也足以引起混沌现象.

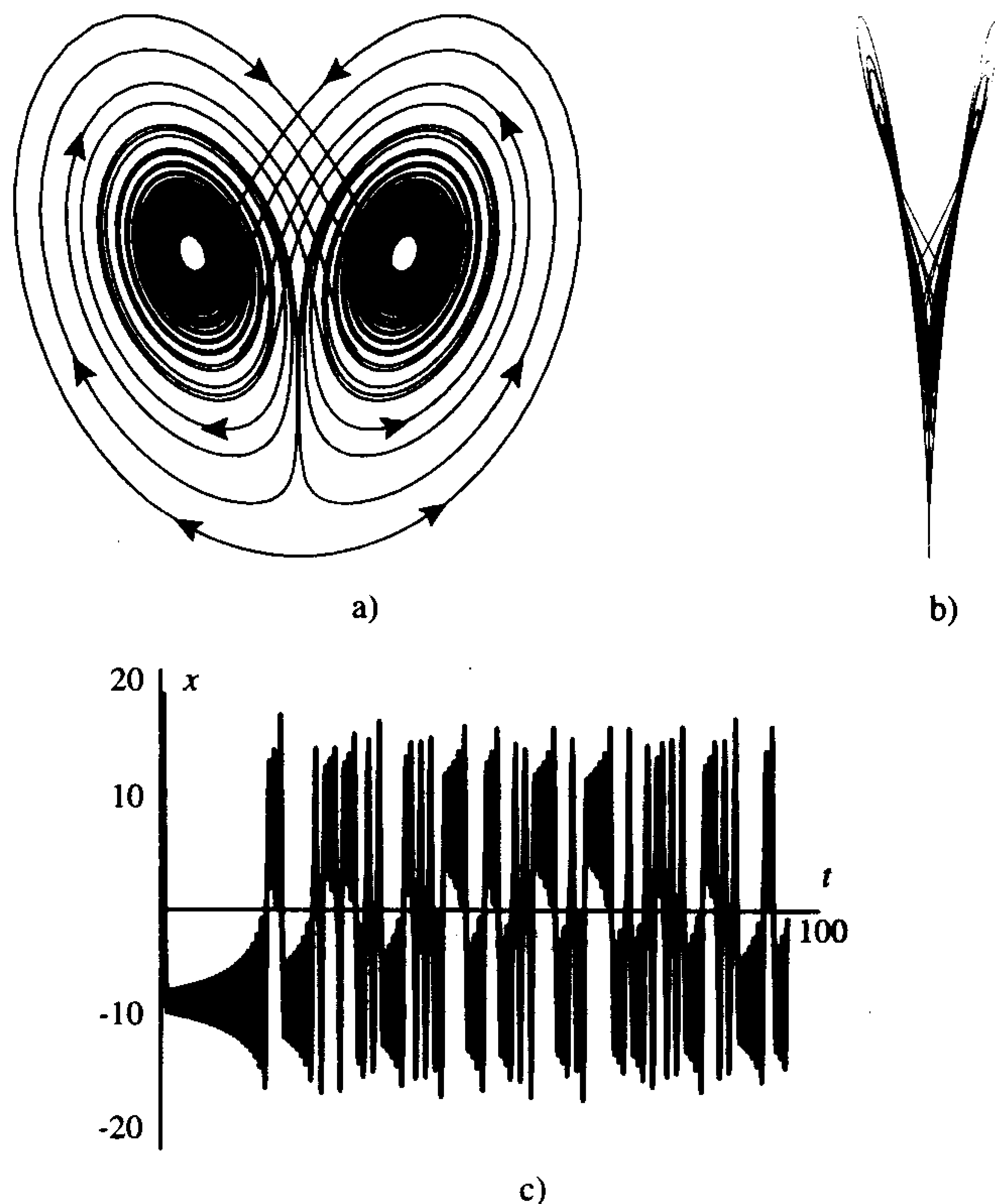


图 7.3.1 对 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$，$r=28$ 的洛伦兹吸引子：从两个视角看相图及 t 的函数 x 的图

7.3.1 洛伦兹方程的不动点

下面分析洛伦兹方程(7.3.1)的不动点，其坐标满足 $y=x$，$x(r-1-z)=0$ 与 $bz=x^2$，于是不动点为

$$\mathbf{0}=(0,0,0),$$
$$\mathbf{P}^{+}=(\sqrt{b(r-1)},\sqrt{b(r-1)},r-1) \quad 与$$
$$\mathbf{P}^{-}=(-\sqrt{b(r-1)},-\sqrt{b(r-1)},r-1).$$

(后面两个不动点需要 $r>1$).

微分方程组的偏导数矩阵为

$$\boldsymbol{DF}_{(x,y,z)}=\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ r-z & -1 & -x\\ y & x & -b\end{bmatrix}.$$

在原点处简化为

$$\boldsymbol{DF}_{0}=\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ r & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{bmatrix}.$$

如 7.1 节所述，在原点的特征方程为

$$(\lambda+b)(\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r))=0,$$

特征值为

$$\lambda_s=-b<0,$$
$$\lambda_{ss}=\frac{-(\sigma+1)-\sqrt{(\sigma+1)^2+4\sigma(r-1)}}{2}<0,$$
$$\lambda_u=\frac{-(\sigma+1)+\sqrt{(\sigma+1)^2+4\sigma(r-1)}}{2}.$$

当 $\lambda>1$ 且 $\sigma>b-1$ 时，有

$$\lambda_{ss}<\lambda_s<0<\lambda_u,$$

其中下标 ss 表示是强稳定的特征值，下标 s 表示是弱稳定的特征值，下标 u 表示是不稳定的特征值.

在 $\mathbf{P}^{+}$ 与 $\mathbf{P}^{-}$ 的特征值相同，因此这里只考虑 $\mathbf{P}^{+}$，在此不动点处 $r-z=1$，于是偏导数矩阵为

$$\begin{bmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ 1 & -1 & -x\\ x & x & -b\end{bmatrix},$$

256～257

其特征方程为

$$p_r(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2(\sigma+b+1)+\lambda(\sigma b+b+x^2)+2\sigma x^2=0, \quad 或$$
$$p_r(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2(\sigma+b+1)+\lambda b(r+\sigma)+2b\sigma(r-1)=0.$$

所有系数均为正值，于是它有一个负实根 λ_1，即特征值中总有一个是负实数(事实上，因为 $p_r(0)>0$，$p_r(\lambda)\to-\infty\ (\lambda\to-\infty)$，从而当 λ 从 0 变向 $-\infty$ 时 $p_r(\lambda)$ 必改变符号，故一定存在 $\lambda<0$，使得 $p_r(\lambda)=0$).

下面讨论当 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$，而 r 变化时 $P^{\pm}$ 的另外两个特征值的变化方式. 在本章的最后，将证明至少当 $r\geqslant4.2446$ 时 $p_r(\lambda)=0$ 的两个特征值是复的，当 $r\geqslant1.35$ 时很有可能已经是这样了. 当 r 接近 1 时，特征值当然都是实的. 于是在 $r=1$ 与 $r=4.3$ 之间某处特征值从全为实的变化到一个实的和两个复的，对以后的 r，复特征值总存在.

对于较小的 r，复特征值的实部为负的. 可能解出参数值使特征值是纯虚数，这可通过将 $\lambda=\mathrm{i}\omega$ 代入 $p_r(\lambda)=0$，并令 $p_r(\mathrm{i}\omega)$ 的实部和虚部等于零来实现. 简要步骤如下：$\lambda=\mathrm{i}\omega$，$\lambda^2=-\omega^2$，$\lambda^3=-\mathrm{i}\omega^3$，则

$$\begin{aligned}0&=-\mathrm{i}\omega^3-\omega^2(\sigma+b+1)+\mathrm{i}\omega b(r+\sigma)+2b\sigma(r-1)\\&=\mathrm{i}\omega(-\omega^2+b(r+\sigma))-\omega^2(\sigma+b+1)+2b\sigma(r-1).\end{aligned}$$

令实部和虚部等于零，得

$$\begin{aligned}\omega^2=b(r+\sigma)&=\frac{2b\sigma(r-1)}{\sigma+b+1}\\(r+\sigma)(\sigma+b+1)&=2\sigma(r-1)\\\sigma(\sigma+b+3)&=r(\sigma-b-1)\quad\text{或}\\r_1&=\frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}.\end{aligned}$$

当 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$时，有

$$r_1=\frac{470}{19}\approx24.74.$$

在此参数值，由负特征值引起系统的轨线向某一个曲面⊖收缩. 已证在这个曲面上，存在一个不稳定周期轨(位于该曲面上)的亚临界分支，还存在一个收缩方向，因此在三维空间中存在一个鞍型周期轨. 当 r 从 r_1 增加时，不动点由稳定变为不稳定，因此当 $r<r_1$ 时存在鞍型周期轨.

当 r 变化时，除了安德罗诺夫-霍普夫分支外，还存在同宿分支. 当 r 充分小时，原点的不稳定流形位于其稳定流形的同侧，且以螺旋式进入不动点 $P^{\pm}$(参见图 7.3.2a)；当 $r=r_0\approx13.926$ 时，不稳定流形是直接回到原点的同宿轨(参见图 7.3.2b)；当 $r>r_0$ 时，不稳定流形已穿越到稳定流形的另一侧(参见图 7.3.2c). 于是必存在同宿分支值 $r=r_0$. 当 $r=r_0$ 时，强收缩 $\lambda_{ss}\ll1$ 使得解朝着含有同宿连线的某曲面收缩. 由于 $\lambda_u+\lambda_s>0$，当 $r>r_0$ 时同宿轨分支产生一不稳定周期轨，且位于该曲面上. 数值研究表明这个周期轨一直都存在，直到$r=r_1$时消失于不动点 $P^{\pm}$ 处的亚临界安德罗诺夫-霍普夫分支. 更多细节参见 Sparrow[**101**].

258

⊖ 即中心流形. ——译者注

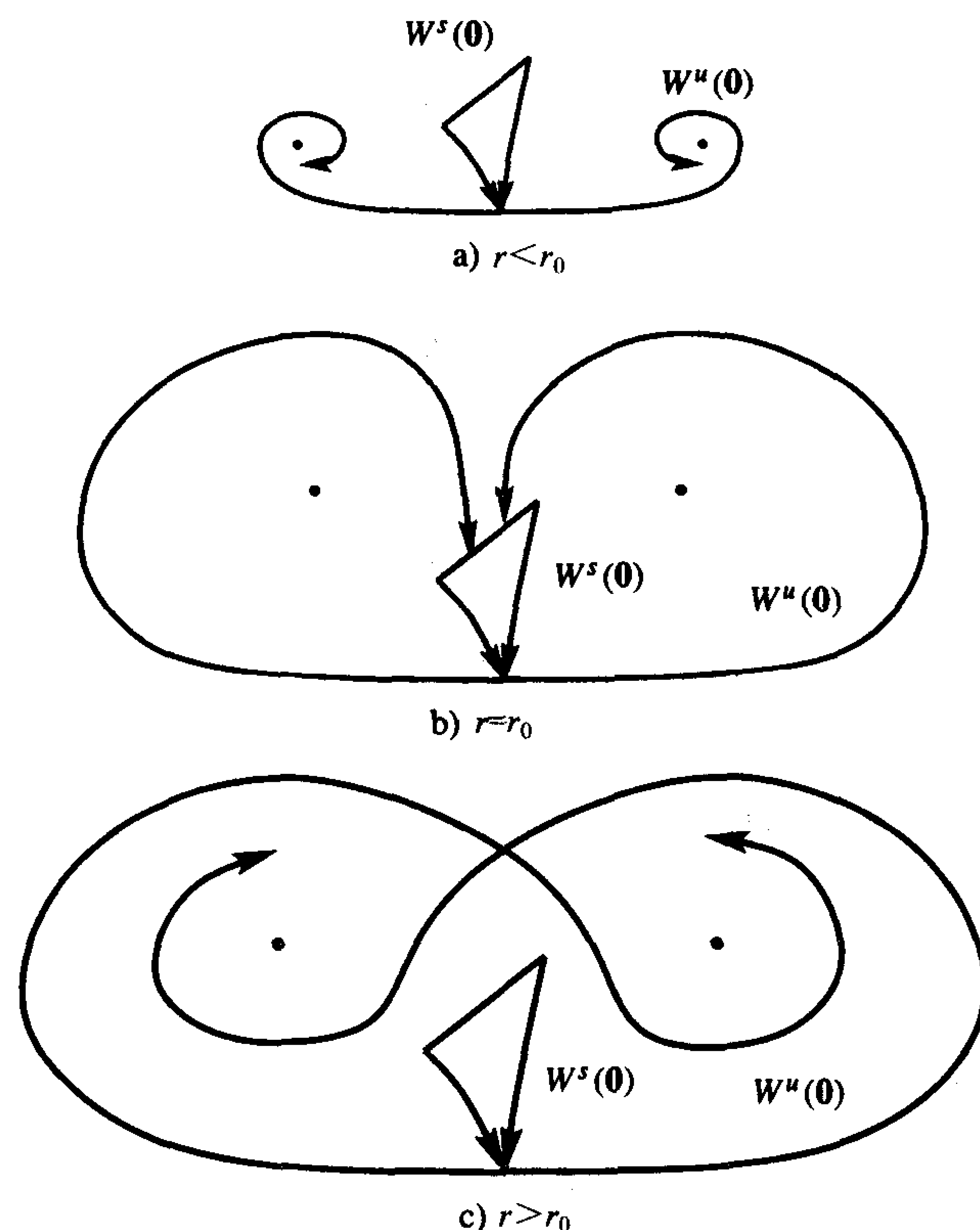


图 7.3.2　原点的不稳定流形

表 7.3.1 概括了当 $\sigma=10$，$b=\frac{8}{3}$，r 为可变参数时洛伦兹系统的不动点处的特征值和分支情况等信息.

表 7.3.1　洛伦兹系统的分支

$r<1$	原点不稳定，有两个负的特征值(两个吸引方向)和一个正的特征值(一个排斥方向)
$1<r<r_1\approx24.74$	奇点 $P^\pm$ 稳定，当 $r>1.35$ 时有一个负的特征值和两个具负实部的复特征值
$13.926\approx r_0=r$	存在一个周期轨的同宿轨分支，这个周期轨连续变化直到 $r=r_1$ 时出现亚临界安德罗诺夫—霍普夫分支
$24.74\approx r_1=r$	存在亚临界安德罗诺夫-霍普夫分支，周期轨连续出现，直到 $r=r_0$ 时出现同宿轨
$24.74\approx r_1<r$	奇点 $P^\pm$ 不稳定，有一个负的特征值和两个具正实部的复特征值
$r=28$	存在混沌吸引子

在 7.1 节、7.6 节、7.3.2 节中讨论了洛伦兹系统当 $r=28$ 时有混沌吸引子的事实，在这些章节中还给出了必要的定义，以准确理解这个概念.

7.3.2　洛伦兹方程的庞加莱映射

洛伦兹系统的扩张引起相近的轨线走向分离，这种现象发生并使体积递减，其原因是在原点处的不动点将轨线分开，且像两根细长条返回，并在相互的顶部堆积. 对于洛伦兹系统的多

数分析都使用了庞加莱映射，本节就来讨论这一映射.

通过沿着一条轨线逐次寻求 z 坐标的最大值 z_n，洛伦兹建立了一种方法，用来阐述吸引集中的轨线是发散的，他注意到若用 z_n 来表示最大值 z_{n+1}，并做出相应的图，结果是其函数图有一极窄的宽度(参见图 7.3.3). 函数 $h(z_n)$在每一边的单侧导数绝对值都大于 1，于是若 z_n，z'_n 在同侧，则有 $|h(z_n)-h(z'_n)| = |h(\zeta)||z_n-z'_n| > |z_n-z'_n|$（其中 ζ 介于 z_n 与 z'_n 之间）. 这个结论可用于证明系统对初始值的敏感依赖性，只要一维映射 h 能被调节.

不使用洛伦兹的近似法，而用庞加莱映射继续讨论. 要证明涉及庞加莱映射的实际结果是困难的，但是最近 Warwick Tucker 已发表了这些结果的计算机辅助证明，他利用计算机计算庞加莱映射，所做估计验证了其分析对实际方程是有效的. 对其思想此处不想展开讨论，而是把观测的性态与由 Guckenheimer 引入的洛伦兹方程的几何模型联系起来. 该几何模型又被 Guckenheimer 与 Williams 进一步研究过，参见文献[**41**]与[**43**].

几何模型的思想是取从 $z=z_0$ 到其自身的庞加莱映射，仅考虑不动点 $\boldsymbol{P}^+$ 与 $\boldsymbol{P}^-$ 之间的交点. 在图 7.3.4 中，显示的是一条轨线的返回点的数值图.

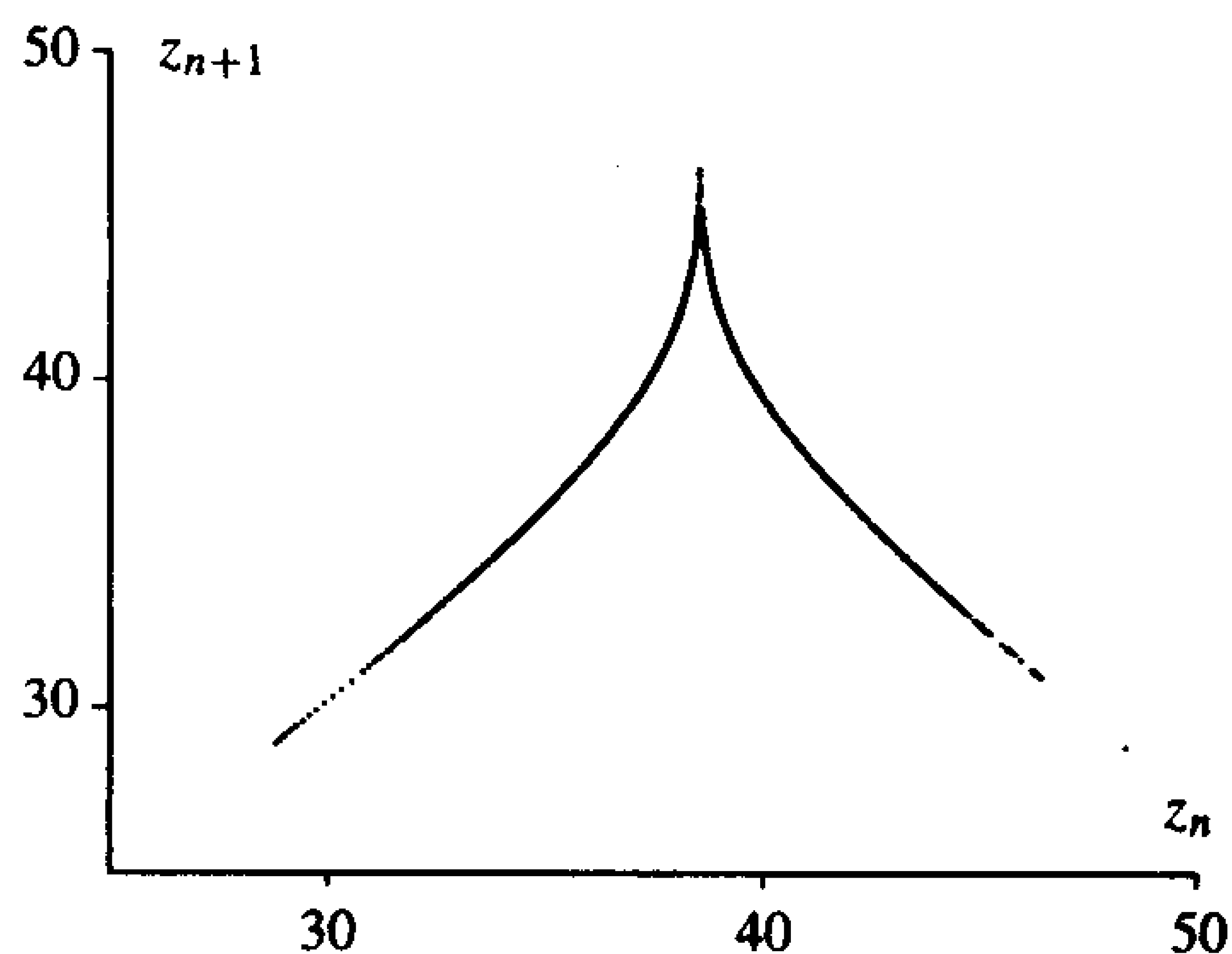


图 7.3.3　z_{n+1}对 z_n 的曲线图

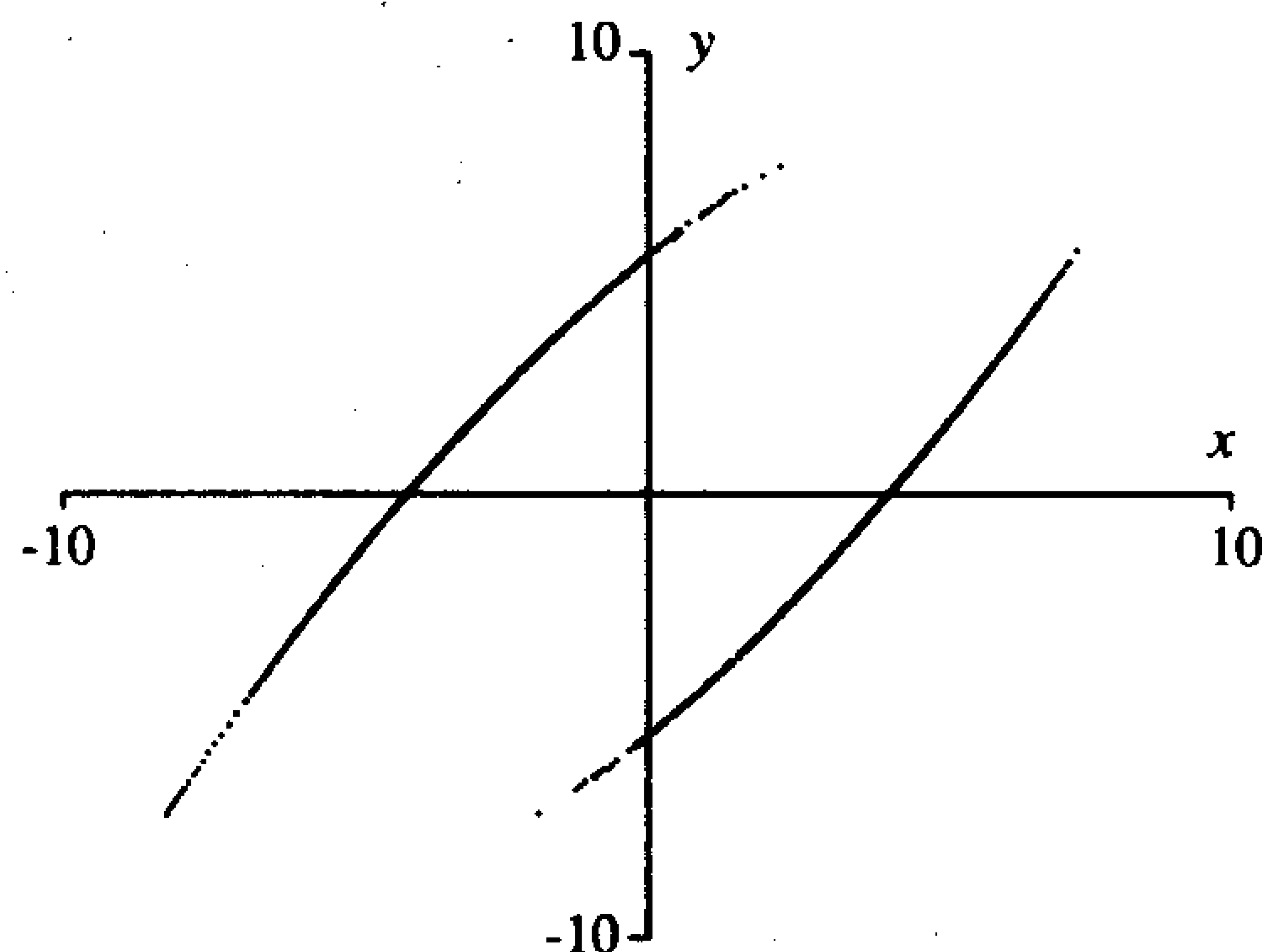


图 7.3.4　某点在二维庞加莱映射 P 下的轨线图

洛伦兹系统在原点附近的性态是近似线性的，于是用下述方程作为逼近：

$$\begin{cases}\dot{u} = au\\ \dot{v} = -cv\\ \dot{z} = -bz,\end{cases}$$

其中 $a=\lambda_u\approx 11.83$，$c=-\lambda_{ss}\approx 22.83$，$b=-\lambda_s\approx 8/3$，变量 u 在扩张方向，v 在收缩方向，对于 a，b，c，有 $0<b<a<c$，$0<\dfrac{b}{a}<1$，$\dfrac{c}{a}>1$. 考虑由$\{z=z_0\}$到$\{u=\pm u_1\}$的流，限制横截为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{(u,v,z_0):|u|,|v|\leqslant \alpha\},$$

定义

$$\Sigma_1 = \{(\pm u_1,v,z)\,|v|,|z|\leqslant \beta\}.$$

取 α 为 $W^u(\mathbf{0})$在 $\boldsymbol{P}^+$ 与 $\boldsymbol{P}^-$ 之间首次穿过 $z=z_0$ 时的 u 值. 这样，α 是足够小，使得截面在两个不动点 $\boldsymbol{P}^+$ 与 $\boldsymbol{P}^-$ 之间. 在 $\boldsymbol{\Sigma}\cap W^s(\mathbf{0})$上的点直接趋于原点，从不到达 Σ_1. 于是我们必须考察

$$\Sigma' = \Sigma \setminus \{(u,v,z_0): u \neq 0\} = \Sigma^+ \cup \Sigma^-,$$

其中在 Σ^+ 上 $u>0$，在 Σ^- 上 $u<0$.

线性化方程的解为 $u(t)=e^{at}u(0)$，$v(t)=e^{-ct}v(0)$，$z(t)=e^{-bt}z(0)$，取初始值 $(u,v,z_0)\in\Sigma'(u\neq0)$，沿着它直到到达 Σ_1. 用 $u>0$ 或者 Σ^+ 中的一点以便简化记法. 到达 Σ_1 的时间 τ 为

259～261

$$e^{a\tau}u = u_1$$
$$e^{\tau} = \left(\frac{u_1}{u}\right)^{1/a}.$$

则

$$v(\tau) = (e^{\tau})^{-c}v = \left(\frac{u_1}{u}\right)^{-c/a}v = \frac{u^{c/a}v}{u_1^{c/a}},$$

$$z(\tau) = (e^{\tau})^{-b}z_0 = \frac{z_0u^{b/a}}{u_1^{b/a}}.$$

故庞加莱映射 $P_1:\Sigma'\to\Sigma_1$ 为

$$P_1(u,v) = (z(\tau),v(\tau)) = (z_0u_1^{-b/a}|u|^{b/a}, u_1^{-c/a}|u|^{c/a}v).$$

Σ'的图像分成两片：$P_1(\Sigma^+)=\Sigma_1^+$ 与 $P_1(\Sigma^-)=\Sigma_1^-$，参见图 7.3.5.

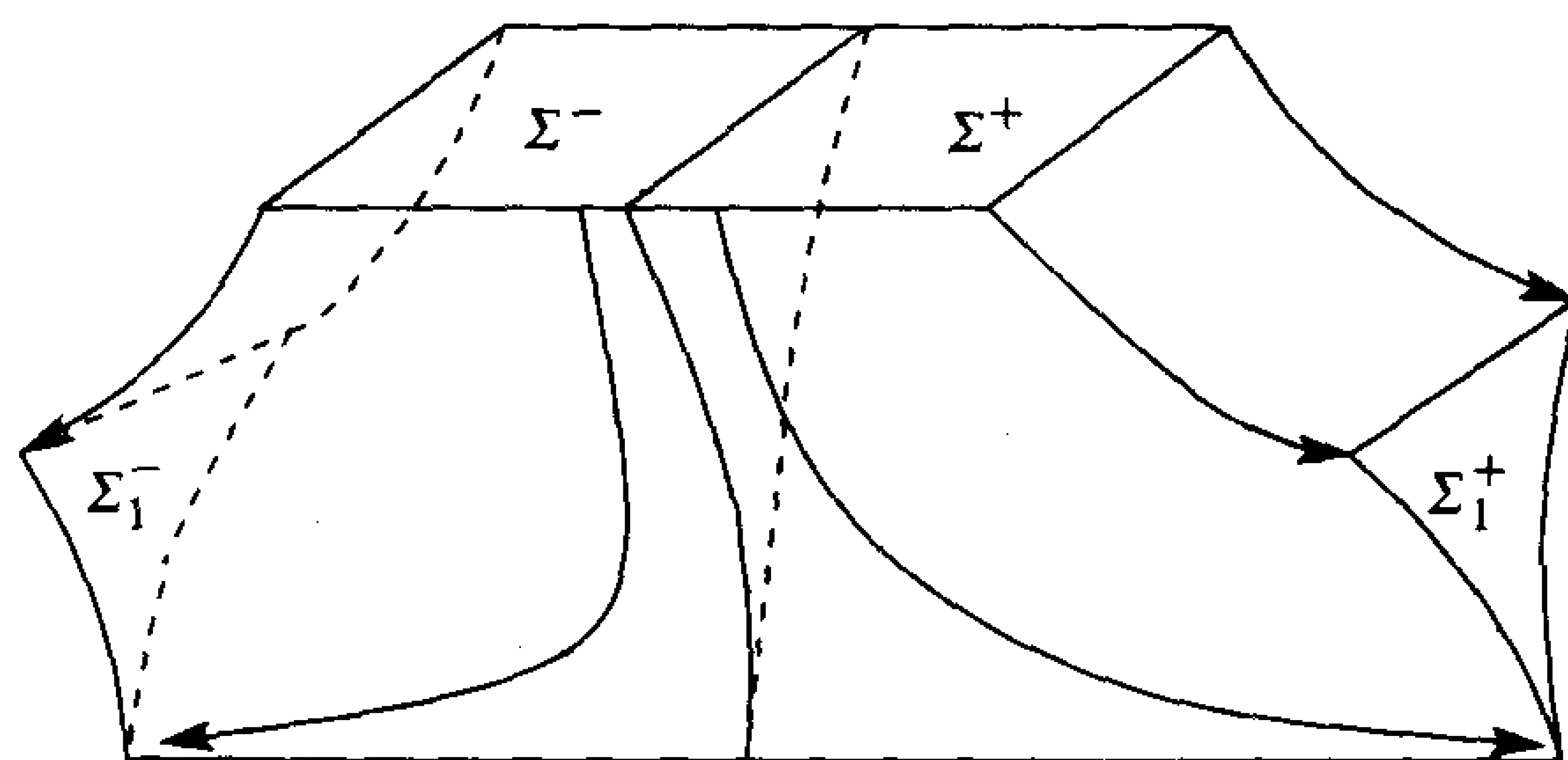


图 7.3.5　过原点近旁的 Σ 的流

由 Σ_1 回到 Σ 的映射 P_2 经历了有限长时间，当然是可微的. 对于一个实际方程，要控制它是困难的，只能通过计算机辅助证明来完成. 几何模型采取了简化的假设，即流把 Σ_1^+ 中的$(u_1, z(\tau), v(\tau))$映到$(u,v,z)=(-\alpha+z(\tau), v(\tau), z_0)$. 最重要的就是 P_2 把水平线(u_1, v, z_1)映回到 Σ 中具有相同 u 值的直线，也就是说，新 u 值仅与 z 有关而与 v 无关. 类似地可定义当 $u<0$ 时的庞加莱映射，注意此时 u 坐标是 $\alpha-u_1^{-b/a}z_0|u|^{\frac{b}{a}}$. 因此得到几何模型的庞加莱映射 $P=P_2\circ P_1$ 如下：

$$P(u,v) = (f(u),g(u,v)) = \begin{cases} (-\alpha+z_0u_1^{-b/a}u^{b/a}, u_1^{-c/a}u^{c/a}v) & u>0 \\ (\alpha-z_0u_1^{-b/a}|u|^{b/a}, u_1^{-c/a}|u|^{c/a}v) & u<0. \end{cases}$$

注意到第一个坐标函数仅与 u 有关而与 v 无关，第二个坐标函数关于 v 是线性的. 在映射 P 下 Σ'的图像如图 7.3.6 所示，可将它与图 7.3.4(此处，楔形是非常非常薄的)的数值计算映射进行比较.

第一个坐标函数的导数为

262

$$f'(u) = z_0 u_1^{-b/a} |u|^{-1+b/a}$$

(其中 u 可正可负). 由于 $\frac{b}{a} < 1$, 则指数为负, 故当 u 充分小时有 $f'(u) > 1$. 因此返回映射在 u 方向上是扩张的. 第二个坐标函数的偏导数为

$$\frac{\partial g}{\partial v} = u_1^{-c/a} |u|^{c/a} < 1 \quad (|u| < u_1).$$

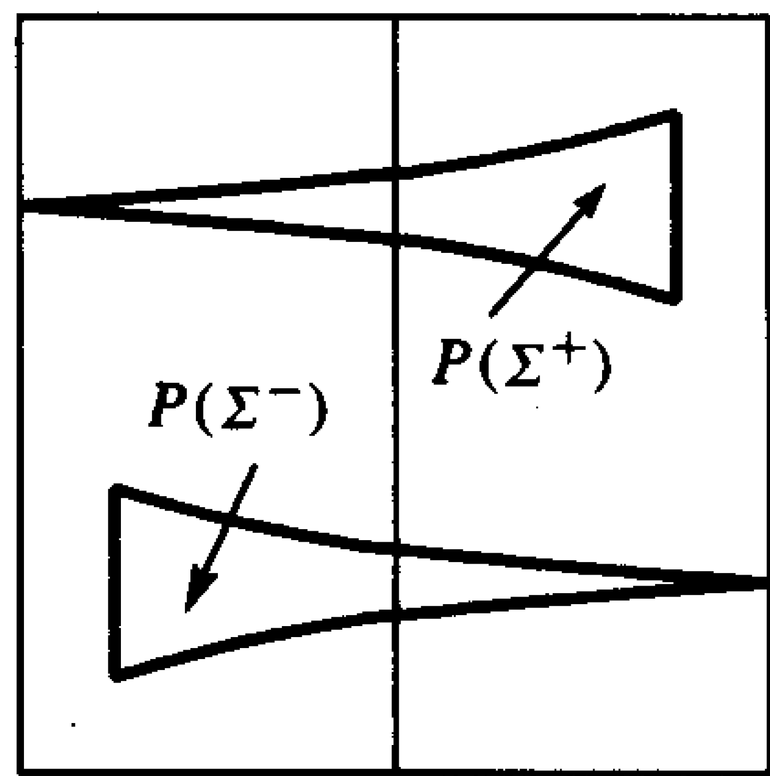


图 7.3.6 庞加莱映射下 Σ′的图像

所以庞加莱映射在这个方向上是(强)收缩的: 即对于定点 u_0, 有

$$|g(u_0, v_1) - g(u_0, v_2)| < |v_1 - v_2|.$$

在 v 方向上的收缩性与第一个坐标仅依赖于 u 的事实, 这些保证约简到从 u 到 $f(u)$ 的一维映射, 映射 f 的图像参见图 7.3.7.

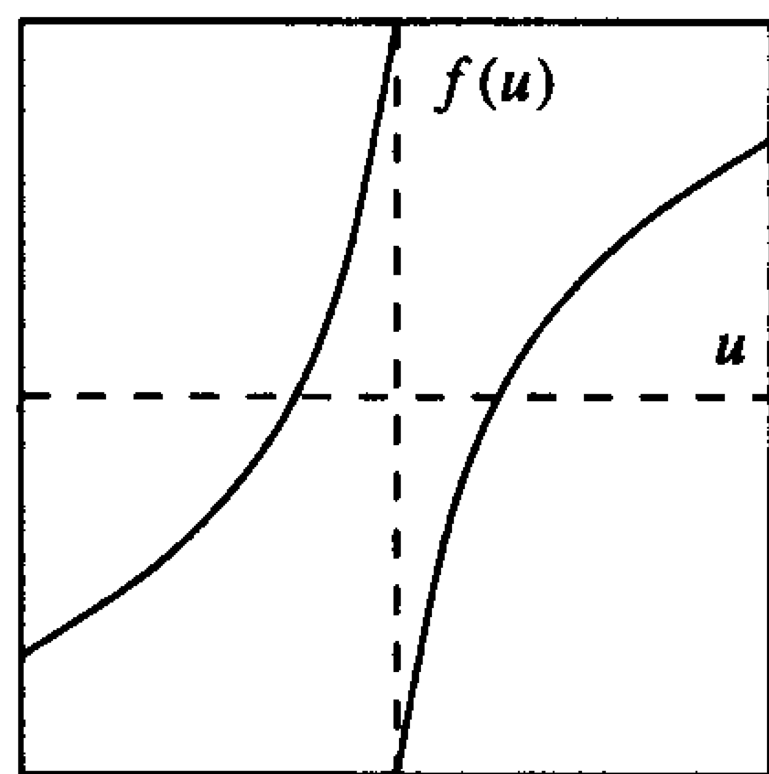


图 7.3.7 f 的图像

事实上, 在 v 方向上的收缩性是非常强的, 以至于在吸引集中的轨线几乎位于一个曲面上. R. Williams 给出一种方法: 将这个方向投影出来, 且诱导出一个定义在二维分支流形上的流, 流形的两片在一支直线 s 上衔接起来(参见图 7.3.8). 一维映射 f 是在分支流形上直线段 s 上的返回映射, 注意到原点的不稳定流形第一次返回到 s 的端点, 第二次返回到 s 的内部.

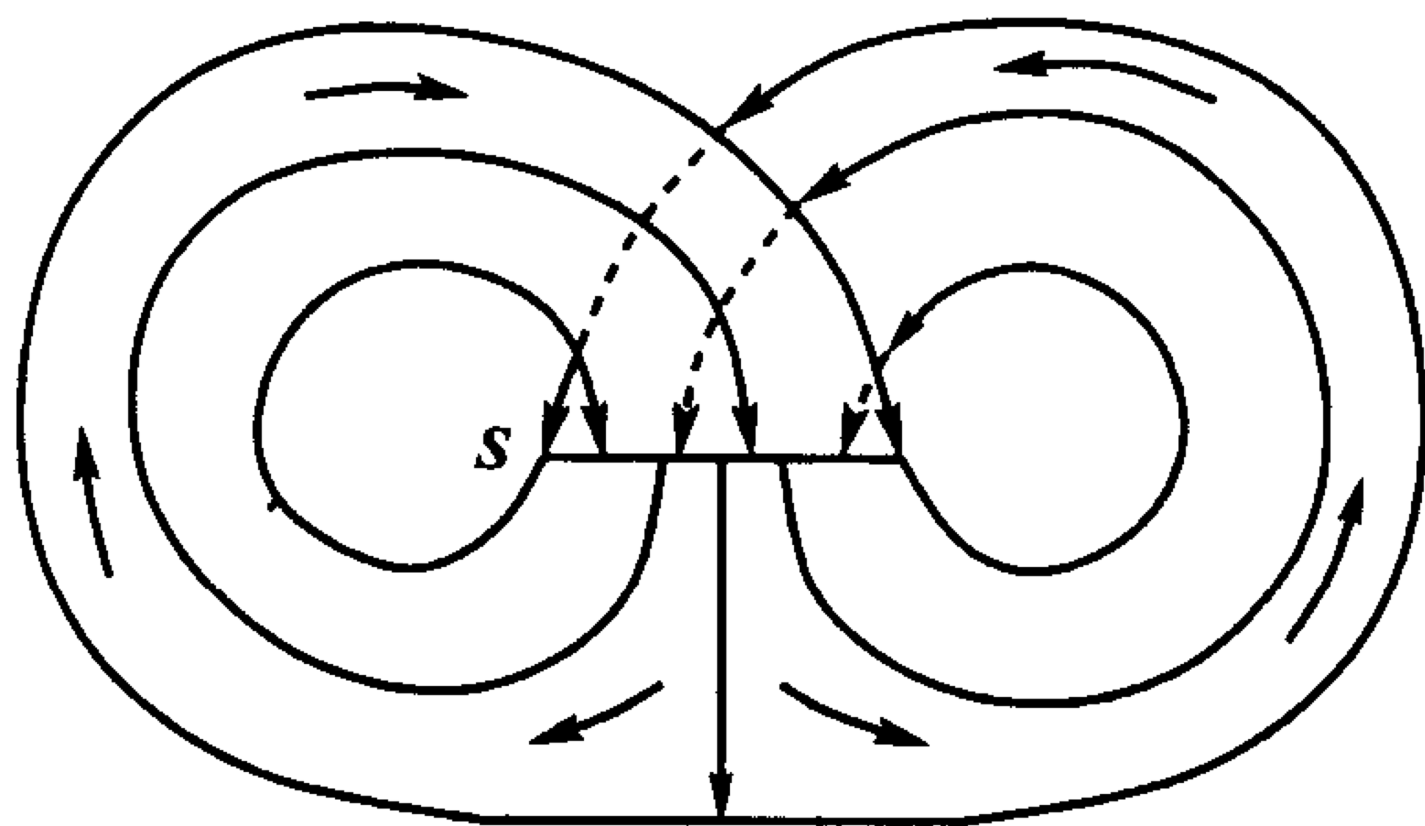


图 7.3.8 分支流形上的流

为弄清 f 的性质, 我们举一个两侧都是线性的例子. 取 $1 < a \leq 2$, 令

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 + ax & -1 \leq x < 0 \\ -1 + ax & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

是定义在 $[-1, 1]$ 上的函数. 当 $a < 2$ 时, 有 $f_a(-1) = 1 - a > -1$, $f_a([-1, 0)) = [1 - a, 1] \neq [-1, 1]$; 类似地, $f_a([0, 1]) = [-1, -1 + a] \neq [-1, 1]$. 因此, 洛伦兹映射 f(的值)未能遮盖这两侧, 但是当 $a = 2$ 时, $f_2([-1, 0)) = [-1, 1)$ 与 $f_2([0, 1]) = [-1, 1]$, 故 f_2 在 $[-1, 0)$ 的值及在 $[0, 1]$ 都遮盖了这两侧. 为了解释为什么洛伦兹方程具有对初始值的敏感依赖性, 我们改变一下 f_2 的形式, 尽管已经作了相当强的简化.

事实上，不考虑定义在$[-1, 1]$的f_2，而考虑定义在$[0, 1]$上的双倍映射 D：

$$D(y)=2y \pmod 1 = \begin{cases} 2y & 0 \leqslant y < 0.5 \\ 2y-1 & 0.5 \leqslant y < 1 \\ 0 & y = 1. \end{cases}$$

双倍映射 D 可由映射f_2 作线性变换 $x=-1+2y$ 得到. 注意到 $y=0$ 对应 $x=-1$，$y=0.5$ 对应 $x=0$，$y=1$ 对应 $x=1$. 若 $x_1=f_2(x)$，$y_1=D(y)$，则当 $0 \leqslant x < 1$ 时，有

$$\begin{aligned} 2y_1 &= x_1+1 = f_2(x) \\ &= 2x-1 = 2(2y-1), \quad \text{或} \\ y &= 2y-1 = 2y \pmod 1. \end{aligned}$$

当 $x<0$ 时可类似计算. 这样，映射f_2 在 y 坐标下就是双倍映射 D(在 $x=1$ 与 $y=1$ 的定义略微不同).

区间$[0, 0.5)$与$[0.5, 1)$在映射 D 下的像遮盖了$[0, 1)$，即

$$D([0,0.5)) = [0,1) \quad \text{与} \quad D([0.5,1]) = [0,1],$$

而洛伦兹映射f在端点处留下很小的间隙，$f(1)<1$ 且 $f(-1)>-1$. 另外 D 的不连续点是 0.5 而不是f_a 的不连续点 0.

我们在 10.2 节中利用数的二进制展开分析双倍映射 D，证明了它具有对初始值的敏感依赖性.

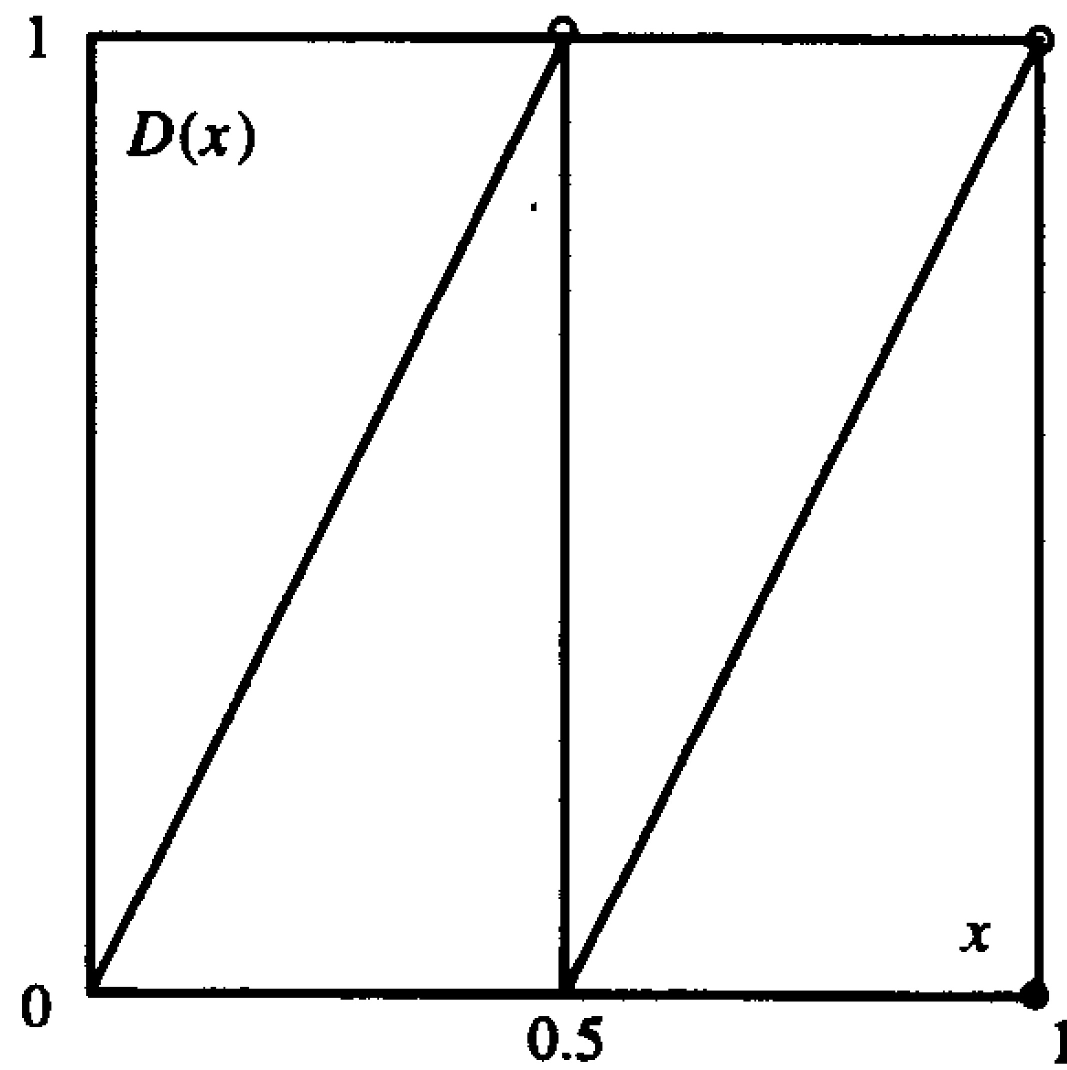


图 7.3.9　双倍映射

263 ~ 264

定理 7.3.1　(a)双倍映射 D 具有对初始值的敏感依赖性. 事实上，任意两个相异点的轨道至少有 0.25 间隙的距离. (b)存在点 z^*，使得 $\omega(z^*)=[0, 1]$. (参见图 7.3.9.)

更详细的内容参见 10.2 节与 10.4 节的定理 10.2.6 与定理 10.4.4 的证明.

下述定理是 Williams 给出的，它适用于与洛伦兹方程的一维映射同类的一维映射，其证明见定理 11.2.15.

定理 7.3.2　假设 $a<c<b$，f 为定义在$[a, c)$与$(c, b]$上的函数，并取值于$[a, b]$，满足下述条件：

(i)映射f在$[a, c)\cup(c, b]$上可微，且$f'(x) \geqslant \lambda > \sqrt{2}$.

(ii)点 c 是唯一的不连续点，且 $f(c-0)=b$，$f(c+0)=a$.

(iii)在端点处的前两次迭代在不连续点 c 的同侧，即

$$b \geqslant f(b) \geqslant f^2(b) > c \quad \text{与}$$
$$a \leqslant f(a) \leqslant f^2(a) < c.$$

则下列结论成立：

(a)映射f在$[a, b]$所有点处具有对初始值的敏感依赖性.

(b)对于具有正长度的子区间 $J\subset[a, b]$，存在一个 n 迭代，使得$f^n(J)=(a, b)$.

(c)存在点 x^*，其前行轨线在$[a, b]$中是稠密的.

前面提到，Warwick Tucker 已证明了一个实际的洛伦兹系统具有吸引子这一性质，计算机辅助证明也已使“洛伦兹吸引子”名副其实.

7.4　Rössler 吸引子

对于洛伦兹系统来说，存在一个涌向近乎曲面的吸引集的强收缩，有一个方向在穿过流动方向时被延伸或扩张，然后被剖分成两部分，这是因为轨线流向原点的稳定流形的不同侧，最后这曲面的两片相互在顶部堆积，其总体效应就产生了混沌吸引子，它具有对初始值的敏感依赖性，且有稠密于这个吸引子的轨线.

265

除了用不动点做剖分外，使两组轨线互相聚的更常用的方法是把其自身顶部的区域进行折叠(在 13.1 节中讨论的斯梅尔马蹄映射就是这种情形之一，对其折叠已进行详尽的分析，尽管它不是吸引子). 于是，延伸、折叠和置回自身顶部就可以产生吸引集，而且是混沌与不可分解的吸引子，即混沌吸引子. 本节作为具有这一性质的微分方程组的简例而给出的方程组原是 Rössler 所研究的，数值模拟结果也显示出该例存在混沌吸引子.

Rössler 微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c). \end{cases}$$

取 $a = b = 0.2$，$c = 5.7$，数值解显示该系统延伸又折叠，因此导致混沌吸引子.

若令 $z = 0$，则 (x, y) 方程成为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + ay. \end{cases}$$

这个限制系统原点处的特征值为

$$\lambda^{\pm} = \frac{a \pm \mathrm{i}\sqrt{4 - a^2}}{2},$$

其实部为正，有解螺旋向外. 在三维系统中，只要 $x - c < 0$，就有解停留在平面 $z = 0$ 附近并螺旋向外(实际上，它停留在 $z = b/(c - x)$ 附近，其中 $\dot{z} = 0$)；当 $x - c$ 变正时，z 增加，则对于较大的 z，x 减少，变得小于 c 了，这又使 z 减少. 为了弄清楚整个吸引集，取截线 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$，$y = 0$，$z = 0$，跟踪围绕 z 轴一周的轨线，直到回到 $y = 0$. 由于在轨道带外的轨道升起，且又回到轨道带的内部，而在轨道带内的轨道仅仅轻微旋出，故系统的流在 z 轴附近运行的结果就是一个折叠，所有的轨线近似返回到 $z \approx 0$ 处，内部与外部轨线返回时具有最小的 x 值，中间的轨线返回时具有最大的 x 值(参见图 7.4.1).

从理论上完整分析这个系统是极其困难的或者说是不可能的，但是它的返回映射类似于具有敏感依赖性的帐篷映射：

$$T(x) = T_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ 2 - 2x & 0.5 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

(参见图 7.4.2.) 可证该帐篷映射具有敏感依赖性和传递性.

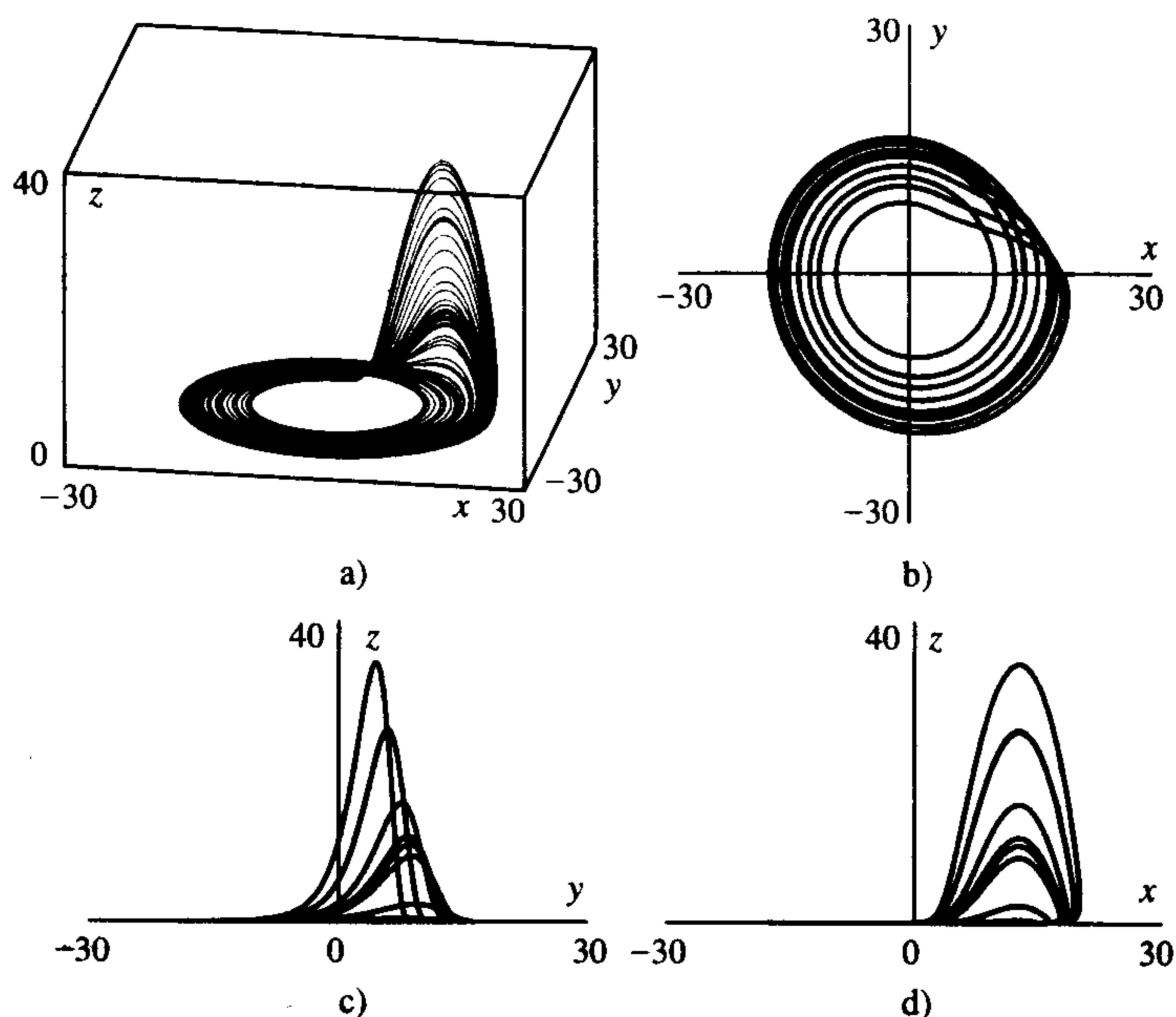


图 7.4.1　当 $a=0.1$，$b=0.1$，$c=14$ 时的 Rössler 吸引子

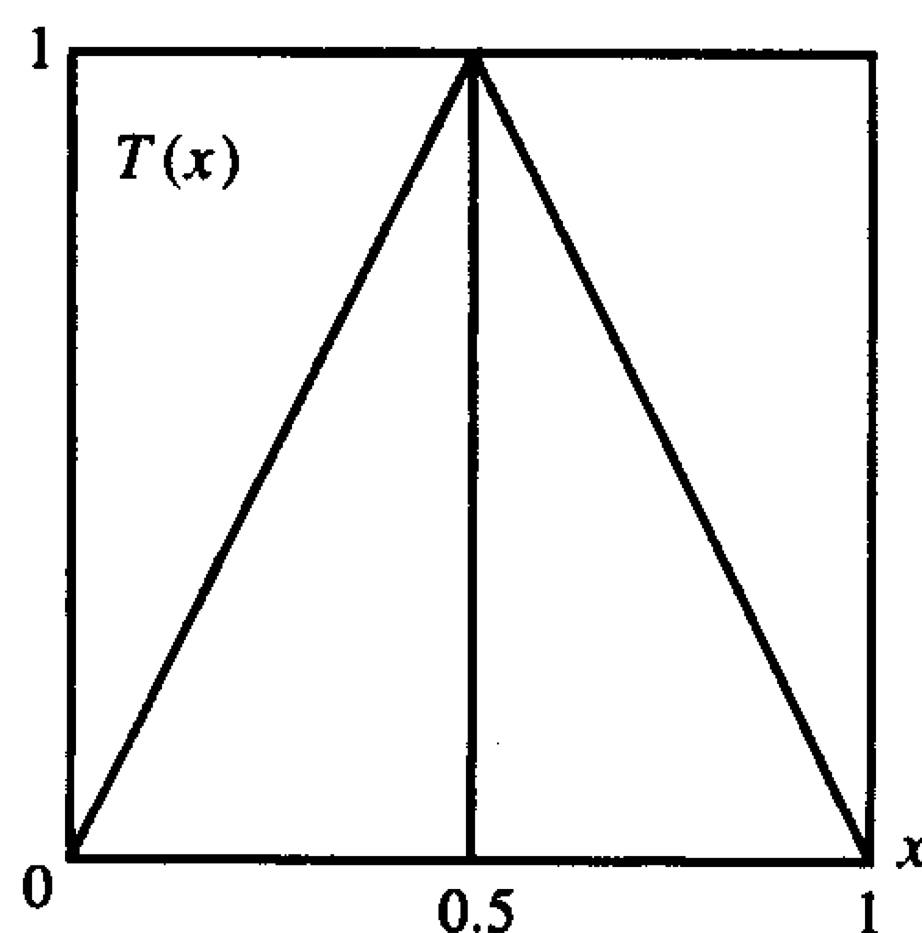


图 7.4.2　帐篷映射

定理 7.4.1　(a)帐篷映射具有对初始值的敏感依赖性．(b)帐篷映射存在满足 $\omega(z^*)=[0,\ 1]$的点 z^*．(参见图 7.4.2.)

证明　(a)对初始值 x_0，记 $x_j=T^j(x_0)$是帐篷映射的第 j 次迭代．若 $x_j\in[0,\ 0.5)$，则令$s_j=0$；若 $x_j\in[0.5,\ 1]$，则令 $s_j=1$，这样定义了一串 0 和 1：$s_0s_1s_2\cdots$，将每个串视为一点，则子区间

$$I_0 = [0,0.5)$$

等于满足 $s_0=0$ 的点的集合，而子区间

$$I_1 = [0.5,1]$$

等于满足 $s_0=1$ 的点的集合；则

$$I_{00} = [0,0.25)$$

等于满足 $s_0=0$ 且 $s_1=0$ 的点的集合；子区间

$$I_{01} = [0.25,0.5)$$

等于满足 $s_0=0$ 且 $s_1=1$ 的点集；

$$I_{11} = [0.5,0.75]$$

等于满足 $s_0=1$，$s_1=1$ 的点的集合；

$$I_{11} = (0.75,1]$$

等于满足 $s_0=1$，$s_1=0$ 的点集．一直继续下去，可令

$$I_{s_0s_1\cdots s_{n-1}} = \{x_0 : T^j(x_0) \in I_{s_j}, 0 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

其长度 $\lambda(I_{s_0s_1\cdots s_{n-1}})=\frac{1}{2^n}\to 0(n\to\infty)$. 另一方面，$T^n$ 将 $I_{s_0s_1\cdots s_{n-1}}$ 的两个端点映射为 0 和 1，若 x 为 $I_{s_0s_1\cdots s_{n-1}}$ 中任一点，则它是在两端点的 $\frac{1}{2^n}$ 的范围内，但是 $T^n(x)$ 到 0 与 1 必须至少有 0.5 的距

266 ~ 267

离，而 0 与 1 是两端点在 T^n 下的像. 因此，映射 T 具有对于初始值的敏感依赖性. Rössler 系统的一维线性映射比较复杂，但也具有对于初始值的敏感依赖性.

结论(b)的证明放在练习题中. ■

康托尔集与吸引子

Rössler 吸引子的庞加莱映射在吸引子内部延伸，收缩于吸引子，进而在其自身内部收缩域折叠，结果是一个细带被两个更细的细带所代替. 若重复这个过程，这两个细带被挤压延伸之后又被折叠成四个小细带，这些细带在折叠点处与吸引子相连. 吸引子中有点会离开折叠点，我们就集中在这些点上，且仅考查收缩方向，这样，下面作为理想化的情形，来设法弄清一个简化模型.

洛伦兹系统的情形是类似的，只不过叶层是被剖分而非折叠. 在图 7.3.4 中，叶层非常薄以至于叶层之间的间隙是看不到的. 然而，该系统在出现吸引子方向也有“康托尔集”的结构.

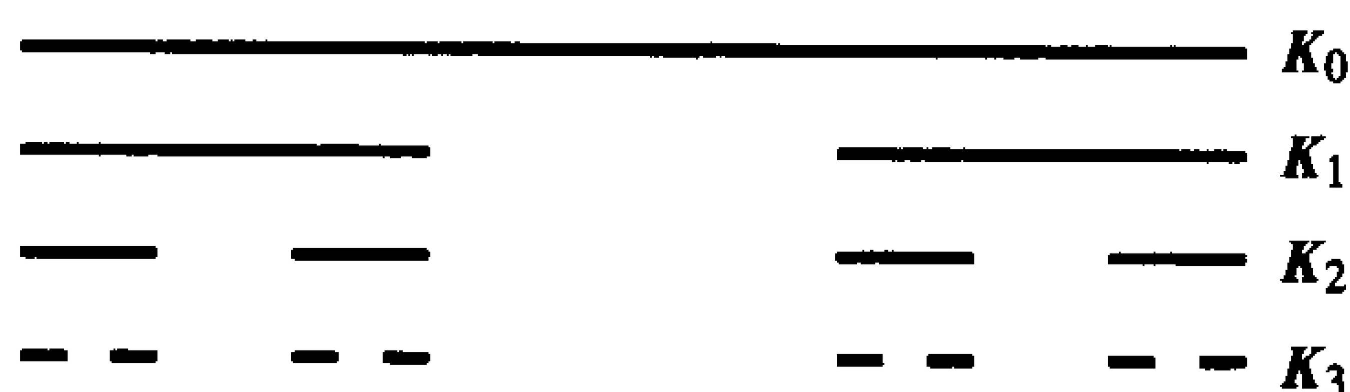


图 7.4.3 康托尔集中的集 $\boldsymbol{K}_0$, …, $\boldsymbol{K}_3$

吸引子在收缩方向的这种“似康托尔”结构正是混沌吸引子拓扑本质部分，Ruelle 和 Takens 正是认识到这一点才把它叫作奇怪吸引子.

在 10.5 节我们利用数的三进制展式引入康托尔集. 康托尔三分集 $\boldsymbol{K}$ 是[0, 1]中仅用 0 与 2 来表示的点所组成的，它是集合 $\boldsymbol{K}_n$ 的交集. 图 7.4.3 给出了 $0\leqslant n\leqslant 3$ 的集合 $\boldsymbol{K}_n$. 康托尔集是有界不可数闭集，且其内部是空集.

7.5 强迫振荡

要得到混沌吸引子，方法之一是利用周期强迫非线性振子. 为了得到吸引集，微分方程需

268

有阻尼. 由 Ueda 观察到的吸引子就属于这种类型，参见文献[**110**]与[**109**].

例 7.5.1 给例 5.2.1 中考虑过的双井达芬方程添上强迫项，就得到方程组

$$\ddot{x}+\delta\dot{x}-x+x^3=F\cos(\omega t),$$

或

$$\begin{aligned}\dot{\tau}&=1\quad(\mathrm{mod}\,\frac{2\pi}{\omega})\\ \dot{x}&=y\\ \dot{y}&=x-x^3-\delta y+F\cos(\omega\tau).\end{aligned}\tag{7.5.1}$$

强迫项关于 τ 是 $\frac{2\pi}{\omega}$ 周期的，因此只需考虑由 $\tau=0$ 到 $\tau=\frac{2\pi}{\omega}$ 的庞加莱映射. 系统发散量为 $-\delta$，当 $\delta>0$ 时其值为负. 因此，系统使相空间中区域的体积衰减，且任一不变集有零体积，或在

二维截面 $\tau=0$ 上有零面积.

当 $F=0$，$\delta>0$ 时，系统在 $(x, y)=(\pm 1, 0)$ 有两个不动点汇，它们吸引除位于原点的鞍点的稳定流形之外的所有轨线. 根据位势函数，轨线趋向于两个极小值中的一个，即两个“井”之一的底部. 对于充分小的 F，轨线继续停留在两个“井”之一的底部(比如 $F=0.18$，$\delta=0.25$，$\omega=1$). 图 7.5.1 所示的是 x 作为 t 的函数的图像.

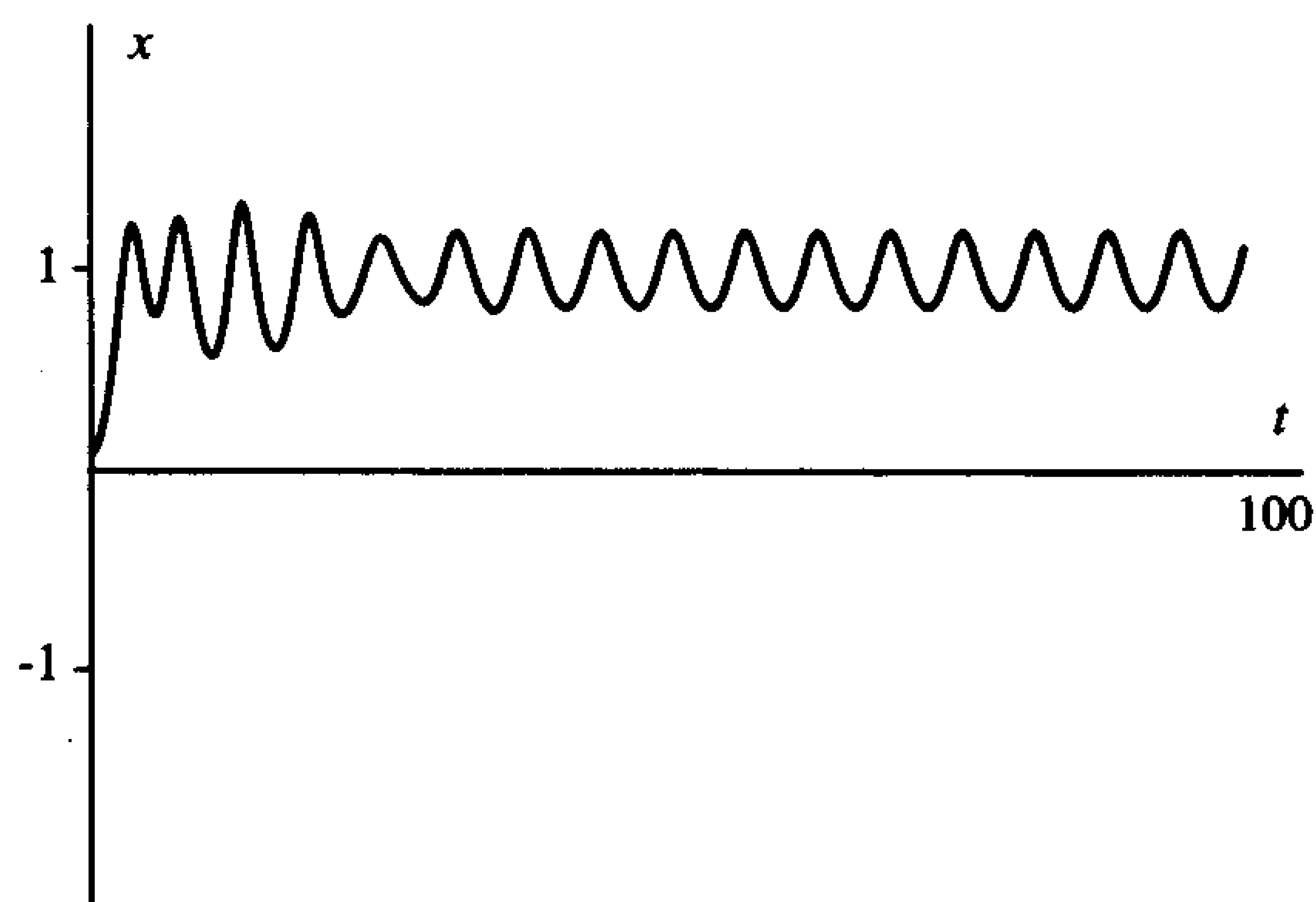


图 7.5.1　系统(7.5.1)的 x 作为 t 的函数之图像($F=0.18$，$\delta=0.25$，$\omega=1$)

对于充分大的 F，系统出现晃动，以至于一“井”中的轨线被拉到另一边，因此轨线可以在两边来回移动. 当 $F=0.40$ 时，$x(t)$ 的图像是没有规律的(参见图 7.5.2). 解 $(x(t), y(t))$ 的图像自相缠绕，由于实际系统是在三维空间，因此这些图像不能展示很多. 庞加莱映射仅仅显示在某些定时的解，它是频闪图像，当频闪进行时，每 $\frac{2\pi}{\omega}$ 时间单元进行一次标绘. 在 $F=0.40$，$\delta=0.25$，$\omega=1$ 时的庞加莱映射的数值图像表明该系统存在一个混沌吸引子(参见图 7.5.3). ■

269

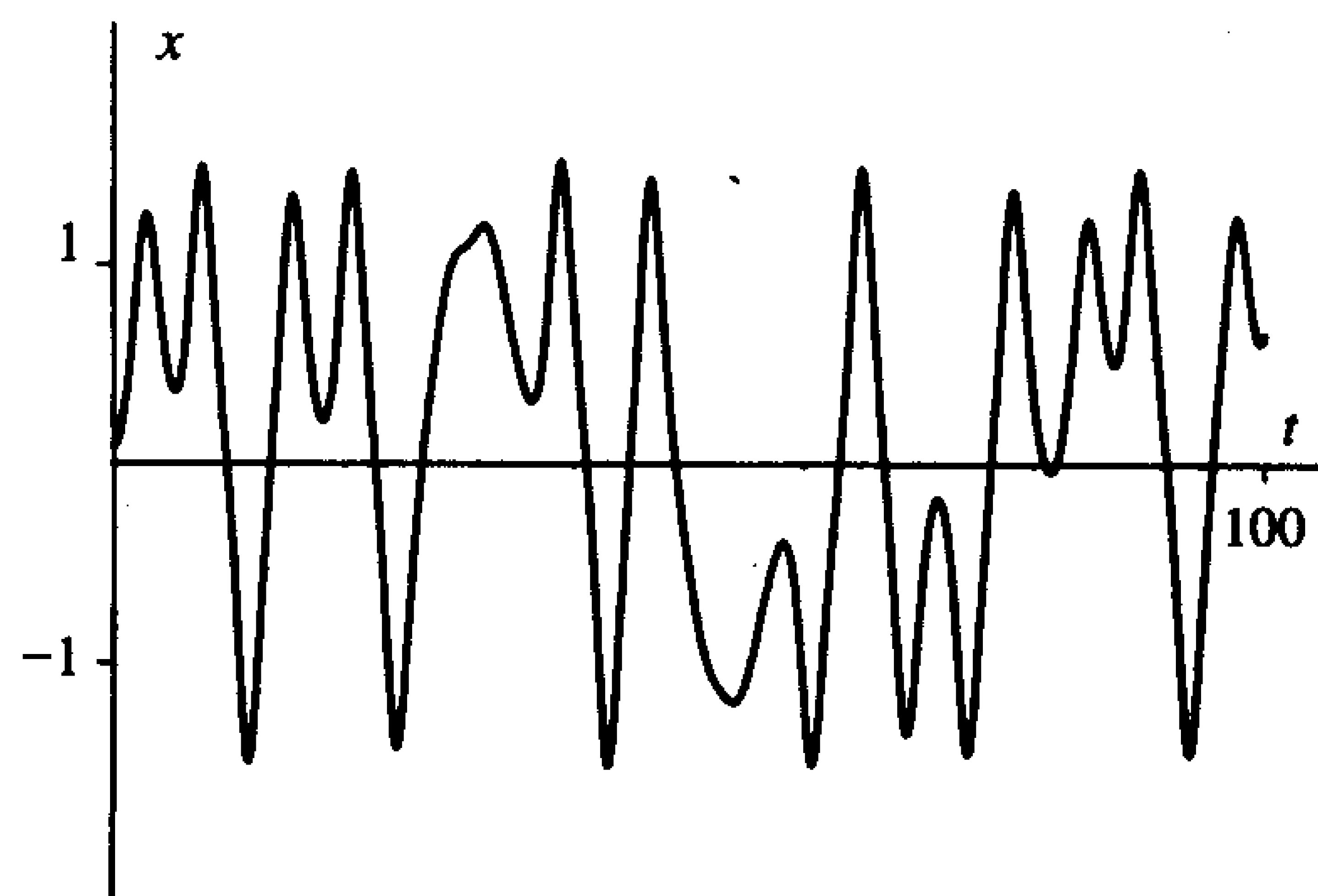


图 7.5.2　系统(7.5.1)的 x 作为 t 的函数之图像($F=0.4$，$\delta=0.25$，$\omega=1$)

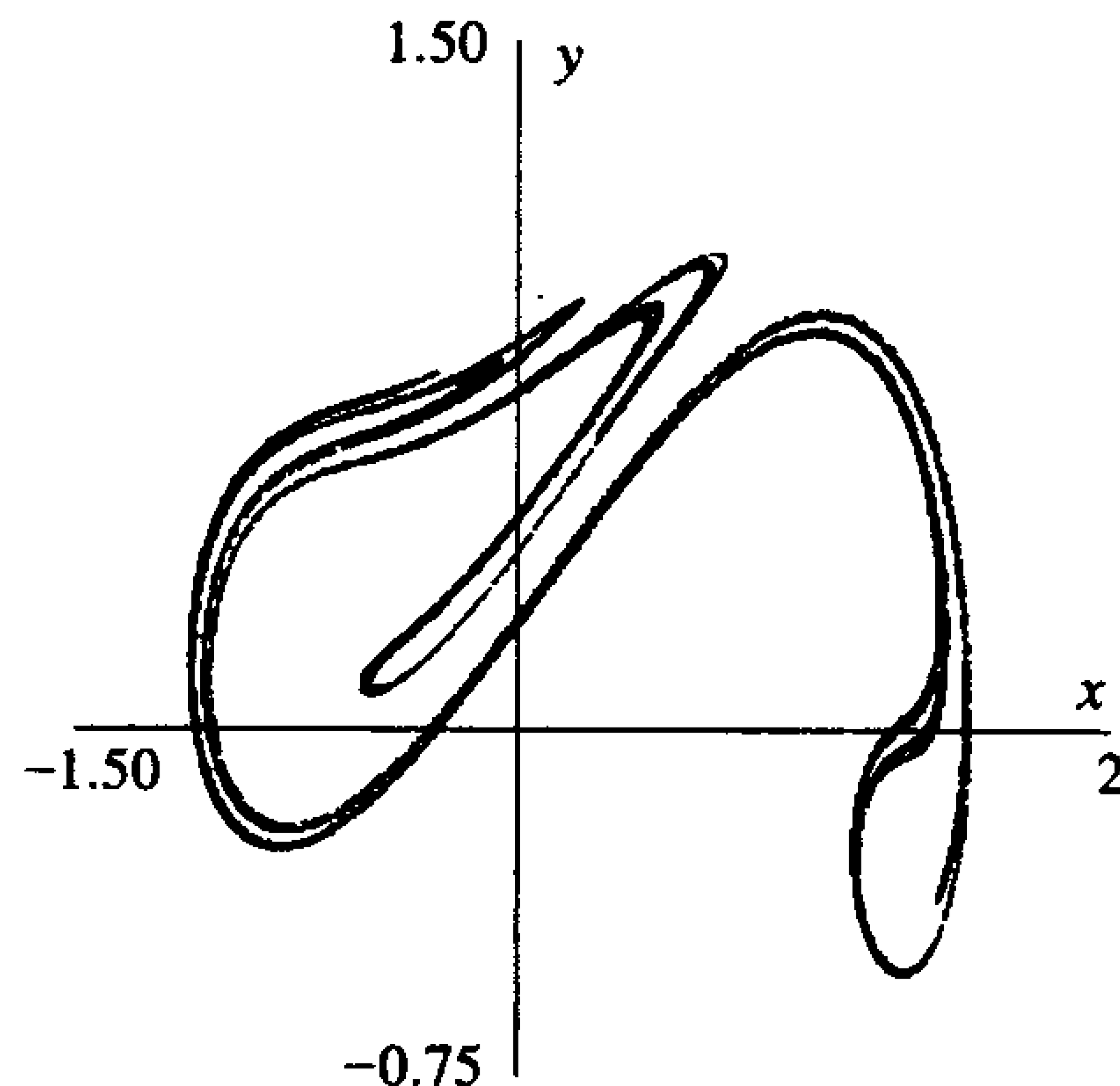


图 7.5.3　系统(7.5.1)的庞加莱映射图像($F=0.4$，$\delta=0.25$，$\omega=1$)

例 7.5.2 现在添加一强迫项到例 7.1.9 中，得到下述方程组：

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2x^3 + y(x^2 - x^4 - y^2) + F\cos(\tau). \end{cases} \tag{7.5.2}$$

对于该方程组，一个任意小的强迫项就使得周期轨(是原点所产生的)的稳定流形与不稳定流形变成横截的而不再是重合，当这事发生时，数值结果表明有混沌吸引子并伴随一稠密轨道(参见图 7.5.4).

该系统具有挤压伸长与折叠，这类似于 Rössler 系统，挤压伸长来自于不动点附近被不稳定方向的扩张所强行分离的轨线，而折叠则是由于周期强迫改变方向使得轨道产生不同位置而引起的. ■

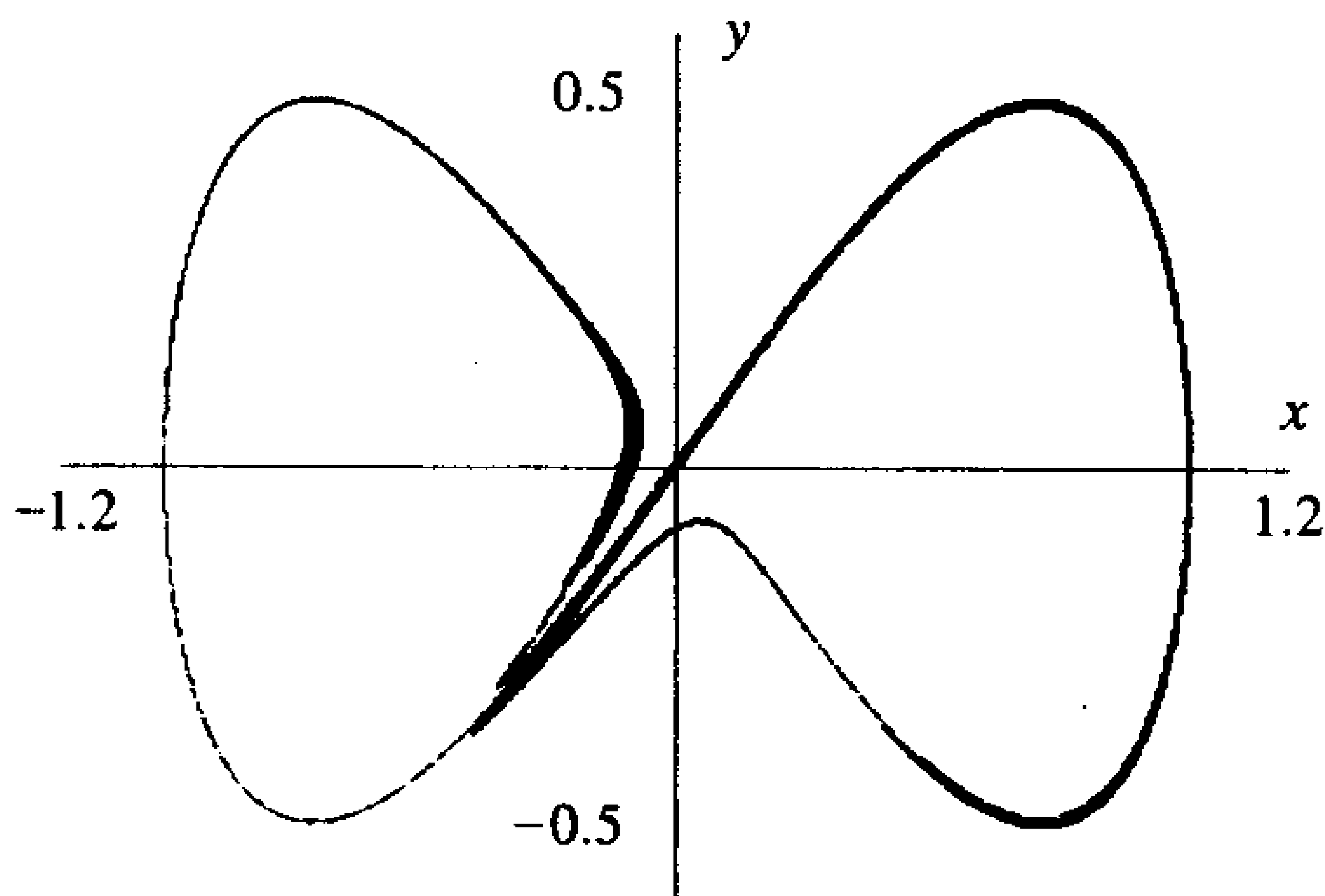


图 7.5.4 系统(7.5.2)的庞加莱映射图像($F=0.01$)

270

7.6 李雅普诺夫指数

我们已经讨论过解对初始值的敏感依赖性以及它是如何与混沌密切联系的. 本节定义李雅普诺夫指数，在计算机模拟上它比敏感依赖性更具可操作性. 李雅普诺夫指数推广了不动点的特征值和周期轨的特征乘数的概念.

初始值的敏感依赖性既有明确的数学定义，又可以通过几个模型(如例 7.3.1 与例 7.4.1)得到验证，还能用数值方法观测出来，然而对很多系统而言做到这些事情并非易事. 因此我们引入另一个相关概念，这产生于无穷小位移且更易计算. 对固定的 t 利用线性近似，有

$$\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{y}_0) - \boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0) \approx D_x\boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0).$$

对初始值的任一曲线 $\boldsymbol{x}_s$，令

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_s)\mid_{s=0} = D_x\boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}\frac{\partial \boldsymbol{x}_s}{\partial s} = D_x\boldsymbol{\phi}_{(t;\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{v}_0,$$

则 $\boldsymbol{v}(t)$ 满足一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0))}\boldsymbol{v}(t),$$

及

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\partial \boldsymbol{x}_s}{\partial s}.$$

若 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0$，则 $\boldsymbol{v}(t)$ 给出了在时间 t 的无穷小位移.

$\|\boldsymbol{v}(t)\|$ 的增长率是这样的数 ℓ，它满足

$$\|\boldsymbol{v}(t)\| \approx Ce^{\ell t}.$$

两边取对数，得

$$\ln\|\boldsymbol{v}(t)\| \approx \ln(C)+\ell t,$$

$$\frac{\ln\|\boldsymbol{v}(t)\|}{t} \approx \frac{\ln(C)}{t}+\ell,$$

$$\ell=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\boldsymbol{v}(t)\|}{t}.$$

271

我们用上面最后一个式子来定义初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 与初始无穷小位移 $\boldsymbol{v}_0$ 的李雅普诺夫指数. 对于给定的初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 可能有不止一个李雅普诺夫指数，通常有 n 个李雅普诺夫指数(重数计算在内).

定义 7.6.1 记 $\boldsymbol{v}(t)$ 是第一变分方程的解，始于 $\boldsymbol{x}_0$，且 $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}_0$. 对于初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 与初始无穷小位移 $\boldsymbol{v}_0$ 的李雅普诺夫指数定义为

$$\ell(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{v}_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\boldsymbol{v}(t)\|}{t},$$

只要该极限存在.

对于其前行轨线是有界的大多初始值 $\boldsymbol{x}_0$，李雅普诺夫指数对所有的向量 $\boldsymbol{v}$ 都存在. 在 n 维情形下，当 $\boldsymbol{v}$ 变化时至多有 n 个相异的李雅普诺夫指数 $\ell(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{v})$. 若把重数计算在内，则恰有 n 个值: $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)=\ell(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{v}_1)$, $\ell_2(\boldsymbol{x}_0)=\ell(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{v}_2)$, $\cdots$, $\ell_n(\boldsymbol{x}_0)=\ell(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{v}_n)$. 将它们进行排序，有

$$\ell_1(\boldsymbol{x}_0)\geqslant\ell_2(\boldsymbol{x}_0)\geqslant\cdots\geqslant\ell_n(\boldsymbol{x}_0).$$

李雅普诺夫指数的数学基础是 Oseledec 乘法遍历定理(定理 13.5.9)，这将在 13.5 节利用函数迭代给予讨论.

首先考虑在不动点处的李雅普诺夫指数.

定理 7.6.2 假设 $\boldsymbol{x}_0$ 是微分方程的一个不动点，则在该点的李雅普诺夫指数就是 $\boldsymbol{x}_0$ 的特征值的实部.

证明 这里不打算给出正式的证明，只考虑多种可能性. 首先假设 $\boldsymbol{v}^j$ 是实特征值 λ_j 对应的特征向量，则解为

$$\boldsymbol{v}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_j t}\boldsymbol{v}^j.$$

对有关等式取极限，得

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{v}^j)&=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\boldsymbol{v}(t)\|}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\lambda_j t})+\ln\|\boldsymbol{v}^j\|}{t}\\&=\lambda_j+\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\boldsymbol{v}^j\|}{t}\\&=\lambda_j.\end{aligned}$$

上式第二个等号成立是因为 $\ln\|\boldsymbol{v}^j\|$ 是常数，且分母 $t\to\infty$.

若 $\lambda_j=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j$ 是复特征值，则解为

$$\boldsymbol{v}(t)=\mathrm{e}^{\alpha_j t}(\cos(\beta_j t)\boldsymbol{u}^j+\sin(\beta_j t)\boldsymbol{w}^j).$$

求极限，得

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{u}^j)&=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\boldsymbol{v}(t)\|}{t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\alpha_j t})}{t}+\frac{\ln\|\cos(\beta_j t)\boldsymbol{u}^j+\sin(\beta_j t)\boldsymbol{w}^j\|}{t}\end{aligned}$$

$$= \alpha_j + \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \| \cos(\beta_j t)\boldsymbol{u}^j + \sin(\beta_j t)\boldsymbol{w}^j \|}{t}$$

$$= \alpha_j.$$

[272] 最后一个等式成立是因为在第三个等式的极限中，分子是振荡且有界的，故极限为零.

最后，若有重的实特征值，则解具有形式

$$\boldsymbol{w}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_j t}\boldsymbol{w}^j + t\mathrm{e}^{\lambda_j t}\boldsymbol{v}^j.$$

求极限，得

$$\ell(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{w}^j) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \| \boldsymbol{w}(t) \|}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^{\lambda_j t})}{t} + \frac{\ln \| \boldsymbol{w}^j + t\boldsymbol{v}^j \|}{t}$$

$$= \lambda_j + \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \| \boldsymbol{w}^j + t\boldsymbol{v}^j \|}{t}$$

$$= \lambda_j.$$

最后一个等式成立是因为在第三个等式的极限中，分子增长的阶是 $\ln t$，而其分母的阶是 t，所以极限为零.

对前面形式的两个解之和，其增长率总是较大的特征值，比如假设

$$\boldsymbol{v}(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^1 + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^2,$$

其中 C_1，$C_2 \neq 0$，$\lambda_1 > \lambda_2$，则有

$$\ell(\boldsymbol{x}_0;C_1\boldsymbol{v}^1 + C_2\boldsymbol{v}^2) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \| \boldsymbol{v}(t) \|}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^{\lambda_1 t})}{t} + \frac{\ln \| C_1\boldsymbol{v}^1 + C_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\boldsymbol{v}^2 \|}{t}$$

$$= \lambda_1 + \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \| C_1\boldsymbol{v}^1 + C_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\boldsymbol{v}^2 \|}{t}$$

$$= \lambda_1.$$

其中最后一个等式成立是因为在第三个等式的极限中，$\lambda_2 - \lambda_1 < 0$，则 $\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \to 0$，分子是有界的，故极限等于零. ■

当我们考虑非不动点的解时，轨线的方向可取为一个方向，该方向的李雅普诺夫指数通常是零.

定理 7.6.3 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为一初始值，使得 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 有界且 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 不含任何不动点，则

$$\ell(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)) = 0.$$

这就是说沿着向量场的方向 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$，李雅普诺夫指数既不增长也不衰减.

证明 证明思路为

$$\boldsymbol{F}(\phi(t;\boldsymbol{x}_0)) = \frac{\partial}{\partial s}\phi(s;\phi(t;\boldsymbol{x}_0))\big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\phi(s+t;\boldsymbol{x}_0)\big|_{s=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\phi(t;\phi(s;\boldsymbol{x}_0))\big|_{s=0} = D_x\phi_{(t;\boldsymbol{x}_0)}\frac{\partial}{\partial s}\phi(s;\boldsymbol{x}_0)\big|_{s=0}$$

[273]

$$= D_x\phi_{(t;\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0).$$

即流在时刻 t 的线性化把初始值的向量场映射为相应的轨线在时刻 t 的向量场．若令 $\boldsymbol{x}_s=\phi(s;\boldsymbol{x}_0)$，则

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\partial}{\partial s}\phi(t;\boldsymbol{x}_s)\big|_{s=0}=\boldsymbol{F}(\phi(t;\boldsymbol{x}_0))$$

是第一变分方程的解，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{F}(\phi(t;\boldsymbol{x}_0))=D\boldsymbol{F}_{(\phi(t;x_0))}\boldsymbol{F}(\phi(t;\boldsymbol{x}_0)).$$

如果轨道有界，且其 ω 极限集不含不动点，则 $\|\boldsymbol{F}(\phi(t;\boldsymbol{x}_0))\|$ 有界且下界大于零，故

$$\ell(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0))=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|D_x\phi_{(t;x_0)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\|}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\boldsymbol{F}(\phi(t;\boldsymbol{x}_0))\|}{t}=0.$$ ■

定理 7.6.4　设 $\boldsymbol{x}_0$ 是周期为 T 的周期轨上的点，则其 $(n-1)$ 个基本的特征李雅普诺夫指数为 $\frac{\ln|\lambda_j|}{T}$，其中 λ_j 是周期轨的特征乘数，亦即庞加莱映射的特征值．

下面通过一个例子来计算．

例 7.6.5　考虑方程组

$$\dot{x}=-y+x(1-x^2-y^2)$$
$$\dot{y}=x-y(1-x^2-y^2).$$

它有周期轨 $(x(t),y(t))=(\cos t,\sin t)$，半径为 1．沿着这条闭轨的偏导数矩阵为

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}1-r^2-2x^2 & -1-2yx\\ 1-2xy & 1-r^2-2y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\cos^2 t & -1-2\cos t\sin t\\ 1-2\cos t\sin t & -2\sin^2 t\end{bmatrix}.$$

在上述情形下，方程 $\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)$ 的解并不明显，但是通过直接验证有

$$\boldsymbol{v}(t)=\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}\quad 与\quad \begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos t\end{bmatrix}$$

满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{v}(t)$（或它们就是该时变线性方程的解，第二个解是周期轨的导数向量）．由于 $(x(0),y(0))=(1,0)$，

$$\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad 与\quad \begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos t\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

故有李雅普诺夫指数

$$\begin{aligned}\ell((1,0);(1,0))&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left\|\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}\right\|\\ &=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{-2t})}{t}=-2,\end{aligned}$$

274

另一个李雅普诺夫指数为

$$\ell((1,0);(0,1))=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left\|\begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos t\end{bmatrix}\right\|$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\ln(1)}{t} = 0.$$

求李雅普诺夫指数较容易的方法是利用极坐标，即

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

在 $r = 1$ 处，关于变量 r 的偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial r} r(1 - r^2) \Big|_{r=1} = 1 - 3r^2 \Big|_{r=1} = -2.$$

因此，r 分量的线性化方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_r = -2 v_r,$$

其解为 $v_r(t) = \mathrm{e}^{-2t} v_r(0)$，增长率是 -2. 一个向量 v_θ 的 θ 分量满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_\theta = 0,$$

故在 θ 方向的增长率为 0. 这样，两个李雅普诺夫指数分别是 -2 与 0. ■

两条轨线，若它们的分离是指数级趋于零的，则它们有相同的李雅普诺夫指数，特别地，若一条轨线渐近趋于(i)特征值均为非零实部的不动点，或(ii)特征指数的绝对值都不为零的周期轨，则其李雅普诺夫指数完全由该不动点或该周期轨的李雅普诺夫指数所确定.

定理 7.6.6　*假设 $\phi(t;\ \boldsymbol{x}_0)$ 与 $\phi(t;\ \boldsymbol{y}_0)$ 是同一微分方程的两条有界轨线，且指数级收敛(即存在常数 $-a < 0$ 与 $C \geqslant 1$，使得*

$$\| \phi(t;\boldsymbol{x}_0) - \phi(t;\boldsymbol{y}_0) \| \leqslant C\mathrm{e}^{-at}$$

对所有 $t \geqslant 0$ 都成立). 则关于初始值 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{y}_0$ 的李雅普诺夫指数相等. 于是，若李雅普诺夫指数定义中关于其中一个初始值的极限存在，则对另一初始值的极限也存在. 给出李雅普诺夫指数的向量在这两点可以不同.

从刘维尔公式(6.6.2)易得李雅普诺夫指数之和为体积的增长率，这就建立了李雅普诺夫指数之和与发散量之间的关系，如下述定理所述.

定理 7.6.7　*考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，假设在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的 n 个李雅普诺夫指数 $\ell_1(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \ell_n(\boldsymbol{x}_0)$ 存在. 则*

(a)李雅普诺夫指数之和等于沿着轨线的发散量的平均值的极限，即

$$\sum_{j=1}^{n} \ell_j(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\phi(t;\boldsymbol{x}_0)} \, \mathrm{d}t.$$

275 *(b)特别地，若系统发散量是常数 δ，则在任一点的李雅普诺夫指数之和为 δ.*

(c)在三维情形下，若系统发散量是常数 δ，且过点 $\boldsymbol{x}_0$ 的正轨线有界，$\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 不包含任何不动点. 若李雅普诺夫指数 $\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$ 非零，则其他两个李雅普诺夫指数分别是 0 与 $\delta - \ell_1$.

将上述定理应用到洛伦兹系统，发散量为 $-\sigma - 1 - b < 0$，于是其李雅普诺夫指数之和一定小于零. 对于 $\sigma = 10$，$b = \frac{8}{3}$，李雅普诺夫指数之和为 -13.67，通过数值计算得到 $\ell_1 = 0.90$

(这是扩张方向)，$\ell_2=0$(沿着轨线)，则 $\ell_3=-13-\frac{8}{3}-\ell_1=-14.57$，一定小于零(收缩方向)．因为 $\ell_1+\ell_3$ 等于发散量，为求所有的李雅普诺夫指数，只需计算其中之一即可．

李雅普诺夫指数的数值计算

对于多数点 $\boldsymbol{x}_0$，若其前行轨线有界，则李雅普诺夫指数是存在的．取这样的点 $\boldsymbol{x}_0$，则对大多数 $\boldsymbol{v}_0$，$\ell(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0)$是最大的李雅普诺夫指数，这是因为当 t 增加时，向量 $D\phi_{(t,\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{v}_0$ 趋于最大的扩张方向(考察线性鞍点附近的流，除非初始值 $\boldsymbol{v}_0$ 在稳定流形上，当 $t\to\infty$ 时 $\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{v}_0$ 趋于不稳定流形)，这样最大的李雅普诺夫指数可通过求解微分方程与第一个变分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$
$$\dot{\boldsymbol{v}}=D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{v}$$

进行数值计算．所得到的向量 $\boldsymbol{v}(t)$的增长率给出了最大的李雅普诺夫指数

$$\ell_1(\boldsymbol{x}_0)=\ell(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{v}(t)\|}{t}.$$

计算其余的李雅普诺夫指数较困难，这里只给出计算$\mathbb{R}^n$ 上微分方程的所有 n 个李雅普诺夫指数的过程．

首先介绍认识较小的李雅普诺夫指数的另外一种方法．记 $J_k=D\phi_{(k;\boldsymbol{x}_0)}$是流在 k 时刻的导数矩阵，令 $\boldsymbol{U}$ 为单位向量的全体，即

$$\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{x}:\|\boldsymbol{x}\|=1\}.$$

集合 $\boldsymbol{U}$ 常被称为$\mathbb{R}^n$ 中的"球面"．$\boldsymbol{U}$ 在 J_k 下的像 $J_k(\boldsymbol{U})$是一个椭球面，其轴长分别为 $r_k^{(1)}$，…，$r_k^{(n)}$(若矩阵 J_k 是对称的，则由线性代数有关知识知，该像一定是椭圆；对于非对称矩阵，结论仍真，只要考虑对称矩阵 $J_kJ_k^{\mathrm{T}}$，就可以证明这一点)．指向椭球面轴的向量随 k 的变化而变化，但对多数点来说，有

$$\ell_j(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(r_k^{(j)})}{k}.$$

不必考虑$\mathbb{R}^n$ 中的每个椭球面，而只考虑由 $J_k(\boldsymbol{U})$中 j 个最长的方向确定的一个，记为 $E_k^{(j)}$．$E_k^{(j)}$ 的体积等于 π 乘以 $r_k^{(1)}\cdots r_k^{(j)}$，近似等于 $\mathrm{e}^{k(\ell_1+\cdots+\ell_j)}$．这样，当 $k\to\infty$ 时椭球面 $E_k^{(j)}$ 的体积增长率是前 j 个李雅普诺夫指数之和，即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{vol}(E_k^{(j)})}{k}=\ell_1+\cdots+\ell_j.$$

276

于是，我们可以决定由两个向量定义的椭圆面积的增长率，即前两个李雅普诺夫指数之和．

如果取 n 个向量 $\boldsymbol{v}_0^1$，…，$\boldsymbol{v}_0^n$，则每个向量 $D\phi_{(t,\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{v}_0^j$ 很可能趋于增长最大的方向，于是 $\ell(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0^j)=\ell_1(\boldsymbol{x}_0)$为同一值．然而，由 $D\phi_{(t,\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{v}_0^1$ 与 $D\phi_{(t,\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{v}_0^2$ 张成的平行四边形面积的增长率等于前两个最大李雅普诺夫指数的和；由 $D\phi_{(t,\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{v}_0^1$，…，$D\phi_{(t,\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{v}_0^j$ 张成的平行六面体体积的增长率等于前 j 个最大李雅普诺夫指数的和．为了计算这样的增长率，需要利用格拉姆–施密特正交化法将这一向量组转换成正交向量，故取 n 个初始向量 $\boldsymbol{v}_0^1$，…，$\boldsymbol{v}_0^n$，点 $\boldsymbol{x}_0$ 及初始时间$t_0=0$，由方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) \\ \dot{w}^1 &= DF_{(x)}w^1 \\ &\vdots \qquad\qquad (0 = t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1 = 1) \\ \dot{w}^n &= DF_{(x)}w^n, \end{aligned}$$

及初始条件

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ w^j(0) &= v_0^j \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(1;x_0) \quad 与 \\ w^j &= D\phi_{(1;x_0)}v_0^j \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \end{aligned}$$

则由格拉姆－施密特正交化法得两两正交的向量组集合

$$\begin{aligned} v_1^1 &= w^1, \\ v_1^2 &= w^2 - \left(\frac{w^2 \cdot v_1^1}{\| v_1^1 \|^2}\right)v_1^1, \\ v_1^3 &= w^3 - \left(\frac{w^3 \cdot v_1^1}{\| v_1^1 \|^2}\right)v_1^1 - \left(\frac{w^3 \cdot v_1^2}{\| v_1^2 \|^2}\right)v_1^2, \\ &\vdots \\ v_1^n &= w^n - \left(\frac{w^n \cdot v_1^1}{\| v_1^1 \|^2}\right)v_1^1 - \cdots - \left(\frac{w^n \cdot v_1^{n-1}}{\| v_1^{n-1} \|^2}\right)v_1^{n-1}. \end{aligned}$$

由 v_1^1 与 v_1^2 所张成的平行四边形的面积等于由 w^1 与 w^2 所张成的平行四边形的面积；当 $3 \leqslant j \leqslant n$ 时，由 v_1^1，…，v_1^j 所张成的平行六面体的体积等于由 w^1，…，w^j 所张成的平行六面体的体积. 因此，可用这样的向量计算体积的增长率. 令 $t_1 = t_0 + 1 = 1$.

用归纳法重复以上过程，假设已求得点 x_k，n 个向量 v_k^1，…，v_k^n，时间 $t_k = k$，由方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) \\ \dot{w}^1 &= DF_{(x)}w^1 \\ &\vdots \qquad\qquad (0 = t_k \leqslant t \leqslant t_k + 1 = k + 1) \\ \dot{w}^n &= DF_{(x)}w^n, \end{aligned}$$

及初始条件

277

$$\begin{aligned} x(k) &= x_k \\ w^j(k) &= v_k^j \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \phi(1;x_k) \quad 与 \\ w^j &= D\phi_{(1;x_k)}v_k^j \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \end{aligned}$$

则由格拉姆-施密特正交化法得两两正交的向量组集合

$$\begin{aligned}
v_{k+1}^1 &= w^1, \\
v_{k+1}^2 &= w^2 - \left(\frac{w^2 \cdot v_{k+1}^1}{\| v_{k+1}^1 \|^2}\right) v_{k+1}^1, \\
v_{k+1}^3 &= w^3 - \left(\frac{w^3 \cdot v_{k+1}^1}{\| v_{k+1}^1 \|^2}\right) v_{k+1}^1 - \left(\frac{w^3 \cdot v_{k+1}^2}{\| v_{k+1}^2 \|^2}\right) v_{k+1}^2, \\
&\vdots \\
v_{k+1}^n &= w^n - \left(\frac{w^n \cdot v_{k+1}^1}{\| v_{k+1}^1 \|^2}\right) v_{k+1}^1 - \cdots - \left(\frac{w^n \cdot v_{k+1}^{n-1}}{\| v_{k+1}^{n-1} \|^2}\right) v_{k+1}^{n-1}.
\end{aligned}$$

再取 $t_{k+1} = t_k + 1 = k + 1$，这就完成了构造向量的全过程.

向量 v_k^1 的长度的增长率一般就是最大的李雅普诺夫指数；向量 v_k^j 的长度的增长率就是第 j 大的李雅普诺夫指数，即

$$\ell_j(x_0) = \lim_{k \to \infty} \frac{\| v_k^j \|}{k} \quad (1 \leq j \leq n).$$

7.7 混沌吸引子的检验

前面介绍了李雅普诺夫指数，它可作为检验系统对初始值敏感依赖性的可行方法. 本节将回到混沌吸引子，并介绍在实验与数值计算中更易于操作的一种检验方法. 因为这种方法含有难以排除的病态，此处不将这种判据作为定义来给出. 然而，对“多数系统”而言，这些病态不会发生，这就使得该判据成了判断一系统是否存在混沌吸引子的有效方法.

定理 7.6.3 表明在轨线方向的无穷小扰动通常有零增长率，其余 $n-1$ 个方向可能伸长也可能收缩，且这 $n-1$ 个李雅普诺夫指数称为**基本的李雅普诺夫指数**. 如果其中一个指数为正，则在相应方向上的小位移之长度趋于增长(至少是无穷小的).

278

混沌吸引子的检验

集合 A 是否是流 $\phi(t;\ x)$ 的混沌吸引子的实验判断依据如下：

1. 存在不同轨道上的许多点 x_0，…，x_k 其 ω 极限集为 A，即

$$\omega(x_i) = A \quad (0 \leq i \leq k).$$

2. 在 x_0 处的李雅普诺夫指数至少有一个为正，即 $\ell_1(x_0) > 0$.

3. 所有 $n-1$ 个基本李雅普诺夫指数 $\ell_j(x_0) \neq 0$(在向量场 $F(x_0)$ 方向的李雅普诺夫指数通常为零).

注 7.7.1 许多不同轨道有相同的 ω 极限集这一事实表明吸引域有正测度，且 A 是一个米尔诺吸引子. 在许多情形下，这样的米尔诺吸引子都有一个收缩域，但这并不是用实验可以证明的. 我们没有要求 $x_i \in A$，因此流在 A 上未必是拓扑传递的. 另外，这一变化有可能导致例 7.2.11 那样的非混沌情形，但是由于要求了 $\omega(x_i) = A$，没有吸引的真子集，于是若存在一个收缩域，A 就是吸引子.

在这个判据中，有正的李雅普诺夫指数代替了 7.2.2 节给出数学味较浓的定义中出现的对

初始值敏感依赖性的假设.

多数系统既满足上述检验又满足更早给出的定义，这样我们自然地就可以假设系统是“通有”的. 在附录 D 中将讨论通有性质.

系统是“通有的”这种假设并不是真正可以验证的，但可用来排除像例 7.2.11 那样的情况. 这个条件表明周期点在 **A** 中是稠密的，且不动点的稳定与不稳定流形和周期轨相互交叉.

例 7.7.2（修正的拟周期吸引子）　考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = y_1 + x_1(1 - x_1^2 - y_1^2)\\ \dot{y}_1 = -x_1 + y_1(1 - x_1^2 - y_1^2)\\ \dot{x}_2 = \sqrt{2}y_2 + 3x_2(1 - x_2^2 - y_2^2)\\ \dot{y}_2 = -\sqrt{2}x_2 + 3y_2(1 - x_2^2 - y_2^2).\end{cases}$$

引入极坐标 $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$，$\tan\theta_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$，$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$，$\tan\theta_2 = \dfrac{y_2}{x_2}$，则微分方程化为

$$\begin{cases}\dot{r}_1 = r_1(1 - r_1^2)\\ \dot{\theta}_1 = 1 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)\\ \dot{r}_2 = 3r_2(1 - r_2^2)\\ \dot{\theta}_2 = \sqrt{2} \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).\end{cases}$$

易判断集合 $r_1 = 1 = r_2$ 是一个吸引集. 由于在这个集合上的运动是拟周期的，存在一个稠密轨线，且该集合是一个吸引子. 由于该系统是一乘积系统，其李雅普诺夫指数就是两个子系统的李雅普诺夫指数. 在 r_1 与 θ_1 系统中的指数分别是 0 与 −2，而在 r_2 与 θ_2 系统中的指数分别是 0 与 −6，因此整个系统的李雅普诺夫指数是 −2、−6、0 与 0. 由于 0 是二重李雅普诺夫指数，故集合不是混沌吸引子. 拟周期运动从其表面上看并不是“混沌”的，所以这种分类还是合理的. ■

279

7.8　应用

洛伦兹系统模型

如本书开头“历史回顾”中所述，洛伦兹在 1963 年发现了具有敏感依赖性的系统，20 世纪 50 年代末，洛伦兹利用计算机研究天气预报中的非线性效应，即各种参数变化对预报结果的作用. 他最初从一个仅含有 12 个坐标的简单模型开始，并用单行打印机打印结果，速度非常慢，每 10 秒钟才打印一行. 为了加快计算他跟踪的解，他只选择打印部分数据点，每一次仍有许多计算. 计算机算到小数点后六位，他设计的打印结果只精确到三位数字，因为他认为其他数字是无意义的. 他想通过显示更频繁的数据点来仔细观察一台计算机的运行情况，于是他把计算机打印出来的舍位处理过的值作为初始值中途输入该计算机，结果发现新一轮计算机的值很快从原始值散开.

经过更深入的研究，洛伦兹得出结论，计算机两轮运行结果存在偏差的根源在于对初始值的敏感依赖性，初始值的微小变化经系统放大以后，以至于两条轨道出现巨大差异.

洛伦兹想进一步简化系统. Barry Saltzman 也一直在研究这一方程，用来描述从下面加热的流体的流动，他得到的模型仅有七个变量. 进一步简化之后，洛伦兹发表了他的论文，所研究的系统含有三个微分方程，即现在所谓的洛伦兹微分方程组.

我们现在讨论以洛伦兹微分方程组为模型的两个不同的背景：水轮运行与大气对流，这也是洛伦兹最初所考虑的. 虽然洛伦兹最初考虑的是气流运行，但我们先从水轮模型入手，其方程是类似的，而且易于具体化.

水轮模型

在这个模型中，水被注入倾斜放置的水轮的水槽里，水在每个水槽底部漏出. 选择合适的速度，在自身倒转之前水轮沿一个方向随机地产生若干次旋转. Willem Malkus 与 Lou Howard 不仅得出了方程，而且建起了一个机械装置. 更多讨论见文献[**104**].

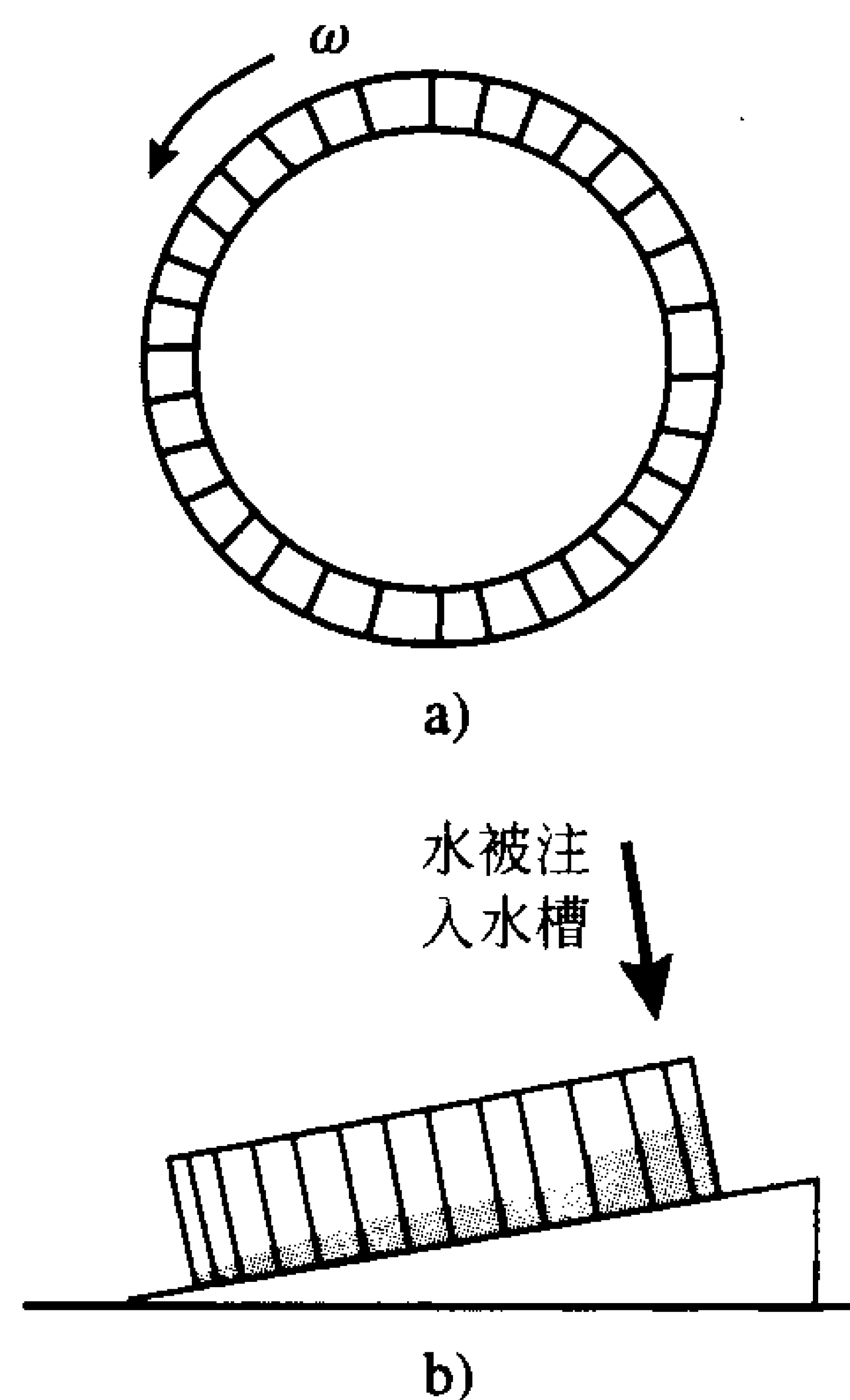


图 7.8.1　水轮的俯视图与侧视图

将一个可旋转的轮子置于一斜坡，围绕轮子四周每一角度有盛水的水槽(参见图 7.8.1). 记 $m(\theta, t)$ 是水在角度 θ 和时刻 t 时的质量，$Q(\theta)$ 是在角度 θ 时加水的速率，K 是渗漏率，于是流出的水的总量是 $-Km(\theta, t)$. 轮子以角速度 $\omega(t)$ 旋转，则比较在角度 θ 流进与流出的量，m 在角度 θ 关于 t 的变化率含有 $-\omega\frac{\partial m}{\partial\theta}(\theta, t)$. 合起来得到

$$\frac{\partial m}{\partial t}(\theta,t) = Q(\theta) - Km(\theta,t) - \omega\frac{\partial m}{\partial\theta}(\theta,t). \tag{7.8.1}$$

通过调节轮子的转矩可以决定含 $\dot{\omega}$ 的方程. 记 I 为转动惯量，R 为轮子的半径，α 为轮子倾斜的角度，ν 为转动阻尼，则 $I\dot{\omega}$ 的方程中含有 $-\nu\omega(t)$ 这一项，在角度 θ 的质量产生的转动力矩是 $g_\alpha\sin\theta m(\theta, t)$(其中 $g_\alpha = g\sin\alpha$)，故总力矩为 280

$$g_\alpha\int_0^{2\pi} m(\theta,t)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

结合由阻尼和质量分布引起的力矩，我们有

$$I\dot{\omega}(t) = -\nu\omega(t) + g_\alpha R\int_0^{2\pi} m(\theta,t)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{7.8.2}$$

方程(7.8.1)与(7.8.2)给出了系统运动的积分微分方程.

量 m 与 Q 关于 θ 是周期的，因此自然可将它们展成傅里叶级数. 令

$$Q(\theta) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n\cos(n\theta) \quad 与$$

$$m(\theta,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(n\theta) + b_n(t)\sin(n\theta).$$

量 $Q(\theta)$ 及其展式中的系数 q_n 都是已知的；假设水关于 θ 对称地注入，即 $Q(-\theta) = Q(\theta)$，所以展式中仅有余弦项而没有正弦项；由于 $\sin(0\theta) = 0$，故 $b_0(t) \equiv 0$. 为了计算积分，利用以下公式：

$$\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad 与$$

281

$$\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases}0 & n \neq 1,\\ \pi & n = 1.\end{cases}$$

将傅里叶展式代入并利用上述关于正弦和余弦函数的积分，得到下述由 $\sin(n\theta)$ 与 $\cos(n\theta)$ 表示的系统：

$$\begin{cases}\dot{a}_n(t) = -Ka_n(t) - \omega n b_n(t) + q_n\\ \dot{b}_n(t) = -Kb_n(t) + \omega n a_n(t)\\ I\dot{\omega}(t) = -\nu\omega(t) + \pi g_\alpha R b_1(t).\end{cases} \tag{7.8.3}$$

当 $n=0$ 时，有 $\dot{a}_0(t) = -Ka_0(t) + q_0$，因此

$$a_0(t) = \left(a_0(0) - \frac{q_0}{K}\right)e^{-Kt} + \frac{q_0}{K}$$

且趋于 $\frac{q_0}{K}(t\to\infty)$. 这样水的平均深度 $b_0(t)$ 渐近等于 $\frac{q_0}{K}$（即等于水流进的平均速率除以渗漏率）；取 $n=1$ 所得的方程较为有趣，因为它们不依赖于傅里叶展式中的高阶项，即有

$$\begin{cases}\dot{a}_1(t) = -Ka_1(t) - \omega b_1(t) + q_1\\ \dot{b}_1(t) = -Kb_1(t) + \omega a_1(t)\\ \dot{\omega}(t) = -\frac{\nu}{I}\omega(t) + \frac{\pi g_\alpha R}{I}b_1(t).\end{cases} \tag{7.8.4}$$

注意到方程组中除了两个二次项 $\omega a_1(t)$ 与 $-\omega b_1$ 之外所有其他项都是线性的. 人们已经关注高阶傅里叶系数对动力学类型的影响，此处不打算深究其理，而只仅仅考察低阶项的作用.

通过适当的尺度变换和代入，可将系统化为与洛伦兹系统稍有差别的系统. 令

$$x = \omega,$$
$$y = Bb_1,$$
$$z = r - Ba_1,$$

其中

$$B = \frac{\pi g_\alpha R}{\nu},$$
$$r = \frac{\pi g_\alpha R q_1}{\nu K},$$
$$\sigma = \frac{I}{\nu}.$$

直接计算即知方程组化为

$$\begin{cases}\dot{x} = -\sigma x + \sigma y\\ \dot{y} = rx - Ky - xz\\ \dot{z} = -Kz + xy.\end{cases}$$

该系统与通常的洛伦兹系统的区别在于 $\dot{y}$ 方程中 y 的系数是 $-K$ 而非 -1，且 $b=K$. 当 $r>K$，即

$$\frac{\pi g_\alpha R q_1}{\nu K^2}>1$$

时该系统有非零不动点. 于是，流入率 q_1 乘以水轮倾角 α 的正弦一定大于转动阻尼 v 乘以渗漏率 K 的平方.

在水轮高端将水注入水槽这一事实驱动水轮，使水槽转到低端，这就启动了水轮，使之运行，于是与初始变量 ω 相对应的变量 x 成为非零量. 若水轮转的足够快，含更深水的水槽通过低端之后水面立即快速下降，接着这些水槽升高又使水轮减速. 若水轮速度适度，它可以改变方向并反向转动，这使得 ω 与 x 变号. 282

若参数(注水率、水轮倾斜角度、渗漏率、阻尼力矩)选取合适，则可以得到一些轨线，它们通过使变量 x 从正变为负的空间区域. 由于 x 对应原始变量 ω，这对应着水轮顺时针和逆时针的交替转动，这些不是小振荡. 水轮沿一个方向转动几周，接着沿另一方向转动几周，而且转动的圈数呈现随机或混沌的，尽管方程是含固定系数的确定系统.

大气对流模型

洛伦兹用微分方程组 7.1.1 来描述当从底部加热而在上部冷却时所发生的空气对流过程. 他的兴趣是研究对流过程对天气预报的非线性效应，对于温度的微小差异，热传导可以使热上升并保持空气静止，这种平衡态最初是 Lord Rayleigh 在 1916 年研究的. 当温差变大时，下面的热空气上升，上面的冷空气下降，引起对流. 温差不太大时，空气形成对流而使热空气上升冷空气下降(参见图 7.8.2). 这里温差所起的作用类似于前面水轮注水率的差异，再具体些，是在 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 时的注水率的差异(即系数 q_1). 因此大部分的讨论是类似的，特别地，混沌轨线对应大气在一定时间内沿一个方向形成的对流滚动，之后又反转并沿另一方向的滚动，反转之前沿前一个方向的滚动次数是随机出现的. 对于更深入地讨论，读者可参见原始论文[**68**].

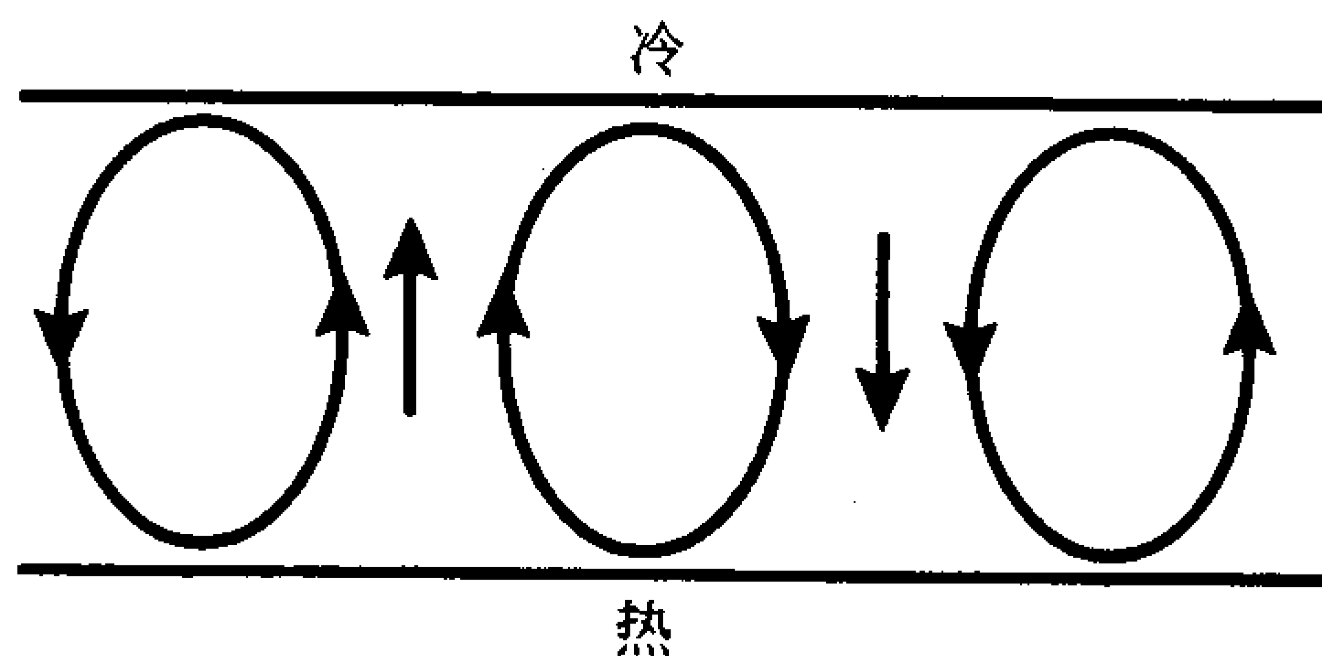


图 7.8.2　流体对流滚动

7.9　理论与证明

吸引子

定理 7.1.8　设 $\boldsymbol{U}$ 是相应于吸引集 $\boldsymbol{A}$ 的收缩域，则有下列性质：

(a)$\boldsymbol{A}$ 是闭集(含其边界)；(b)$\boldsymbol{A}$ 是正、负不变集；(c)若 $\boldsymbol{X}_0\in\boldsymbol{U}$，则 $\omega(\boldsymbol{X}_0)\subset\boldsymbol{A}$；(d)若 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的双曲不动点，则 $W^u(\boldsymbol{X}_0)\subset\boldsymbol{A}$；(e)若 γ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的双曲周期轨，则 $W^u(\gamma)\subset\boldsymbol{A}$. 283

证明　(a)$\boldsymbol{U}$ 的闭包是包含 $\boldsymbol{U}$ 的最小闭集，是由 $\boldsymbol{U}$ 加上它的边界点而组成的(见附录 A 有关开集、闭集、内部、闭包的详细讨论). 若利用这一新集，则得到相同的交集，因为对于正的时间，$\boldsymbol{U}$ 的闭包(在流作用下)进入 $\boldsymbol{U}$ 内，但闭集的交集仍是闭的，故 $\boldsymbol{A}$ 是闭集.

(b)若 $p\in A$，则对所有的 t，有 $p\in\phi(t;\ U)$．类似地，对任一实数 s，$\phi(s;\ p)\subset\phi(s;\ \phi(t;\ U))=\phi(s+t;\ U)$(对所有的 t 成立)，又

$$A=\bigcap_{t\geqslant -s}\phi(s+t;U),$$

故 $\phi(s;\ p)\in A$.

(c)条件 $\phi(t;\ U)$ 收敛于 A 类似于渐近稳定定义中的条件不动点是 L 稳定的，它说明对任意 $x_0\in U$，有 $\omega(x_0)\subset A$．事实上，令 $x_0\in U$，则 $\phi(t\ ;\ x_0)\subset\phi(s;\ U)(t\geqslant s\geqslant 0)$，由于 ω 极限集是通过取趋于∞的 t_n 来定义的，对任意 $s\geqslant 0$ 一定有 $\omega(x_0)\subset\phi(s;\ U)$．取所有这样的 s 取交集，可得 $\omega(x_0)\subset A$.

(d)由于 $x_0\in A$，则一定有 $x_0\in\mathrm{int}U$，故对某 $r>0$，x_0 的局部不稳定流形 $W_r^u(x_0)$ 一定包含在 U 中．又

$$\phi(t;U)\supset\phi(t;W_r^u(x_0))\supset W_r^u(x_0)\quad(t\geqslant 0),$$

则 $W_r^u(x_0)\subset A$，又因为 A 是正不变集，故

$$W^u(x_0)=\bigcup_{t\geqslant 0}\phi(t;W_r^u(x_0))$$

一定包含于 A.

(e)的证明类似于(d).　■

洛伦兹系统

引理 7.9.1　对 $\sigma=10$，$b=\dfrac{8}{3}$时，当 $r\geqslant\dfrac{590}{139}\approx 4.2446$ 时点 $P^{\pm}$ 有一个负特征值和一对复特征值，当 $r\geqslant 1.345$ 时很可能也是这样.

证明　该不动点的特征方程为

$$p_r(\lambda)=\lambda^3+\frac{41}{3}\lambda^2+\frac{8(r+10)}{3}\lambda+\frac{160(r-1)}{3}.$$

其中所有的系数为正，故当 $\lambda\geqslant 0$ 时，$p_r(\lambda)$严格递增且没有正根．另外，由于所有系数为正，则必须至少有一个负根($p_r(0)>0$ 且当 $\lambda\to-\infty$ 时 $p_r(\lambda)\to-\infty$，故多项式必对某负的 λ 等于零)．图 7.9.1 是对三个不同的 r 值的特征多项式的图像．对 $r=1.2$，有三个实特征值；对 $r\approx 1.3456171795$，有两个实特征值，其中一个是二重的(这仅是一个 r 的近似值，在这一点 $p_r(\lambda)$与$p'_r(\lambda)$同时等于零)；对 $r=4.3$，仅有一个实特征值，此时必须有两个复特征值.

图 7.9.1d 给出了当 $r=1.3456171795$ 时特征多项式在二重根附近的近视图(因为这时的图像中特征多项式有两个零点，所取 r 值可能太小)，这是使所有特征值均为实数时 r 的最后值的近似值．由于$\dfrac{\partial p_r}{\partial r}(\lambda,\ r)>0(\lambda>-20)$，当 r 增加时，图像向上升，这表明当 $r\geqslant 1.345$ 时很可能有一对复特征值.

理论上，要证明对某些 r 特征多项式的一对特征值为复的，应该解出第一个负特征值，将特征多项式因式分解后化简为一个二次多项式，再求解二次多项式的根．实际上完成这一过程是困难的．下面利用 $\lambda=0$ 处的切线来证明特征多项式在较大的临界点处取正值.

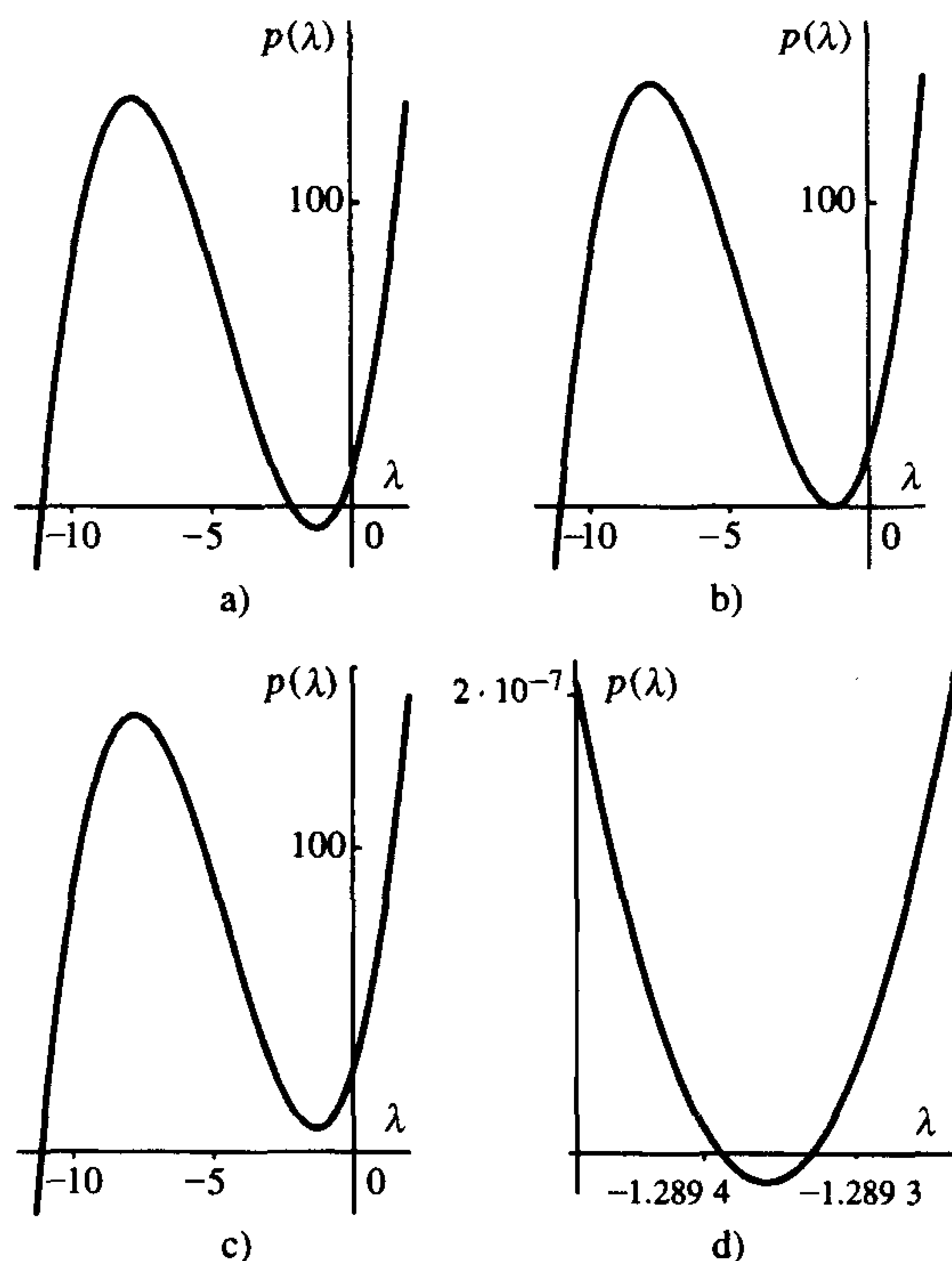


图 7.9.1　特征多项式图像(分别在 $r=1.2$，1.345 617 179 5，1.5；及对 $r=1.345\ 617\ 179\ 5$，较小刻度在 $\lambda=1.269\ 4$ 附近的图)

由于所有系数为正，两个临界点一定是负的，记它们为 $\lambda_r^- < \lambda_r^+ < 0$，又特征多项式是三次的，则 $p_r(\lambda_r^-) > p_r(\lambda_r^+)$. 若 $p_r(\lambda_r^+) > 0$，则有 $p_r(\lambda_r^-) > p_r(\lambda_r^+) > 0$，故有唯一正根 $\lambda_r^1 < \lambda_r^-$ (参见图 7.9.2).

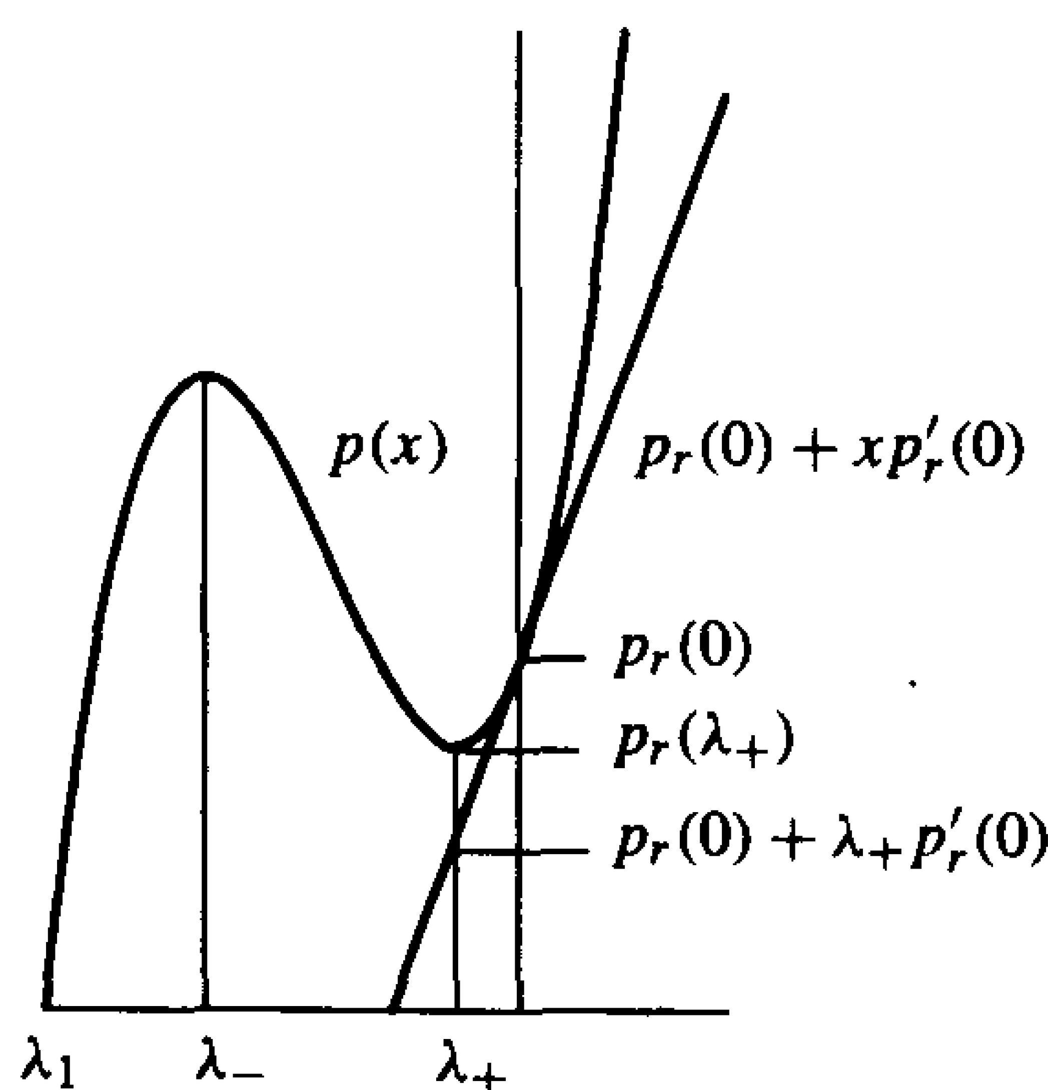


图 7.9.2　特征多项式的一个实根

为证明 $p_r(\lambda_r^+) > 0$，必须求出使 $p'_r(\lambda)=0$ 的临界点：

$$p'_r(\lambda) = 3\lambda^2 + \frac{82}{3}\lambda + \frac{8(r+10)}{3}$$

$$\lambda_r^+ = -\frac{41}{9} + \frac{\sqrt{41^2 - 720 - 72r}}{9} = -\frac{41}{9} + \frac{\sqrt{961 - 72r}}{9}.$$

当 $r^* > \dfrac{961}{72} \approx 13.34$ 时，没有临界点，也一定没有其他实根. 由于使 $p''_r(\lambda)=0$ 的拐点位于 λ_r^- 与 λ_r^+ 之间，当 $\lambda \geqslant \lambda_r^+$ 时，$p''_r(\lambda) > 0$，因此有

$$p_r(\lambda_r^+) \geqslant p_r(0) + p'_r(0)\lambda_r^+ = \frac{160(r-1)}{3} + \frac{8(r+10)}{3}\lambda_r^+,$$

284～285

其中最后一个等式是图像在 $\lambda=0$ 的切线. 因此，若该切线在 λ_r^+ 处是正的，则有 $p_r(\lambda_r^+)>0$. 易见切线在 λ_r^+ 处就是正的，只要

$$\frac{160(r-1)}{3} \geqslant \left(\frac{8(r+10)}{3}\right)\left(\frac{41}{9}-\frac{\sqrt{961-72r}}{9}\right),$$

$$180(r-1) \geqslant (r+10)(41-\sqrt{961-72r})$$

或

$$\frac{139r-590}{r+10} \geqslant -\sqrt{961-72r}.$$

当 $r\geqslant\frac{590}{139}\approx 4.2446$ 时上式左边为正，而右边总为负，于是当 $r\geqslant 4.2446$ 时不等式总成立(从图像上看，不等式对 $r=2$ 也成立).

因此，至少当 $r\geqslant\frac{590}{139}$时，其他两个特征值为复的，对 $r\geqslant 1.345$ 这很有可能也是真的. ■

练习

7.1 吸引子

7.1.1 (洛伦兹系统的椭圆收缩域)对洛伦兹系统，考虑另一限制函数

286

$$L_3(x,y,z)=\frac{rx^2+\sigma y^2+\sigma(z-2r)^2}{2}.$$

a. 计算$\dot{L}_3$.

b. 求数 $C_3>0$，使得当 $L_3(x, y, z)>C_3$ 时，有$\dot{L}_3<0$.

c. 证明所有的解都进入并停留在区域

$$U_3=\{(x,y,z):L_3(x,y,z)\leqslant C_3\}$$

中(即 U_3 为收缩域).

7.1.2 考虑极坐标方程

$$\begin{cases}\dot{r}=r(1-r^2)(r^2-4)\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}$$

a. 画出(x, y)平面上的相图.

b. 该系统的吸引集与吸引子是什么? 解释你的结论，包括这些集合能成为吸引集与吸引子所具有的性质.

7.1.3 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x-2x^3+y(x^2-x^4-y^2).\end{cases}$$

检验函数

$$L(x,y)=\frac{-x^2+x^4+y^2}{2}$$

的导数为$\dot{L}=-2y^2L(x, y)$.

a. 画出相图.

b. 该系统的吸引集与吸引子是什么?

c. 吸引子具有对初始值的敏感依赖性吗?

7.1.4 考虑强迫阻尼钟摆方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y \quad (\bmod 2\pi) \\ \dot{y} = -\sin x - y + \cos\tau \\ \dot{\tau} = 1 \quad (\bmod 2\pi). \end{cases}$$

这里, 视 x 为角变量, 取了 2π 的模, 强迫变量 τ 也取了 2π 的模.

a. 系统的发散量是多少?

b. 若 V_0 是某区域$\mathcal{D}$的体积, 那么区域$\mathcal{D}(t)=\phi(t;\ \mathcal{D})$的体积是多少? ($\mathcal{D}(t)$是由沿着在时刻 $t=0$ 始于$\mathcal{D}$中点的轨线一直到时刻 t 而形成的区域).

c. 说明区域$\mathcal{R}=\{(x,\ y,\ \tau):\ |y|\leq 2\}$是一收缩域, 且 $\bigcap_{t\geq 0}\phi(t;\ \mathcal{R})$是一个吸引集(提示: 在$y=2$与$y=-2$上考察$\dot{y}$).

7.2 混沌

7.2.1 考虑极坐标方程

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2)(r^2-4) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

a. 系统在集合$\{r=1\}$或$\{r=2\}$中的点是否具有对初始值的敏感依赖性? 说明理由.

b. 若系统限制在集合$\{r=1\}$或$\{r=2\}$中是否具有对初始值的敏感依赖性? 说明理由.

c. 集合$\{r=1\}$或$\{r=2\}$是混沌吸引子吗?

287

7.2.2 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2x^3 + y(x^2 - x^4 - y^2), \end{cases}$$

检验函数

$$L(x,y) = \frac{-x^2 + x^4 + y^2}{2}$$

的导数为$\dot{L} = -2y^2 L(x,\ y)$.

a. 系统在集合 $L^{-1}(0)$中的点是否具有对初始值的敏感依赖性? 说明理由.

b. 若系统限制在集合 $L^{-1}(0)$中是否具有对初始值的敏感依赖性? 说明理由.

c. 集合 $L^{-1}(0)$是混沌吸引子吗?

7.3 洛伦兹系统

7.3.1 Rikitake 构造了一个模型用以解释地球磁极的反转, 该微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + yz \\ \dot{y} = -\mu y + (z-A)x \\ \dot{z} = 1 - xy. \end{cases}$$

a. 证明有两个不动点, 其中 x^* 满足

$$(x^*)^2 - (x^*)^{-2} = \frac{A}{\mu},$$

$$y^* = \frac{1}{x^*},$$

$$z^* = \mu(x^*)^2.$$

b. 证明在不动点处的线性化系统的特征方程为

$$\lambda^3 + 2\mu\lambda^2 + \frac{A}{\mu}\lambda + 2A = 0,$$

并且 $\lambda_1 = -2\mu$ 是一个特征值，其余两个特征值为 $\pm i\sqrt{\frac{A}{\mu}}$.

7.3.2 考虑三段映射

$$T(x) = 3x \pmod 1$$
$$= \begin{cases} 3x & 0 \leqslant y < \frac{1}{3} \\ 3x - 1 & \frac{1}{3} \leqslant y < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \frac{2}{3} \leqslant y < 1 \\ 0 & y = 1 \end{cases}.$$

证明该映射具有对初始值的敏感依赖性.

7.4 Rössler 吸引子

7.4.1 证明本章给出的帐篷映射有一点 z^*，使得 $\omega(z^*) = [0, 1]$（提示：与定理 7.3.1(b)进行比较).

7.4.2 考虑锯齿映射

$$S(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ 2 - 3x & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

288

证明 S 具有对初始值的敏感依赖性.

7.4.3 考虑斜率为 ±4 的帐篷映射

$$T(x) = T_4(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ 4 - 4x & 0.5 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

令

$$K_n(4) = \{x_0 : T^j(x_0) \in [0,1], 0 \leqslant j \leqslant n\}$$

与

$$K(4) = \bigcap_{n \geqslant 0} K_n(4) = \{x_0 : T^j(x_0) \in [0,1],\ 0 \leqslant j < \infty\}.$$

a. 描绘集合 $K_1(4)$ 与 $K_2(4)$.

b. $K_n(4)$ 包含多少个区间？每个区间的长度是多少？$K_n(4)$ 的总长度是多少？为什么 $K(4)$ 的长度或测度为零？

c. 利用数以 4 为基的展开式，哪些展式属于康托尔集 $K(4)$？

d. 给出两个数，使得它们含于 $K(4)$ 但不是任一集合 $K_n(4)$ 的端点.

e. 证明集 $K(4)$ 是不可数的.

7.4.4 考虑斜率为 $\pm\beta$ 的帐篷映射，其中 $\beta > 2$，

$$T(x) = T_\beta(x) = \begin{cases} \beta x & 0 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ \beta - \beta x & 0.5 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

令

$$K_n(\beta) = \{x_0 : T^j(x_0) \in [0,1], 0 \leqslant j \leqslant n\}$$

与

$$K(\beta) = \bigcap_{n \geqslant 0} K_n(\beta) = \{x_0 : T^j(x_0) \in [0,1], 0 \leqslant j < \infty\}.$$

a. 描绘集合 $K_1(\beta)$ 与 $K_2(\beta)$；令 $\alpha = 1 - 2\beta$，称康托尔集 $K(\beta)$ 为中间 α 康托尔集的原因是什么？

b. $K_n(\beta)$ 包含多少个区间？每个区间的长度是多少？$K_n(\beta)$ 的总长度是多少？为什么 $K(\beta)$ 的长度或测度为零？

7.5　强迫振荡

7.5.1　考虑强迫达芬微分方程组

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \quad \left(\bmod \dfrac{2\pi}{\omega}\right) \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y + F\cos(\omega\tau). \end{cases}$$

利用发散量，证明当 $\delta > 0$ 时该系统的任何吸引子一定有零体积或关于庞加莱映射来说有零面积.

7.5.2　证明方程组

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \quad (\bmod 2\pi) \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2x^3 + y(x^2 - x^4 - y^2) + F\cos(\tau) \end{cases}$$

的吸引子一定有零体积或关于庞加莱映射有零面积.

289

7.5.3　考虑强迫方程组

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \quad (\bmod 2\pi) \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - \delta y + F\cos(\omega\tau). \end{cases}$$

用数值方法证明当 $\delta = 0.1$ 与 $F = 12$ 时系统有一个混沌吸引子.

7.6　李雅普诺夫指数

7.6.1　对一个常系数微分方程组，其李雅普诺夫指数之和等于发散量. 对于下述双井振子

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 \quad \left(\bmod \dfrac{2\pi}{\omega}\right) \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y + F\cos(\omega s). \end{cases}$$

其李雅普诺夫指数之和等于多少？

7.6.2　考虑无阻尼系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x). \end{cases}$$

任意周期轨的李雅普诺夫指数是多少？

7.6.3　考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2) \\ \dot{z} = -z.\end{cases}$$

a. 证明圆 $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ 是周期轨.

b. 求满足 $x_0^2 + y_0^2 = 1$ 的点$(x_0, y_0, 0)$的李雅普诺夫指数.

c. 满足 $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ 的点$(x_0, y_0, 0)$的李雅普诺夫指数是什么?

7.7 混沌吸引子的检验

7.7.1 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{\tau} = 1 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2x^3 - y(-x^2 + x^4 + y^2).\end{cases}$$

在 7.2.2 节已证明集合

$$\Gamma = \{(\tau, x, y): -x^2 + x^4 + y^2 = 0\}$$

是一个非混沌吸引子.

a. 证明对于 Γ 中任一点(τ_0, x_0, y_0), 其李雅普诺夫指数非零, 且有一个是正的.

290

b. 该系统的特别之处是什么?

第二部分　叠　函　数

第 8 章　动力系统中的叠函数

动力系统是描述系统如何随时间演变而变化的一种规则. 给定初始值或"状态"x_0，可通过这一规则确定在将来某一时间 t 的状态 x_t，例如 x_t 可能是在时间 t 的人口总数. 假如这种描述系统如何随时间演变而变化的规则是确定的(也就是说，原则上可利用这种规则，根据现在的状态确定将来的状态). 这种描绘系统演变方式的规则可由常微分方程表示或者由一个"单位时间"后下一个状态值的函数来确定. 短时期内，可利用这一规则通过叠函数或者微分方程的数值积分得到系统的解. 然而，我们的主要兴趣是系统的长期性态或具有典型初始状态的长期性态. 除非系统的解有明显的表达公式，否则利用该方法去了解其长期性态是很困难的或者说是不可能的，进一步，大多数非线性系统并没有解的明显公式，所以需要建立更多的几何方法以了解其长期性态.

本章利用叠函数确定系统的变化规则. 因为在微积分课程中，更多的是对函数进行图解而非迭代，所以首先来看叠函数自然出现的情况. 随着本书内容的推进，作为决定未来状态的一种方法，函数迭代会显得越来越自然.

8.1　一维映射

本节首先描述投资利润和人口的线性增长问题，并给出这些问题的一个迭代求值公式；接下来讨论的是含群集因子的人口增长问题或人口增长的极限问题，对这一问题，无法根据最初的人口数给出确定后来人口数的解析表达式，对该类型函数的分析需用到后面几章的知识；本节最后通过叠函数自然出现的其他一些情形来研究一维映射.

利润和人口增长模型

例 8.1.1　本节介绍函数 $f_\lambda(x)=\lambda x$ 的迭代如何模拟在离散时间区间上的利润积累.

设在银行存入年单利为 5% 的本金 x_0，一年后利息为 $0.05x_0$，此时账户上的总钱数为 $x_1=x_0+0.05x_0=1.05x_0$. 若把所有这些钱仍存入银行，则第二年后账户上的总钱数为 $x_2=1.05x_1=1.05\times1.05x_0=(1.05)^2x_0$. 如此下去，并设既不从账户上取钱也不投入额外的钱，则 n 年后账户上的总钱数为 $x_n=(1.05)^nx_0$.

一般来说，若利率为 I，则经过一个时期后账户上的钱数为 $x_1=x_0+Ix_0=(1+I)x_0=\lambda x_0$，其中，$\lambda=1+I>1$. 若定义 $f_\lambda(x)=\lambda x$，则 $x_1=f_\lambda(x_0)$. 如果把账户上所有的钱都用来积累利息，那么两个时期后，账户上的钱数将为 $x_2=f_\lambda(x_1)=\lambda x_1=\lambda^2x_0$，这是本金 x_0 的第二次迭代，

记为 $x_2=f_\lambda(x_1)=f_\lambda\circ f_\lambda(x_0)\equiv f_\lambda^2(x_0)$，这里 f_λ^2 表示 f_λ 与其自身的复合. 如此下去，积累利息 n 次后，账户上的总钱数为

$$x_n = \lambda x_{n-1} = f_\lambda(x_{n-1}) = f_\lambda^n(x_0),$$

其中 f_λ^n 表示 f_λ 与其自身的 n 次复合. 在这个例子中，可以用一个简单的公式表示迭代：

$$x_n = \lambda^n x_0.$$

若 $x_0>0$ 且 $\lambda>1$，则当 n 趋于无穷时，迭代值 $x_n=f_\lambda^n(x_0)=\lambda^n x_0$ 趋于无穷，这就是说，如果在银行里存钱，随着时间的推移账户上钱的总数会达到任意多.

仍用同一个函数 $x_n=\lambda^n x_0$，但 $0<\lambda<1$，那么 $f_\lambda(x)$ 表示每个时间周期里死亡率为 $d=(1-\lambda)$ 的人口模型，其中 dx_0 表示每个周期里的死亡人数，剩余人数为 $x_0-dx_0=\lambda x_0$，这样，经过一个时间周期后总人数比开始时要少，如此下去，每一周期后总人数都会减少. 迭代的表示公式与 $\lambda>1$ 时相同，而由于此时 $0<\lambda<1$，所以当 n 趋于无穷时，迭代值 $x_n=\lambda^n x_0$ 趋于 0(即总人数会以 λ 决定的速度相继死去). ■

例 8.1.2　在 $n+1$ 时刻和 n 时刻的人口总数之比 x_{n+1}/x_n 给出了单位人口总数的增长系数. 在上面的例题中，这一比为常数. 如果单位人口总数的增长系数随人口总数的变化而变化，则可得到更复杂的模型. 最简单的情形是人口总数的增长是线性的，即

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=a-bx_n \quad 或$$

$$x_{n+1}=x_n(a-bx_n).$$

因此，通过 $x_{n+1}=g_{a,b}(x_n)=x_n(a-bx_n)$，函数 $g_{a,b}(x)=x(a-bx)$ 根据第 n 个阶段的人口数来决定第 $n+1$ 个阶段的人口数. 这里采用离散时间而不是连续时间的原因是每年定期(比如春季)统计一次人口. 这个函数可作为有一个群集因子的人口变化的离散模型. 注意到方程的形式虽然相同，但解释却不同. 差 $x_{n+1}-x_n$ 表示人口的改变量，而 $\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}=(a-bx_n)-1$ 则表示单位人口的增长率，这一增长率仍线性依赖于 x_n，量 $x_{n+1}/x_n=(a-bx_n)$ 则是相邻人口数的比率. 当 $x_n>a/b$ 时，这一比值为负值，这就意味着下一阶段的人口总数为负值(可能有也可能没有物理意义). 在文献[**75**]中，Robert May 利用人口模型对这个函数进行了研究.

294

为简单起见，令 $a=b$，a 是变量，并设 $g_a(x)=g_{a,a}(x)=ax(1-x)$，称该函数为*逻辑斯谛函数*(Logistic function)，该函数的叠函数是一个复杂的且依赖于参数 a 的动力系统.

若 $a=1.5$，则 $g_{1.5}(1/3)=(3/2)(1/3)(2/3)=1/3$ 且 1/3 是不动点或平衡态. 下面证明对任意的 $0<x_0<1$，叠函数 $g_{1.5}^n(x_0)$ 都收敛于不动点 1/3. 例如，如果取 $x_0=0.25$，则有

$$x_1=g_{1.5}(0.25)=0.281\,25,$$

$$x_2=g_{1.5}(0.281\,25)=0.303\,222\,7\cdots,$$

$$x_3=g_{1.5}(0.303\,222\,7\cdots)=0.316\,918\,0\cdots,$$

$$x_4=g_{1.5}(0.316\,918\,0\cdots)=0.324\,721\,5\cdots,$$

$$x_{21}=g_{1.5}^{21}(0.25)=0.333\,333\,3\cdots.$$

由于对此 a 值，初始值的迭代都收敛于不动点 1/3，所以该不动点表示人口的容纳能力.

若 $a_2=1+\sqrt{5}$，则 $g_{a_2}(1/2)=(1+\sqrt{5})/4$ 且 $g_{a_2}(1+\sqrt{5})/4=1/2$ 是周期为 2 的轨道．事实上，满足 $0<x_0<1$ 的大多数 x_0 的迭代都收敛于周期为 2 的轨道而不趋于不动点．当 n 趋于无穷时，$g_{a_2}^n(x_0)$ 交替趋近于 $(1+\sqrt{5})/4$ 和 1/2.

若 $a=3.839$，则存在周期为 3 的点：$x_0=0.149\,888\cdots$，$x_1=0.489\,172\cdots$，$x_2=0.959\,300\cdots$，且 $x_3=0.149\,888\cdots$ 和 x_0 的值相同．虽这些不是准确值，但可以精确到小数点的第六位数字；且仍有一个周期为 3 的点与其几乎相等．这样的固定函数(固定的环境)可导致人口总数的循环性态，此外其他初始值都不会收敛于这一循环性态，所以此迭代方案不具有内在容纳力，既不是吸引稳定态也不是吸引循环态.

最后，当 $a=4.0$ 时，迭代序列对初始值 x_0 有很强的依赖性，即使对确定的系统，迭代结果也是随机产生的．这在以后的学习中会逐渐体会到. ■

例 8.1.2 说明单变量的叠函数具有非常复杂的性态，而本书第一部分所研究的相应微分方程却具有较简单的动力学性态．本例也说明代数形式非常简单的函数却可能导致混沌的出现．此函数只是一个稍具非线性(二次的)，但其动力学性态却非常复杂．对于此函数不存在用含 x_0 的一个简单公式来给出其所有的迭代值，当 n 足够大时确定 x_n 的唯一方法是 n 次利用函数 g_a.

对足够大的 x，还有一些不会为负数的人口增长模型，但可能变得非常小．下面给出两个这样的模型：

$$x_{n+1}=\alpha x_n e^{-\beta x_n},\text{其中 }\alpha\text{ 和 }\beta\text{ 为正}$$

[295]

和

$$x_{n+1}=\frac{ax_n}{1+bx_n},\text{其中 }a\text{ 和 }b\text{ 为正.}$$

这两个模型将在 9.7.2 节中详细讨论.

经济学中的迭代

许多经济学理论中都谈到寻找平衡，所以它是一种静态理论；而调整经济以使其达到平衡的理论是动力学理论，这一点并未被人们完全理解，但仍有很多情形会产生叠函数．一种是资本的构成，它研究的是再投资和产量的增加问题．科布-道格拉斯(Cobb-Douglas)产量函数可表示为

$$Q=AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

其中 K 是投入的资本，L 是劳动力成本，Q 是产量，参数 A 和 α 分别满足 $A>0$，$0<\alpha<1$．设 σ 是在下一个单位时间可获得的产量，则 $K_1=\sigma Q$；设劳动力成本有增长因子 $1+\lambda$，则 $L_1=(1+\lambda)L$．那么资本与劳动力成本的比率 K/L 从一个时期到下一个时期的变化情况可由如下方程给出：

$$k_1=\frac{K_1}{L_1}=\frac{\sigma AK^{\alpha}L}{L^{\alpha}(1+\lambda)L}$$

$$=\left(\frac{\sigma A}{1+\lambda}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=\frac{\sigma Ak^{\alpha}}{1+\lambda}.$$

叠函数为

$$k_{n+1} = f(k_n) = \frac{\sigma A k_n^{\alpha}}{1+\lambda}. \tag{8.1.1}$$

因此，一个时期内资本与劳动力的比率就决定了下一个时期的比率. 在 9.7.1 节和 11.5.1 节都会再讨论这个模型.

牛顿法求根

例 8.1.3 人们有时对多项式或一个更一般函数 $f(x)$ 的求根问题(即 $f(x)=0$ 中 x 的值)非常感兴趣. 理论上讲，对任何多项式都可以通过分解因式求它的实根或复根. 对于一个高次多项式来说并没有求根的代数公式，当不存在根的代数式时求根的近似值就有很重要的实际意义. 牛顿法(或牛顿 Raphson 法)是求根的近似值的一种迭代法.

假设 x_0 是根的初始假设值，则 f 在 x_0 处图的切线可表示为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

该切线是函数在 x_0 附近最好的线性(仿射)近似. 该切线与 x 轴相交于 x_1，此时 $y=0$，所以

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

或

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

只要切线不是水平直线即 $f'(x_0)\neq 0$，该公式都成立参见图 8.1.1. 再次从 x_1 开始，可得 x_2，它是在 x_1 的切线与 x 轴的交点，所以

296

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

若设

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

则 $x_1 = N(x_0)$，$x_2 = N(x_1)$. 这样导出的映射 N 称为函数 f 的牛顿映射(Newton map for the function f). 重复这一推导过程，若 x_n 是根的第 n 个近似值，可得第 $n+1$ 个近似值

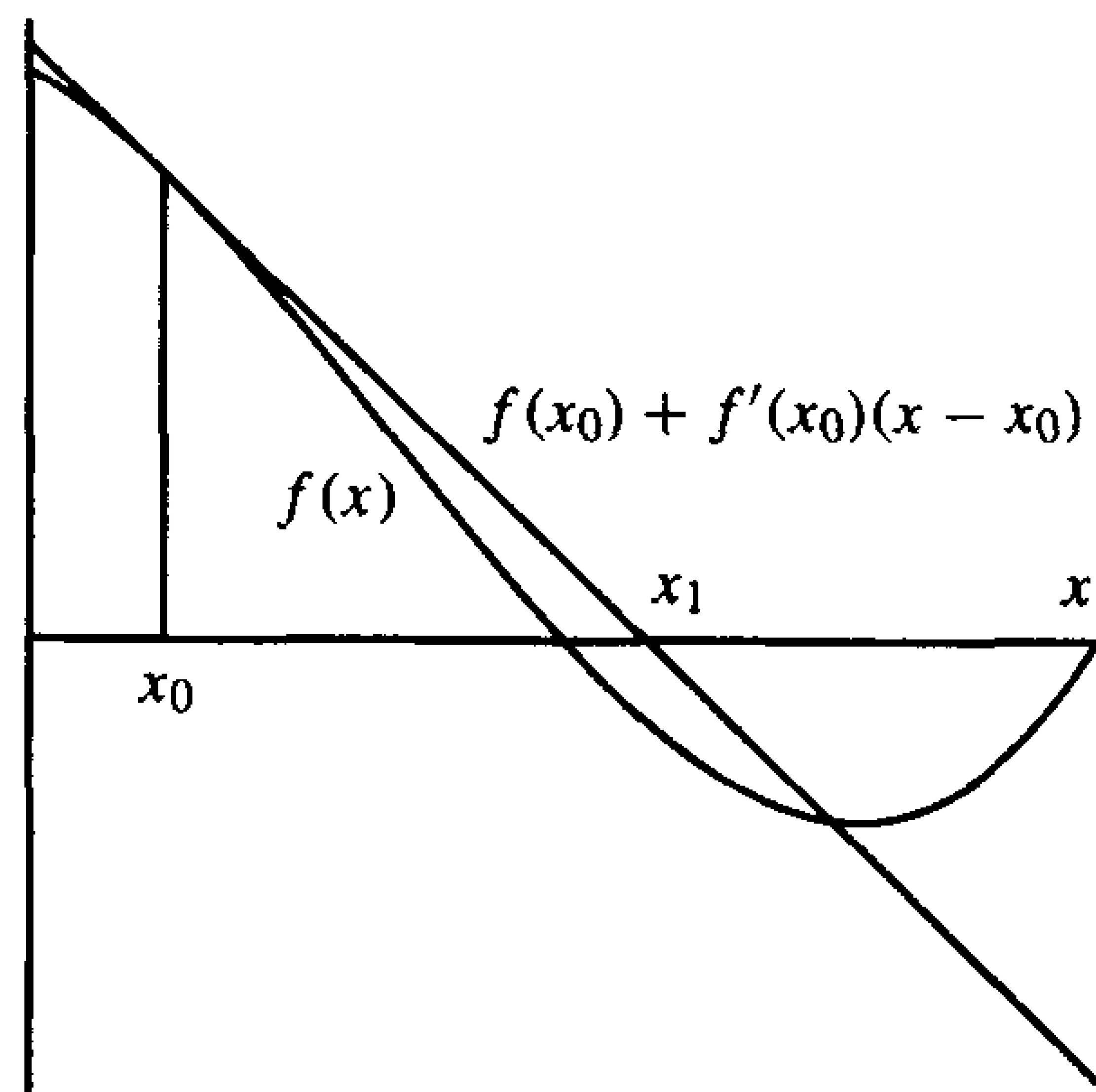


图 8.1.1　$f(x)$ 的牛顿映射图

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

若初始假设值足够好(事实上大多数初始假设值是这样)，则当 n 趋向于无穷时，迭代序列都收敛于多项式的某个根.

以 $f(x)=x^4-2$ 为例，其实根为 $x^{\pm} = \pm 2^{\frac{1}{4}}$，此函数 f 的牛顿映射为

$$N(x) = x - \frac{x^4-2}{4x^3}.$$

若取初始假设值为 $x_0 = 1$，则

$$x_1 = N(1) = 1 - \frac{-1}{4} = 1.25,$$

$$x_2 = N(x_1) = 1.25 - \frac{1.25^4 - 2}{4 \cdot 1.25^3} \approx 1.1935000,$$

$$x_3 = N(x_2) \approx 1.1892302\cdots,$$

$$x_4 = N(x_3) \approx 1.1892071\cdots,$$

$$x_5 = N(x_4) \approx 1.1892071\cdots.$$

经过四次迭代后，可得 $|x_4 - x_3| < 3 \cdot 10^{-5}$. 利用 Maple(或计算器)计算可知 $\sqrt[4]{2} = 1.18920711\cdots$，事实上，由前面的公式确实可得出准确到小数点后第七位的根 $x_4 \approx 1.1892071$.

对于高次多项式，导出的牛顿映射可能有周期点或混沌迭代点. 对于这样的初始值，迭代并不收敛于多项式的根，而大多数的初始值的迭代确实收敛于多项式的根. 当然，如果在根的附近开始迭代，迭代会迅速收敛于这一根. ■

297

平面微分方程的庞加莱映射

例 8.1.4 第一部分中多处用到庞加莱映射分析微分方程组. 对 6.3 节的李纳系统(或 Van der Pol 系统)，从正 y 轴到其本身的返回映射是一个单变量映射. 图 8.1.2 表明轨线在 $Y=(0, y)$ 处离开 y 轴，然后进入第一象限，并最终返回到 y 轴，交 y 轴于 $Y''=(0, y'')$，$y''>0$. 从 Y 到 Y'' 就确定了 y 轴到其自身的函数 P. 利用这一映射可证明系统有唯一的周期轨，在证明过程中叠函数的一些动力学理论曾被建立. 本书第二部分对动力系统的叠函数进行比第一部分更为系统的研究. ■

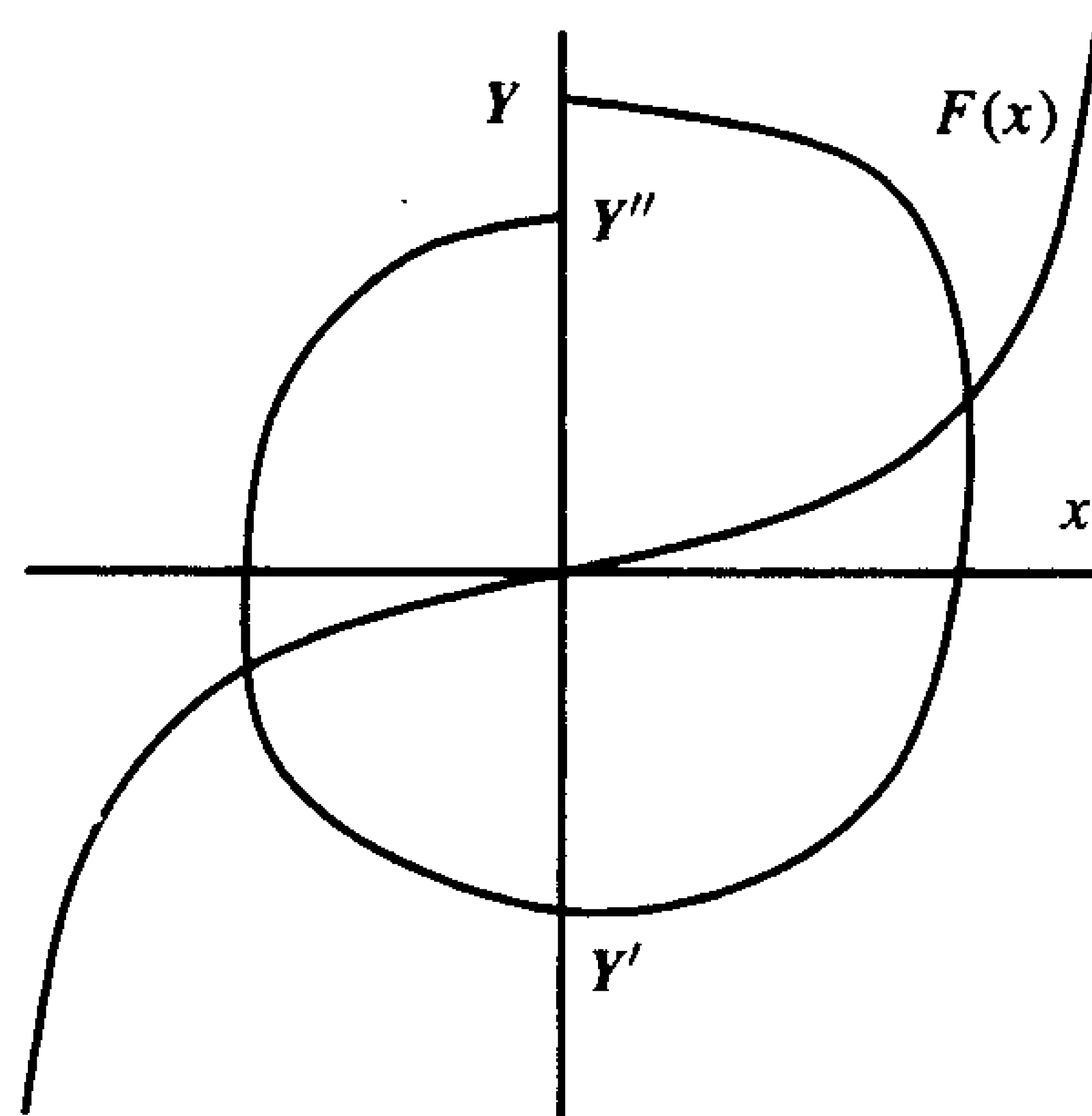


图 8.1.2 李纳系统的轨道图

8.2 多变量函数

种群的阶段性增长

例 8.2.1 多数情况下，一个合理的种群总量增长模型必须考虑其多个不同的生命阶段. 例如，粉甲(虫)的生长过程经历幼虫、蛹和成虫三个阶段. Costantino, Desharnais, Cushing 和 Dennis 在文献[**28**]中指出，由粉甲(虫)繁殖的离散属性可知其总量增长模型应通过迭代得到. 令第 n 个时间段幼虫的总量为 L_n，蛹的总量为 P_n，而成虫的总量是 A_n，那么第 $n+1$ 个时间段幼虫、蛹和成虫总量的简单线性模型可用第 n 个时间段的总量表示为

$$L_{n+1} = bA_n$$
$$P_{n+1} = (1-\mu_L)L_n$$
$$A_{n+1} = (1-\mu_P)P_n + (1-\mu_A)A_n,$$

其中 b 是根据成虫总量得到的幼虫出生率，μ_L 是幼虫的死亡率(它们并不转变为蛹)，μ_P 是蛹的死亡率(它们并不转变为成虫)，而 μ_A 则是成虫的死亡率. 事实上，只有少量的蛹在蜕变为成虫前死亡，所以可取 $\mu_P = 0$.

298

对粉甲(虫)而言，自相残杀也会对其总量产生影响. 当总量过剩时，成虫会吃掉蛹和未孵化出的卵(未来的幼虫)，而幼虫也会吃卵. 这些因素都会影响下一阶段幼虫和成虫的数量，考虑这些因素的模型可表示为

$$L_{n+1} = bA_n e^{-C_{LA}A_n} e^{-C_{LL}L_n}$$

$$P_{n+1} = (1-\mu_L)L_n$$

$$A_{n+1} = P_n e^{-C_{PA}A_n} + (1-\mu_A)A_n,$$

其中量 $\exp(-C_{LA}A_n)$ 和 $\exp(-C_{LL}L_n)$ 表示卵没有被总量为 A_n 的成虫和总量为 L_n 的幼虫吃掉的概率，而量 $\exp(-C_{PA}A_n)$ 是蛹变为成虫的生存概率.

当参数值分别为 $b=4.88$，$C_{LL}=0$，$C_{LA}=0.01$，$C_{PA}=0.005$，$\mu_L=0.2$ 和 $\mu_A=0.01$ 时，数值模拟显示其收敛于生存平衡点，而且有 $L\approx 21.797\,75$，$P\approx 15.977\,75$ 和 $A\approx 530.873\,62$. 因此，存在吸引最初正的种量的稳定不动点. 如果参数 μ_A 的值变为 0.96 而参数 C_{PA} 变为 0.5，那么不动点将变为不稳定，而由此产生的数值迭代也不会趋于不动点或低周期的周期点，但是会呈现出复杂的动力学行为，即“混沌”. 对该模型的进一步探讨详见 12.5.3 节. ■

Hénon 映射

例 8.2.2 与前面几例相比，该例题人为的因素更多些，但它却给出了含两个变量的重要函数，已被广泛研究. 如上例，设有两个种量分别设为 x 和 y 的不同的年龄组，如果种量 y 第 $n+1$ 个阶段与 x 在 n 阶段相等，即 $y_{n+1}=x_n$，那么第 $n+1$ 个阶段的种量 x 可通过方程 $x_{n+1}=a-by_n-x_n^2$ 用第 n 个阶段的种量 x 和 y 表示，其中 a 和 b 是参数，它们在迭代过程中是固定的. 结合上面两式可得从$\mathbb{R}^2$ 到$\mathbb{R}^2$ 的函数，即 Hénon 映射(Hénon map)：

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = F_{a,b}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-by_n-x_n^2 \\ x_n \end{bmatrix}.$$

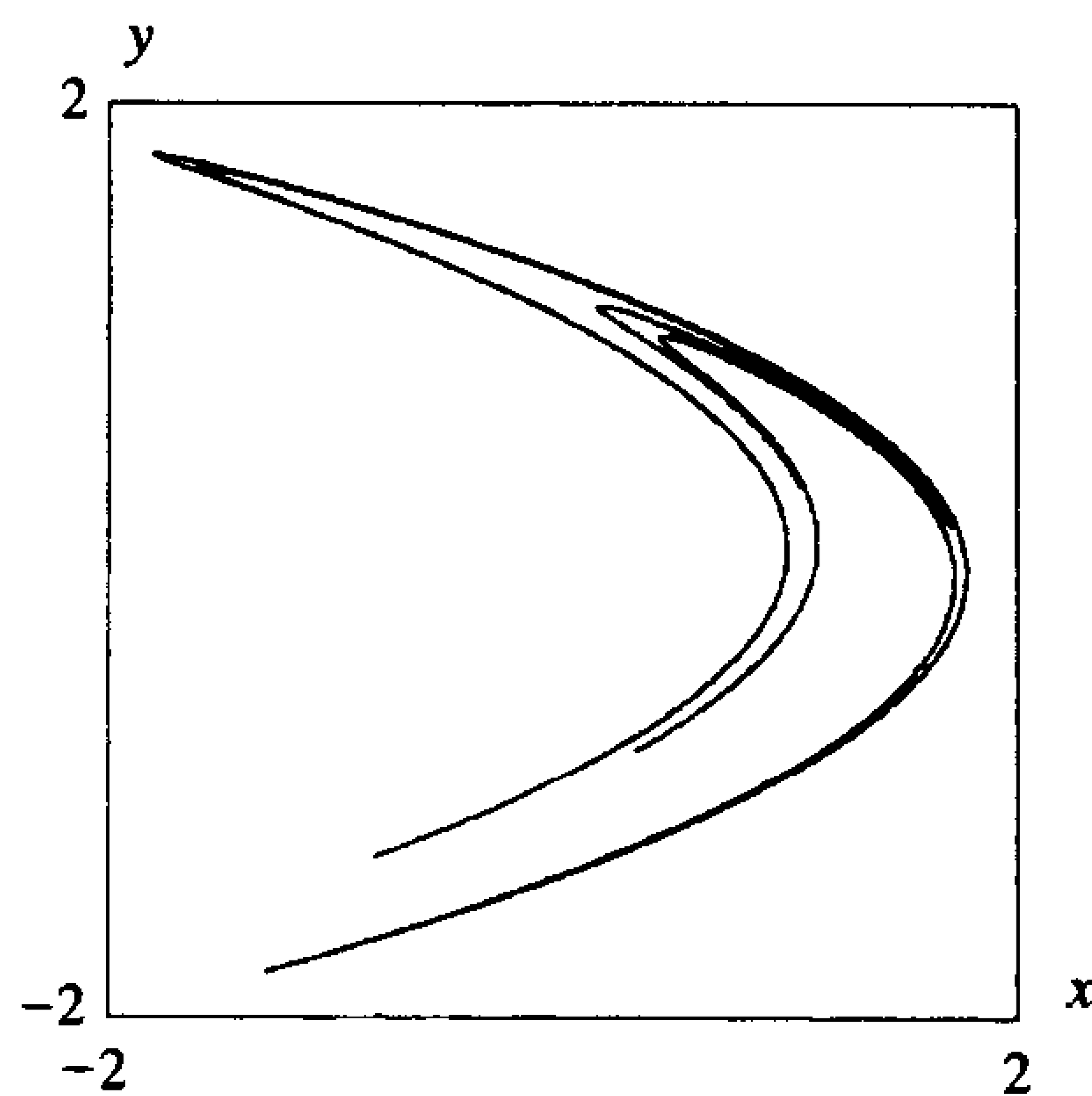


图 8.2.1　Hénon 吸引子

M. Hénon 作为一个显式映射引入该函数，它不但可以利用计算机进行数值计算而且具有很多有趣的动力学性态. 当 $a=1.4$，$b=-0.3$ 时，像 $(x_0, y_0)=(0, 0)$ 这样的初始值，叠函数收敛于一个非常复杂的点集，即 Hénon 吸引子(Hénon attractor)，参见图 8.2.1，该图表示的是单轨道上的点图. ■

时变微分方程组

如前所述，第一部分探讨了几种情形下微分方程组的庞加莱映射. 对洛伦兹系统而言，从 $z=28$ 到其自身的返回映射确定了一个两变量映射，该映射的重要性质可由一个单变量映射来体现，但这是该微分方程组所特有的.

299

例 8.2.3 在 7.5 节曾简要探讨含强迫项的达芬方程，该微分方程等价于

$$\dot{\tau} = 1 \quad (\mathrm{mod}2\pi/\omega)$$
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3 - \delta y + F\cos(\omega\tau),$$

其中 τ 是时间变量. 取初始值为 $(\tau, x, y) = (0, x_0, y_0)$ 并考虑其解，当 τ 从 0 连续变化到 $2\pi/\omega$ 可得从 (x_0, y_0) 到 (x_1, y_1) 的映射，因此庞加莱映射是两个变量的映射. 图 8.2.2 是 $F=0.4$，$\delta=0.25$ 和 $\omega=1$ 时庞加莱映射的单轨图. ■

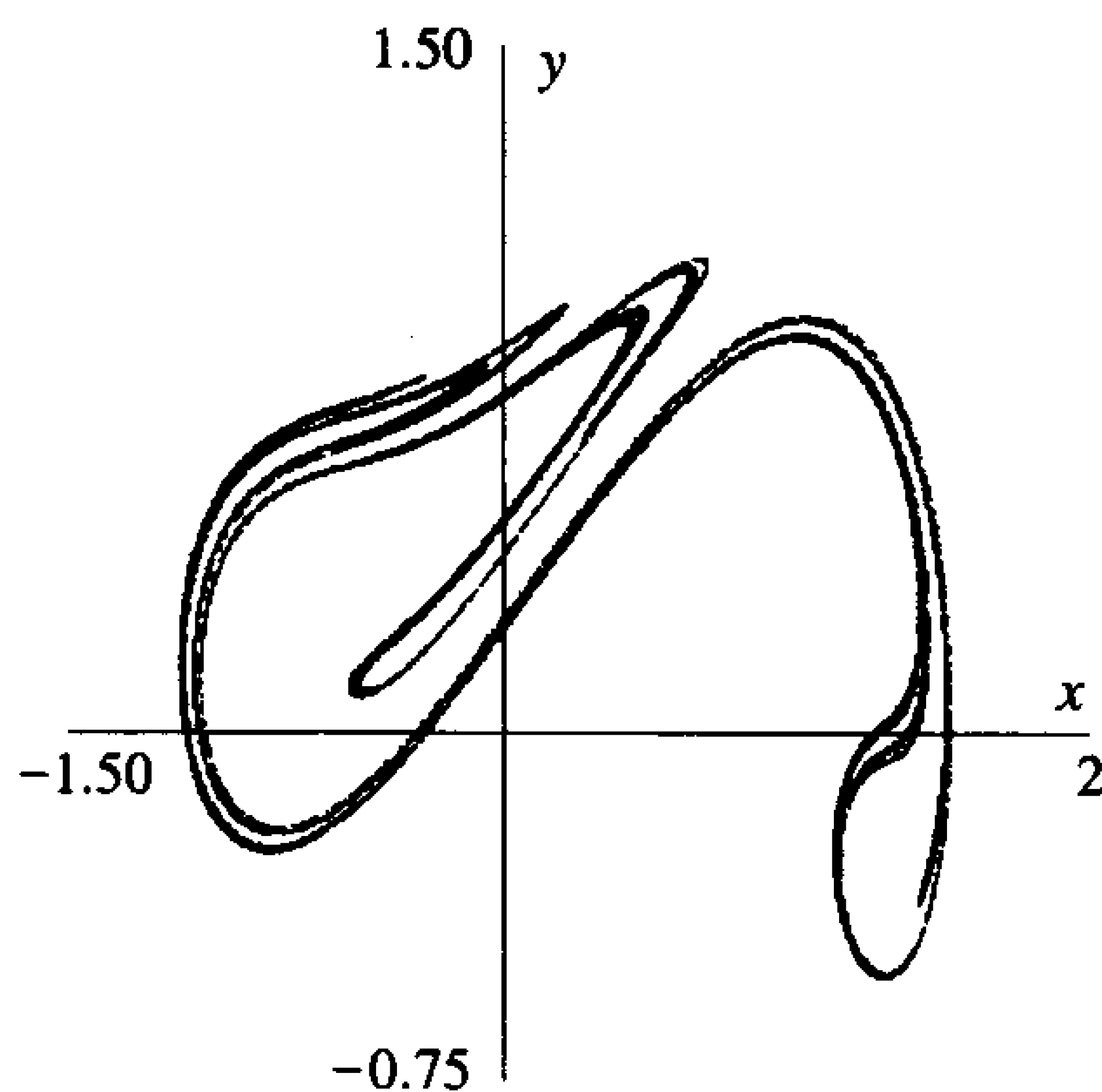


图 8.2.2　系统(7.5.1)的庞加莱映射图（当 $F=0.4$，$\delta=0.25$ 和 $\omega=1$ 时）

马尔可夫链

最后一个例子是线性的：有两个租用汽车点，假设从第 i 个租车点租出汽车而归还到第 j 个租车点的概率为 p_{ij}，如果每辆汽车总被归还给两个租车点中的一个，则

$$p_{11} + p_{12} = 1$$

和

$$p_{21} + p_{22} = 1.$$

首先设第一个租车点的车辆与总车辆数之比为 $x_1^{(0)}$，第二个租车点的车辆与总车辆数之比为 $x_2^{(0)}$，若两个租车点的汽车全部租出，又全部被归还，则在时间 1 时，在第一个租车点有 $x_1^{(1)} = p_{11}x_1^{(0)} + p_{21}x_2^{(0)}$，在第二个租车点有 $x_2^{(1)} = p_{12}x_1^{(0)} + p_{22}x_2^{(0)}$，这一转换过程可用矩阵乘法表示为

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

这一方程用时间 0 时汽车的分布情况来表示时间 1 时汽车的分布情况. 假设从一个租车点租出而在下个阶段还到另一个租车点的汽车比例在一定的时间里是恒定的，那么在时间 $n+1$ 时两个租车点的汽车分布情况可由时间 n 时的汽车分布情况表示为

$$(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

这样从一个状态到另一个状态的转换过程称为一个马尔可夫链(Markov chain). 不难发现长期的稳定状态是与特征值为 1 对应的行特征向量.

例如，

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

则稳定态为

$$(x_1^{(\infty)}, x_2^{(\infty)}) = (0.6, 0.4).$$

读者自己可以证明这一结论(注意：它是特征值为 1 的行特征向量，另一特征值是 0.5). 在 12.5.1 节将对马尔可夫链进行进一步剖析.

300
≀
301

第9章　一维映射的周期点

在第8章，我们讨论的几个例子中都很自然地出现了函数的迭代，从这一章开始，我们将要介绍一些分析迭代过程的方法．无论是从计算还是从几何上来说，把实数轴$\mathbb{R}$映到自身的一维映射都要比高维空间中的映射简单，因此先从这类函数开始讨论，这一章主要考虑一维映射的周期点和迭代后趋向于周期轨道的点的集合(即周期轨道的吸引域)，后面两章将讨论一维映射更加复杂或混沌的动力学行为．在第12章，我们将开始考虑高维空间中映射的动力学行为.

9.1　周期点

在这一部分，我们将给出有关点的迭代和周期点的最简单的定义，对于某些简单函数，我们可以通过解代数方程找出具有低周期的点，对其他一些简单的函数，我们可以通过函数的图像及该函数的幂的图像的性质找出它的周期点.

在给出定义之前，先考虑一个简单函数的迭代.

例 9.1.1　考虑余弦函数$f(x)=\cos x$，其中x采用弧度制，若取$x_0=1$，则以它为初始值的反复迭代为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \cos(x_0) = 0.540\,302\,3\cdots\\
x_2 &= \cos(x_1) = 0.857\,553\,2\cdots\\
x_3 &= \cos(x_2) = 0.654\,289\,8\cdots\\
x_4 &= \cos(x_3) = 0.793\,480\,4\cdots\\
x_5 &= \cos(x_4) = 0.701\,368\,8\cdots\\
x_6 &= \cos(x_5) = 0.763\,959\,7\cdots\\
x_7 &= \cos(x_6) = 0.722\,102\,4\cdots\\
x_8 &= \cos(x_7) = 0.750\,417\,8\cdots\\
x_9 &= \cos(x_8) = 0.731\,404\,0\cdots\\
x_{10} &= \cos(x_9) = 0.744\,237\,4\cdots
\end{aligned}
$$

303

最终这个迭代序列将收敛于$x_\infty=0.739\,085\,133\,2\cdots$，对此极限，我们有$\cos(x_\infty)=x_\infty$，这表明$x_\infty$被迭代成自身．图9.1.1给出了迭代序列$x_n$的图像．而且不存在把$x_n$用$x_0$表示的显式公式，因此要得到收敛于$x_\infty$的点列，就必须反复利用余弦函数.

余弦函数的*不动点*是指一个数x^*，它满足$x^*=\cos(x^*)$；对于x^*，由实数对$(x^*, \cos(x^*))=(x^*, x^*)$所确定的点一定落在直线$y=x$上，因此可以通过观察余弦函数的图像与直线$y=x$的交点找到所有满足$x^*=\cos(x^*)$的点$x^*$，从图9.1.2可以看出，显然在0到$\pi/2$之间存在一个这样的点，它就是上面通过迭代得到的数$x_\infty$.

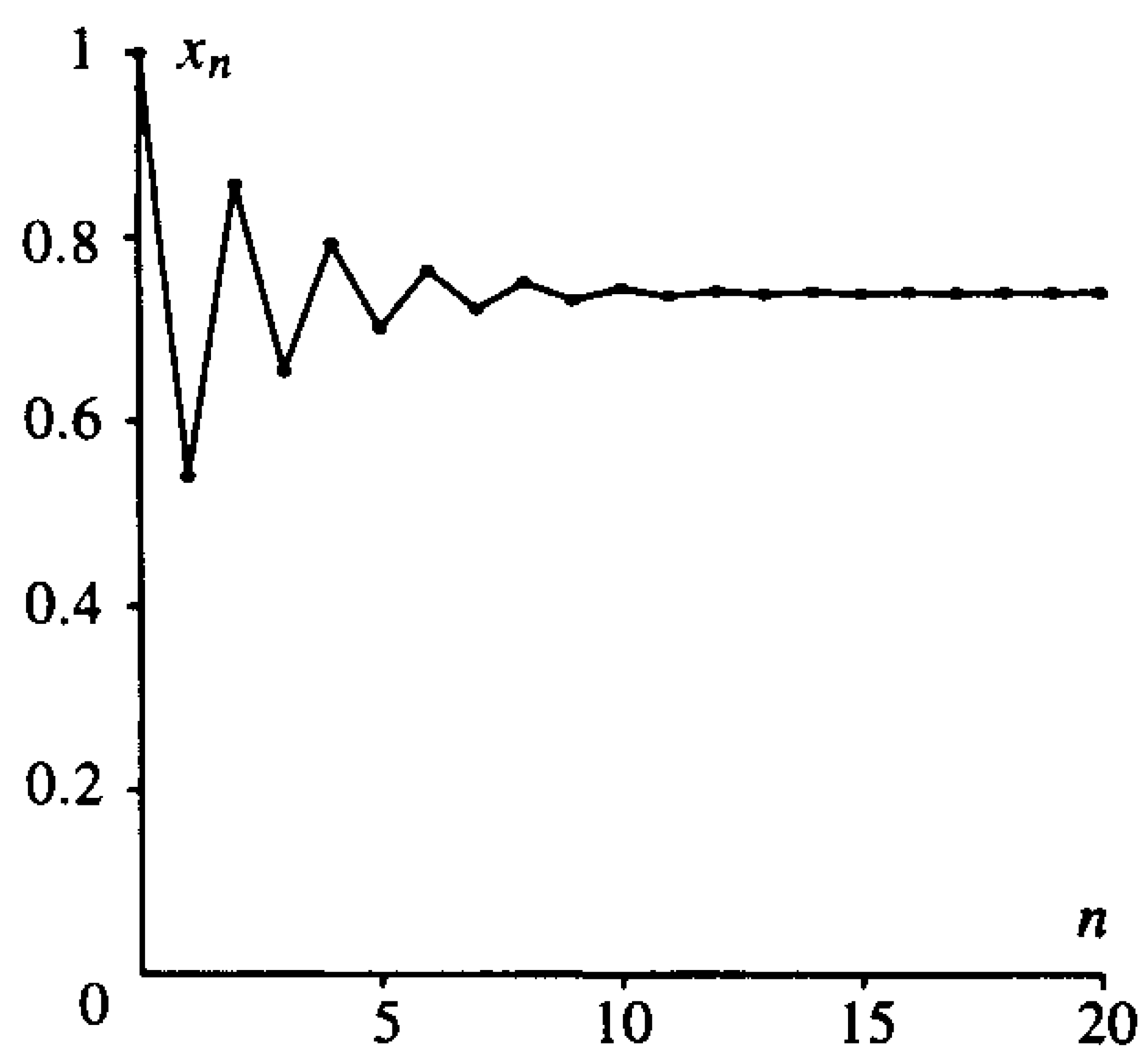


图 9.1.1　迭代序列 $x_n=\cos(x_{n-1})$ 的图像

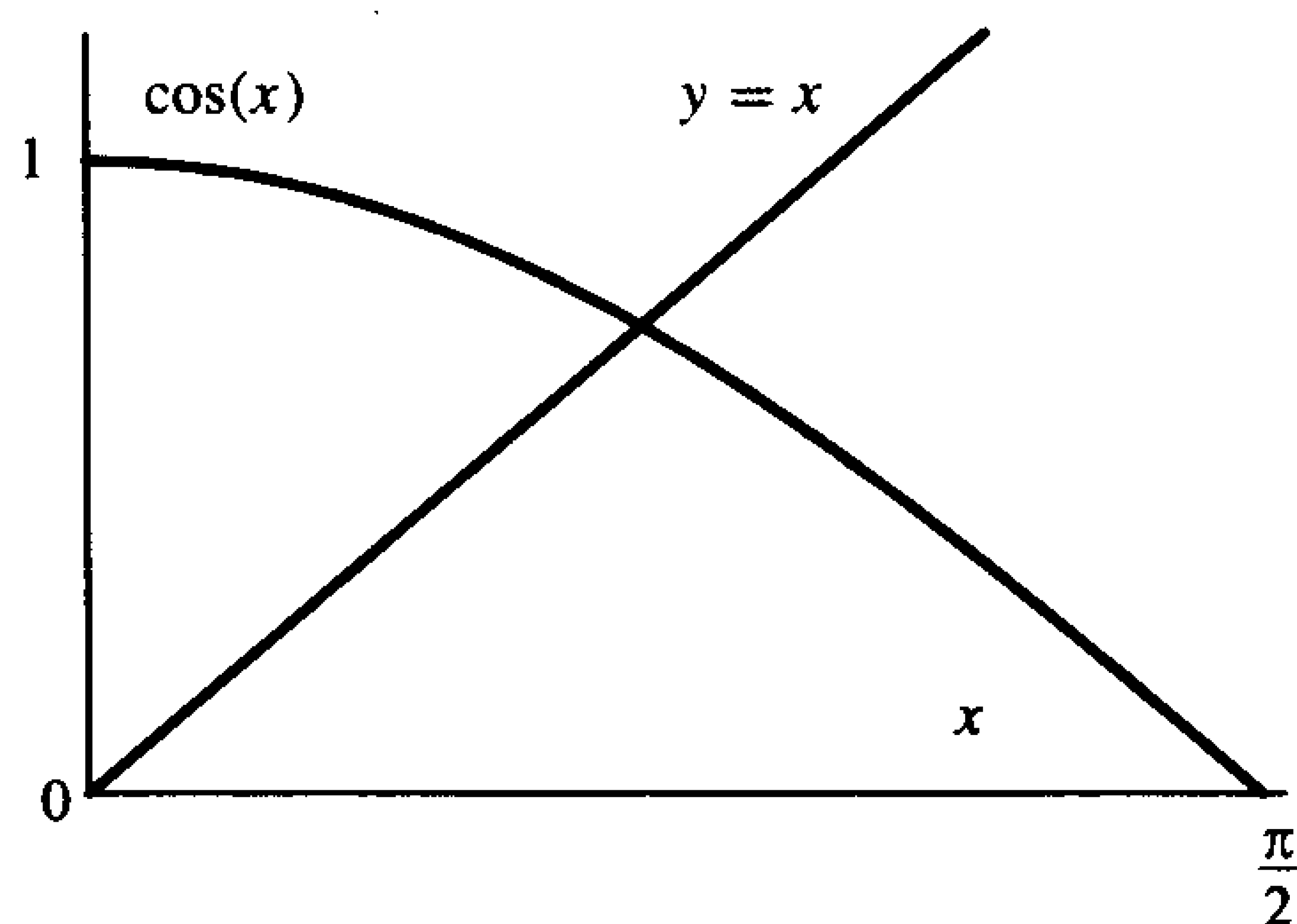


图 9.1.2　$\cos(x)$ 和 $y=x$ 的图像 ■

304

尽管我们很少计算一个函数与自身复合(即函数的幂)的公式，为方便起见，我们还是要给出函数的幂的一些记号，用 $f^0(x)=x$ 表示 $f(x)$ 第 0 次迭代即单位映射，用 $f^1(x)$ 表示 $f(x)$，$f^2(x)$ 表示 f 与 f 的复合，即

$$f^2(x)=f(f(x)).$$

依此类推，

$$f^n(x)=f(f^{n-1}(x)),$$

它是 f 与自身的 n 次复合，需要特别指出的是 $f^2(x)$ 并不表示 $f(x)$ 的平方而是表示 f 与自身的复合，即 $f^2(x)\neq(f(x))^2$，例如令 $f(x)=x^3$，则

$$f^2(x)=f(x^3)=x^9\neq x^6=(x^3)^2=(f(x))^2.$$

利用这些记号，初始值 x_0 的迭代，可记为 $x_1=f(x_0)$，$x_2=f(x_1)=f^2(x_0)$，以及

$$x_n=f(x_{n-1})=f^n(x_0).$$

由 f 确定的 x_0 的前行轨道(forward orbit)是指所有 x_0 的迭代点的集合，记作

$$\mathcal{O}_f^+(x_0)=\{f^j(x_0):j\geqslant 0\}.$$

上式中的加号表示考虑的是正向迭代；以后，当考虑可逆映射时，我们将讨论包含正向迭代和负向迭代的 x_0 的整条轨道.

例 9.1.2　令 $f(x)=-x^3$，它的不动点满足

$$\begin{aligned}x&=f(x)\\0&=-x^3-x\\&=-x(x^2+1).\end{aligned}$$

由于 $x^2+1\neq 0$，所以它有唯一的不动点 $x=0$.

对此映射，先计算 $f^2(x)$，再解方程 $0=f^2(x)-x$ 就可得到 $f^2(x)$ 的不动点：

$$\begin{aligned}f^2(x)&=f(-x^3)=-(-x^3)^3=x^9,\\0&=f^2(x)-x\\&=x^9-x\\&=x(x^8-1)\end{aligned}$$

$$= x(x^4-1)(x^4+1)$$
$$= x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$$
$$= x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1).$$

由于$(x^2+1)(x^4+1)\neq 0$，所以方程的根是$x=0$和$x=\pm 1$. 由于$x=0$是f的不动点，所以f^2的不同于f的新的不动点只有± 1，这两个点称为是2-周期点. 因为只有两个这样的点，所以f必把其中一个映成另一个(即$f(1)=-1$，$f(-1)=1$)，直接把$x=\pm 1$代入$f(x)$的表达式，可得相同结论，因此

$$\mathcal{O}_f^+(1)=\mathcal{O}_f^+(-1)=\{1, -1\}$$

是一条2-周期轨道. ■

305

在考虑其他例子之前，我们先给出周期点的一般性定义以及一些记号.

定义 9.1.3 令f是$\mathbb{R}$到自身的映射，如果$f(p)=p$，则称点p是f的不动点；如果$f^n(p)=p$且$f^j(p)\neq p$，$1<j<n$，则称点p是f的n-周期点；若p是f的n-周期点(即$f^n(p)=p$且$f^j(p)\neq p$，$1<j<n$)，则称正整数n是p的周期；有时为了强调n是满足$f^n(p)=p$的最小正整数，还称n是最小周期(least period)，因此不动点就是1-周期点.

若p是n-周期点，则p的周期轨道(periodic orbit)是指集合

$$\mathcal{O}_f^+(p) = \{f^j(p):0\leqslant j<n\},$$

也就是说$\mathcal{O}_f^+(p)$是一条n-周期轨道.

f的不动点的集合记作

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x_0:f(x_0)=x_0\};$$

f的n-周期点的集合记作

$$\mathrm{Per}(n,f) = \{x_0:f^n(x_0)=x_0 \text{ 与 } f^j(x_0)\neq x_0, 0<j<n\}.$$

注 9.1.4 注意，若p是n-周期点，则对任意正整数j，$p_j=f^j(p)$也是n-周期点，事实上，

$$f^n(p_j) = f^n(f^j(p)) = f^{n+j}(p) = f^j(f^n(p)) = f^j(p) = p_j.$$

定义 9.1.5 若存在正整数j使得$f^j(p)$是n-周期点(即$f^n(f^j(p))=f^j(p)$)，则称p是一个最终n-周期点(eventually period-n point).

下面几个例子都存在周期点.

例 9.1.6 设D是一个映射，D把区间[0，1]中任意数加倍后再去掉其整数部分，记作

$$D(x) = 2x \quad (\mathrm{mod}\ 1),$$

其中“(mod 1)”表示去掉整数部分，只保留小数部分$z(0\leqslant z<1)$. 例如

$$1.4(\mathrm{mod}\ 1)=0.4 \quad 与$$
$$2.0(\mathrm{mod}\ 1)=0.$$

(一般地，“$y(\mathrm{mod}\ a)=z$”表示y减去a的整数倍，即仅保留a的小数部分，即z满足$y=ka+z$，$0\leqslant z<a$.)因此$D(x)=2x-k$，其中k是依赖于x的整数，于是$0\leqslant D(x)<1$，我们称这个映射为双倍映射(doubling map)，例如

$$D\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}(\bmod 1)=\frac{1}{3} \qquad 与$$

$$D\left(\frac{1}{2}\right)=1(\bmod 1)=0.$$

当 $0\leqslant x<0.5$ 时，$0\leqslant 2x<1$，从而 $D(x)=2x$；当 $0.5\leqslant x<1$ 时，$1\leqslant 2x<2$，从而 $D(x)=2x-1$；最后，$D(1)=2-2=0$. 因此

$$D(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 0.5\\ 2x-1 & 0.5\leqslant x<1\\ 0 & x=1.\end{cases}$$

图 9.1.3 给出了它的图像.

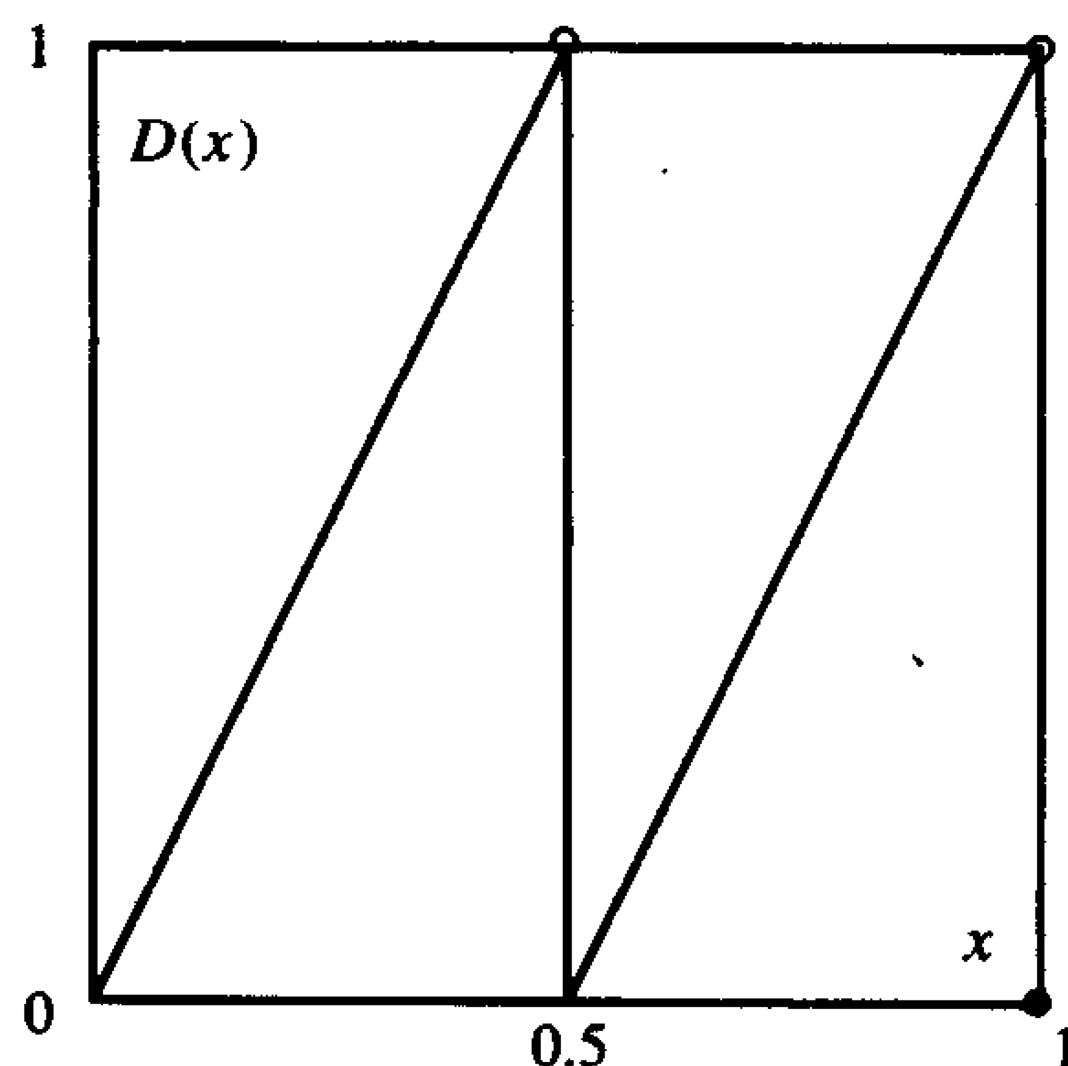


图 9.1.3　双倍映射

306

鉴于在区间 $[0, 0.5)$，$[0.5, 1)$ 及 $\{1\}$ 上 $D(x)$ 的表达式不同，所以有必要分别在上述区间上寻找不动点. 当 $x\in[0, 0.5)$ 时，由不动点满足 $D(x)=2x=x$ 可知，$x=0$ 是不动点；在第二个区间 $[0.5, 1)$ 上，不动点满足 $D(x)=2x-1=x$ 或 $x=1$，此点不在区间 $[0.5, 1)$ 上，从而在区间 $[0.5, 1)$ 上没有不动点；最后，因为 $D(1)=0$，显然 $\{1\}$ 不是不动点. 所以此映射只有一个不动点 $x=0$.

同理，

$$D^2(x)=2^2x \qquad (\bmod 1)$$
$$D^n(x)=2^nx \qquad (\bmod 1).$$

因此，要得到 n-周期点，只需解方程 $D^n(x)=x$，即 $0=D^n(x)-x=2^nx-x-k$，其中 k 是依赖于 x 和 n 的非负整数，所以 n-周期点必满足

$$(2^n-1)x=k \quad 或$$

$$x=\frac{k}{2^n-1}.$$

于是 $\frac{1}{2^4-1}=\frac{1}{15}$，$\frac{3}{2^4-1}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，$\frac{2\cdot 3}{2^4-1}=\frac{2}{5}$，$\frac{3\cdot 3}{2^4-1}=\frac{3}{5}$ 及 $\frac{4\cdot 3}{2^4-1}=\frac{4}{5}$ 都是 4-周期点，注意后四个点在同一轨道上，事实上：$D(1/5)=2/5$，$D(2/5)=4/5$，$D(4/5)=3/5$，$D(3/5)=1/5$.

若 x 满足

$$D^{n+j}(x)-D^j(x)=0$$
$$(2^{n+j}-2^j)x=k \quad 或$$
$$x=\frac{k}{2^j(2^n-1)},$$

则它是最终 n-周期点，特别地，$\frac{1}{28}=\frac{1}{2^2(2^3-1)}$ 是最终 3-周期点，而且所有周期点和最终周期点一定是有理数.

事实上，D 的所有最终周期点恰是$[0,\ 1]$区间上的有理数集，首先考虑区间$(0,\ 1)$上的有理数 $x=\dfrac{p}{q}$，其中 q 是大于等于 3 的奇数，先证对 $0<j<q$，都有 $D(j/q)\neq 0$. 显然 $D(j/q)=2j/q-k$，其中 $k=0,\ 1$；如果 $0=D(j/q)$，则由 $j>0$ 可知 $k\neq 0$，从而 $k=1$，代入等式后得 307 $2j=q$，这表明 q 可被 2 整除，与 q 是奇数矛盾，所以对 $0<j<q$，都有 $D(j/q)\neq 0$，而且 D 把集合

$$\boldsymbol{Q}_q=\left\{\frac{1}{q},\frac{2}{q},\cdots,\frac{(q-1)}{q}\right\}$$

映射到自身. 因为 $\boldsymbol{Q}_q$ 仅包含 $q-1$ 个点，所以此子集中必有点重复出现，$\boldsymbol{Q}_q$ 中每一个点都是最终周期的(进一步可证 Q_q 中所有点都是周期的).

由 0 是不动点和 $D(1)=0$ 可知，$D(D(1))=D(1)$，所以 1 是最终不动的. 区间$(0,\ 1)$上的任意有理数都可表示成 $x=\dfrac{p}{2^jq}$的形式，其中 q 是奇数，当 $j>1$ 时 p 也是奇数. 当 $q=1$ 时，$D^j\left(\dfrac{p}{2^j}\right)=p(\bmod 1)=0$ 是不动点，当然$\dfrac{p}{2^j}$是最终不动点；当 $q\geqslant 3$ 时，$D^j\left(\dfrac{p}{2^jq}\right)=\dfrac{p}{q}(\bmod 1)=\dfrac{p'}{q}$，由上面的讨论可知 $D^j\left(\dfrac{p}{2^jq}\right)=\dfrac{p'}{q}$是最终周期的，所以$\dfrac{p}{2^jq}$也是最终周期的. ■

下面的定理明确了 n-周期点的哪些次的迭代等于它本身.

定理 9.1.7　(a)令 p 是一个 n-周期点，则对任意正整数 k 都有 $f^{kn}(p)=p$，而且若 j 不是 n 的倍数，则必有 $f^j(p)\neq p$；

(b)若 $f^m(p)=p$，则 m 必是 n 的倍数(即 n 整除 m).

证明　(a)若 $f^n(p)=p$，则 $f^{2n}(p)=f^n(f^n(p))=f^n(p)=p$，即 p 是 f^{2n}的不动点，归纳之，则有

$$\begin{aligned}f^{kn}(p)&=f^n(f^{(k-1)n}(p))\\&=f^n(p)=p.\end{aligned}$$

如果 j 不是 n 的倍数，则存在 $0<i<n$ 使得 $j=kn+i$，因为 n 是最小正周期，所以

$$\begin{aligned}f^j(p)=f^{kn+i}(p)&=f^i(f^{kn}(p))\\&=f^i(p)\neq p.\end{aligned}$$

可直接由(a)推出(b). ■

下面例子中介绍的帐篷映射的表达式及图像都与双倍映射的很相似，我们将利用它的图像来寻找周期点，为此需要再引入一些定义和记号.

定义 9.1.8　一个映射 f 的图像是指集合

$$\{(x,f(x))\}.$$

恒等映射的图像称为对角线，记作 Δ：

$$\Delta=\{(x,x)\}.$$

显然，点 p 是映射 f 的不动点当且仅当 $(p, f(p))$ 在对角线 Δ 上；如果 f^k 的图像与对角线在 $x=p$ 时相交，则 p 是周期点而且它的周期可以整除 k，因此寻找周期点转化为讨论 f 的各次幂的图像与对角线的交点的情况.

308

例 9.1.9　令 T 表示帐篷映射(tent map)

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \leqslant 0.5 \\ 2(1-x) & x \geqslant 0.5. \end{cases}$$

图 9.1.4a 给出了映射 T 与其对角线的图像.

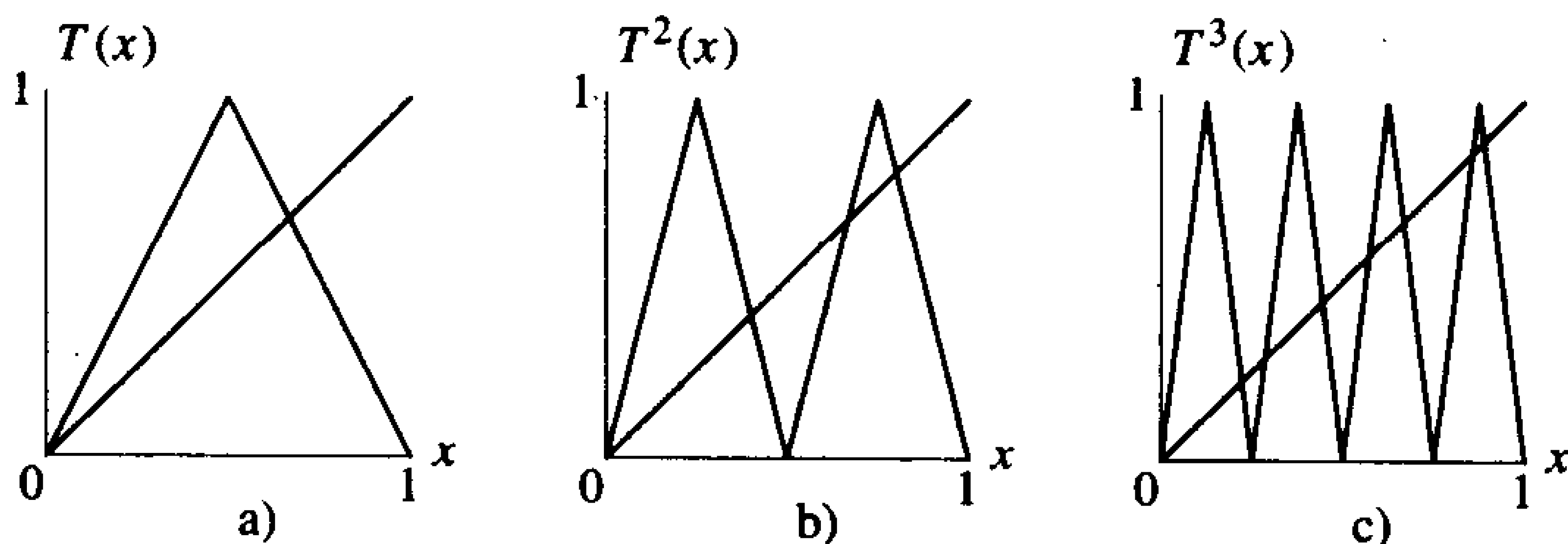


图 9.1.4　帐篷映射 T, T^2 和 T^3 的图像

在讨论 T 的 n-周期点的个数之前，注意

$$T\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7},$$

$$T\left(\frac{4}{7}\right) = 2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}, \quad 且$$

$$T\left(\frac{6}{7}\right) = 2 - \frac{12}{7} = \frac{2}{7},$$

这表明 $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$ 都是 3-周期点.

因为 n-周期点对应于 T^n 的图像与对角线 Δ 的交点，所以要找 n-周期点，就必须先确定 T^n 的图像. 我们希望仅通过 T 的图像来确定 T^n 的图像，下面利用 T 的表达式来确定 T^2 的表达式，因为当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$T^2(x) = T(2x)$，所以当 $0 \leqslant 2x \leqslant \frac{1}{2}$ 或 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$ 时 $T^2(x) = 2(2x) = 2^2 x$；当 $\frac{1}{2} \leqslant 2x \leqslant 1$ 或 $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$T^2(x) = T(2x) = 2(1-2x) = 2^2\left(\frac{1}{2} - x\right)$.

当 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ 时，$T^2(x) = T(2(1-x))$，所以当 $\frac{1}{2} \leqslant 2(1-x) \leqslant 1$ 或 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$ 时 $T^2(x) = T(2(1-x)) = 2[1-2(1-x)] = 2^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$；当 $0 \leqslant 2(1-x) \leqslant 1/2$ 或 $3/4 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $T^2(x) = T(2(1-x)) = 2[2(1-x)] = 2^2(1-x)$.

综上所述，有

$$T^2(x)=\begin{cases}2^2x & 0\leqslant x\leqslant 1/4\\ 2^2(1/2-x) & 1/4\leqslant x\leqslant 1/2\\ 2^2(x-1/2) & 1/2\leqslant x\leqslant 3/4\\ 2^2(1-x) & 3/4\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

T^2 的图像是先从 0 上升到 1，然后回到 0，再升到 1，再回到 0，参见图 9.1.4b.

下面利用 T 的图像确定 T^2 的图像，注意，T 把子区间 $[0, 1/2]$ 映射成 $[0, 1]$：当 x 从 0 取到 1/2 时，$2x$ 的值取遍区间 $[0, 1]$，因此 $T^2(x)=T(2x)$ 在区间 $[0, 1/2]$ 上再现 T 在 $[0, 1]$ 上的图像；特别地，T 把点 $(x=1/4)$ 映射成 1/2，1/2 再被 T 映射成 1，从而 T^2 把点 $(x=1/4)$ 映射成 1，因此 T^2 把区间 $[0, 1/4]$ 映射成 $[0, 1]$；当 x 上升到 1/2 时，1/2 被 T 映射成 1，1 再被 T 映射成 0，从而 T^2 在 1/2 处取值为 0，因此 T^2 也把 $[1/4, 1/2]$ 映射成 $[0, 1]$. 同理，T 把子区间 $[1/2, 1]$ 映射成整个区间 $[0, 1]$，只是次序上是从 1 再到 0，因此 $T^2(x)=T(2(1-x))$ 在区间 $[1/2, 1]$ 上倒向再现 T 在 $[0, 1]$ 上的图像. 因为 T 的正向图像（从 $x=0$ 开始画）与反向图像（从 $x=1$ 开始画）的形状一样，所以 T 在 $[1/2, 1]$ 上的图像又是个"帐篷"；特别地，T 把点 $(x=3/4)$ 映射成 1/2，1/2 再被 T 映射成 1，从而 T^2 把点 $(x=3/4)$ 映射成 1，因此 T 把 1 映射成 0，且有 $T^2(1)=0$，所以 T^2 把子区间 $[1/2, 3/4]$ 和 $[3/4, 1]$ 都映射成 $[0, 1]$. 综合在 $[0, 1/2]$ 和 $[1/2, 1]$ 上的结果可知，在区间 $[0, 1]$ 上 T^2 有两个相似的"帐篷". T^2 的图像中每个帐篷与对角线相交两次（总共相交 2^2 次）.

309

现在考虑三次迭代 $T^3(x)=T^2(T(x))$，第一次迭代 T 把子区间 $[0, 1/2]$ 映射成整个区间 $[0, 1]$，因此 $T^3(x)=T^2(T(x))=T^2(2x)$ 在区间 $[0, 1/2]$ 上再现 T^2 在 $[0, 1]$ 上的图像；另一方面，T 把子区间 $[1/2, 1]$ 映射成整个区间 $[0, 1]$，只是次序上是从 1 到 0，从而 $T^3(x)=T^2(T(x))=T^2(2(1-x))$ 在区间 $[1/2, 1]$ 上倒向再现 T^2 在 $[0, 1]$ 上的图像. 因此 T^3 在区间 $[0, 1]$ 上"帐篷"的个数是 T^2 的两倍，共 2^2 个，T^3 的图像中每个帐篷与对角线相交两次（总共相交 2^3 次），参见图 9.1.4c.

归纳之，$T^n(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有 2^{n-1} 个"帐篷"，其图像与对角线相交 2^n 次，因此集合 $\mathrm{Fix}(f^n)$ 中点的个数是 2^n.

表 9.1.1 列出了周期 n、T^n 的不动点的个数、T^n 不动点中周期小于 n 的点的个数、最小周期是 n 的点的个数、n-周期轨道的个数，这里用定理 9.1.7 来排除有低周期的点.

表 9.1.1 帐篷映射 T 或逻辑斯谛映射 G 的周期点的个数

n	$\mathrm{Fix}(f^n)$ 中点的个数	$\mathrm{Fix}(f^n)$ 中具有低周期的点的个数	$\mathrm{Per}(n, f)$ 中点的个数	n-周期轨道的个数
1	2	0	2	2
2	$2^2=4$	2	2	1
3	$2^3=8$	2	6	2
4	$2^4=16$	$2+2=4$	12	3
5	$2^5=32$	2	30	6
6	$2^6=64$	$2+2+6=10$	54	9

T 有两个不动点，显然没有更低周期点，因此第三列是 0；第四列中#Per(1, T) = 2 - 0 = 2；因为两个不动点分属不同的轨道，所以第五列中不动点的轨道个数也是 2.

当 $n=2$ 时，T^2 有 $2^2=4$ 个不动点，即#Fix(T^2) = 4；因为 T 的不动点也是 T^2 的不动点，所以第三列是 2；第四列中#Per(2, T) = 4 - 2 = 2；由于每条 2-周期轨道上必须有两个 2-周期点，所以只有 1 = 2/2 条 2-周期轨道.

对应于 $n=3$, 4, 5 的各行中的数据留给读者去验证.

当 $n=6$ 时，T^6 有 $2^6=64$ 个不动点，即#Fix(T^6) = 64；因为 6 能被 1, 2, 3 整除，所以在所有不动点中必须去除 1-周期点、2-周期点和 3-周期点等较低周期的点才能得到 6-周期点，因此 6-周期点的个数#Per(6, T) = 64 - (2 + 2 + 4) = 54；因为每条 6-周期轨道上都有 6 个 6-周期点，所以总共有 54/6 = 9 条独立的 6-周期轨道. ■ 310

注 9.1.10　*上例中 n-周期轨道的个数是 n-周期点的个数除以 n 得到的商，若这个商不是一个整数，则前面的工作一定有错误.*

例 9.1.11　虽然这个例子的函数表达式与上个例子很不一样，但在很多方面是相似的. 令

$$G(x) = 4x(1-x).$$

这是后面要讨论的逻辑斯谛映射 $g_a(x) = ax(1-x)$ 的一个特例，函数 G 在子区间 [0, 1/2] 上单调递增地从 0 取到 1；在子区间 [1/2, 1] 上它又单调递减地从 1 取到 0. 类似于对帐篷映射的讨论，G^n 的图像包含 2^{n-1} 个高度为 1 的小山，因此它与对角线相交 2^n 次，关于周期点和周期轨道数量的讨论与上面例子完全相同，参见图 9.1.5 和表 9.1.1.

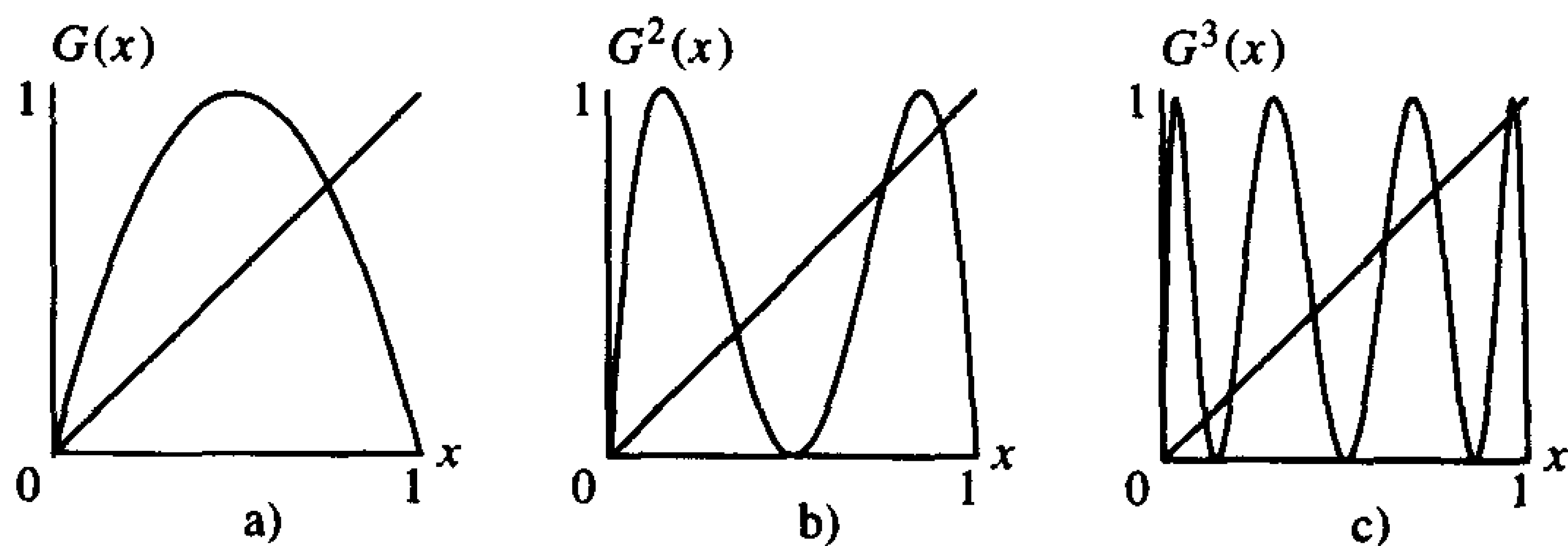


图 9.1.5　逻辑斯谛映射 G, G^2, G^3 的图像 ■

9.2　图示迭代法

对给定的数 x_0，总可以利用 $f(x)$ 的表达式依次算出 x_0 的轨道上的点 x_n，例如在例 9.1.1 中，若 $f(x) = \cos(x)$，$x_0 = 1$，则

$$x_1 = f(x_0) = \cos(1) = 0.540\,302\,3\cdots,$$

$$x_2 = f(x_1) = \cos(0.540\,302\,3\cdots) = 0.857\,553\,2\cdots.$$

在这一节，我们将引入寻找迭代点的图像方法，在上一节，我们利用函数的图像和它的迭代来确定周期点的个数，本节仍将使用函数的图像和对角线来确定迭代点，图像法不仅有助于加深对迭代过程的理解，而且还可以帮助我们更好地理解函数迭代的长期动力学行为. 所谓长

期动力学行为，是指类似于例 9.1.1 中余弦函数的迭代点列收敛于 x_∞ 的行为.

311

下面通过称之为逻辑斯谛映射的一个二次函数来引入这种方法.

例 9.2.1（阶梯法的引入）　考虑逻辑斯谛函数

$$g_a(x) = ax(1-x).$$

令 $g(x)$ 表示参数 $a=1.5$ 时的逻辑斯谛函数

$$g(x) = g_{1.5}(x) = 1.5x(1-x).$$

下面用代数法求出满足等式 $x=g(x)$ 的 g 所有不动点：

$$\begin{aligned} x &= 1.5x - 1.5x^2 \\ 0 &= 1.5x^2 - 0.5x \\ &= 0.5x(3x-1), \end{aligned}$$

因此 $x=0$ 或 $x=1/3$，这正是 g 的图像与对角线的交点，注意到 $g(1)=0$，$g(2/3)=1/3$，所以 1 和 2/3 是最终不动点.

为进一步了解其他点的迭代情况，我们把 g 和对角线 $\Delta=\{(x,x)\}$ 画在同一个图中. 假设初始值为 x_0：$0<x_0<1/3$，首先从横坐标轴上的初始值 $(x_0, 0)$ 出发作一条垂线段与 g 相交于点 $(x_0, g(x_0))=(x_0, x_1)$，然后从此点出发作一条水平线段与对角线相交于点 $(g(x_0), g(x_0))=(x_1, x_1)$，最后一个点的横坐标 $g(x_0)$ 就是 x_0 的第一次迭代，即 $x_1=g(x_0)$. 这些线段就构成图示迭代过程的第一步，参见图 9.2.1.

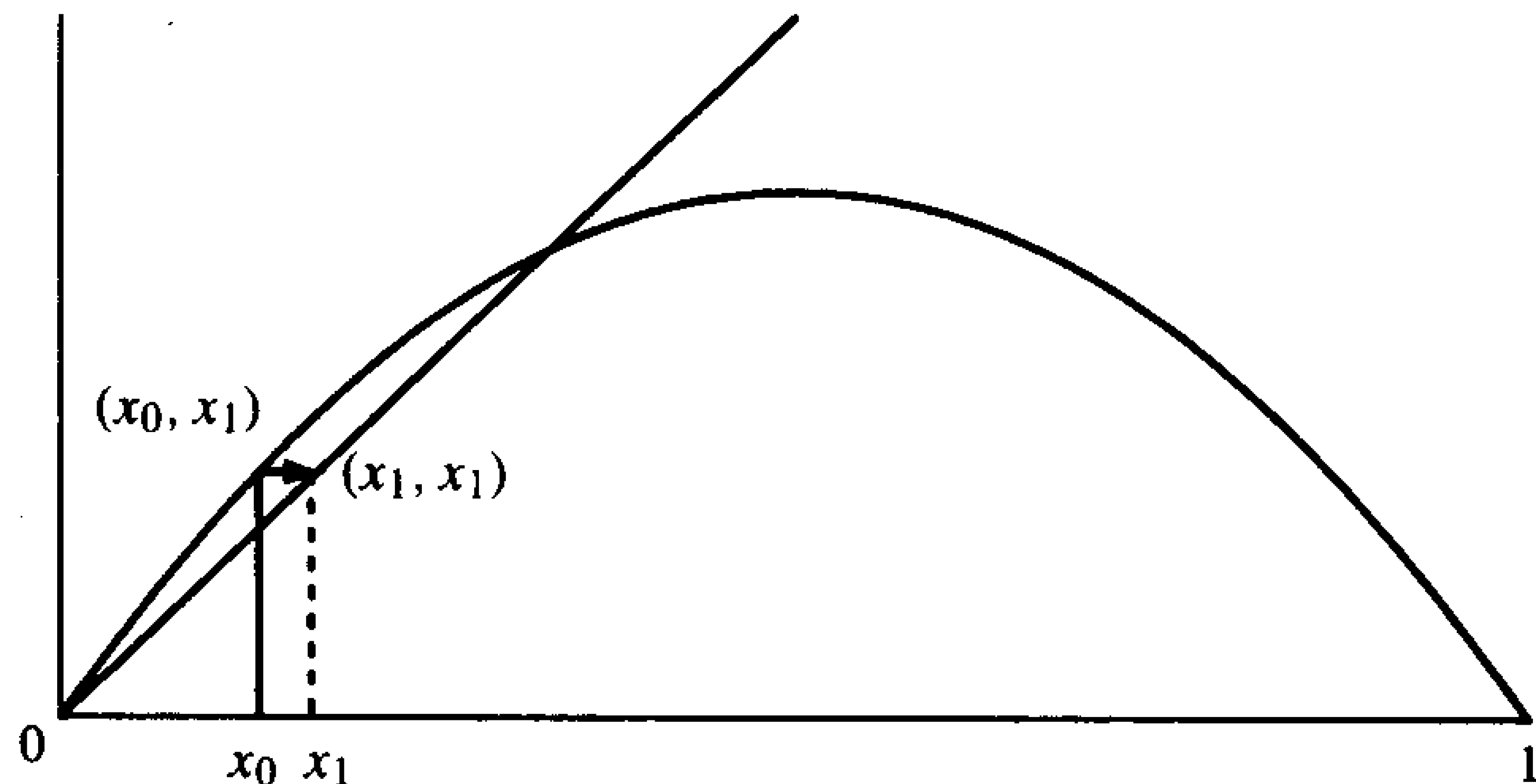


图 9.2.1　$x_0=0.1$ 时 $g_{1.5}$ 的图示迭代

再从上次得到的点 (x_1, x_1) 开始，先作一条垂线段与 g 相交于点 $(x_1, g(x_1))$，然后从此点出发作一条水平线段与对角线相交于点 $(g(x_1), g(x_1))=(x_2, x_2)$，这便得到第二步迭代 $x_2=g(x_1)$，从 (x_1, x_1) 到 $(x_1, g(x_1))$ 的竖直线段和从 $(x_1, g(x_1))$ 到 (x_2, x_2) 的水平线段构成图示迭代过程的第二步.

重复上述过程，先从点 (x_2, x_2) 出发作一条垂线段与 g 相交于点 $(x_2, g(x_2))$，然后从此点出发作一条水平线段到点 (x_3, x_3)，到第 n 步时，从 (x_{n-1}, x_{n-1}) 出发作一条垂线段与 g 相交于点 $(x_{n-1}, g(x_{n-1}))=(x_{n-1}, x_n)$，然后从此点出发作一条从 (x_{n-1}, x_n) 到点 (x_n, x_n) 的水平线段，参见图 9.2.2.

312

上述得到迭代点的方法称为*图示迭代法*，其中线段看似阶梯，因此也称为*阶梯迭代法*. 在

其他文献中，这些阶梯双倍返覆其上并自相交织缠绕，因此有些作者称它为蛛网迭代法.

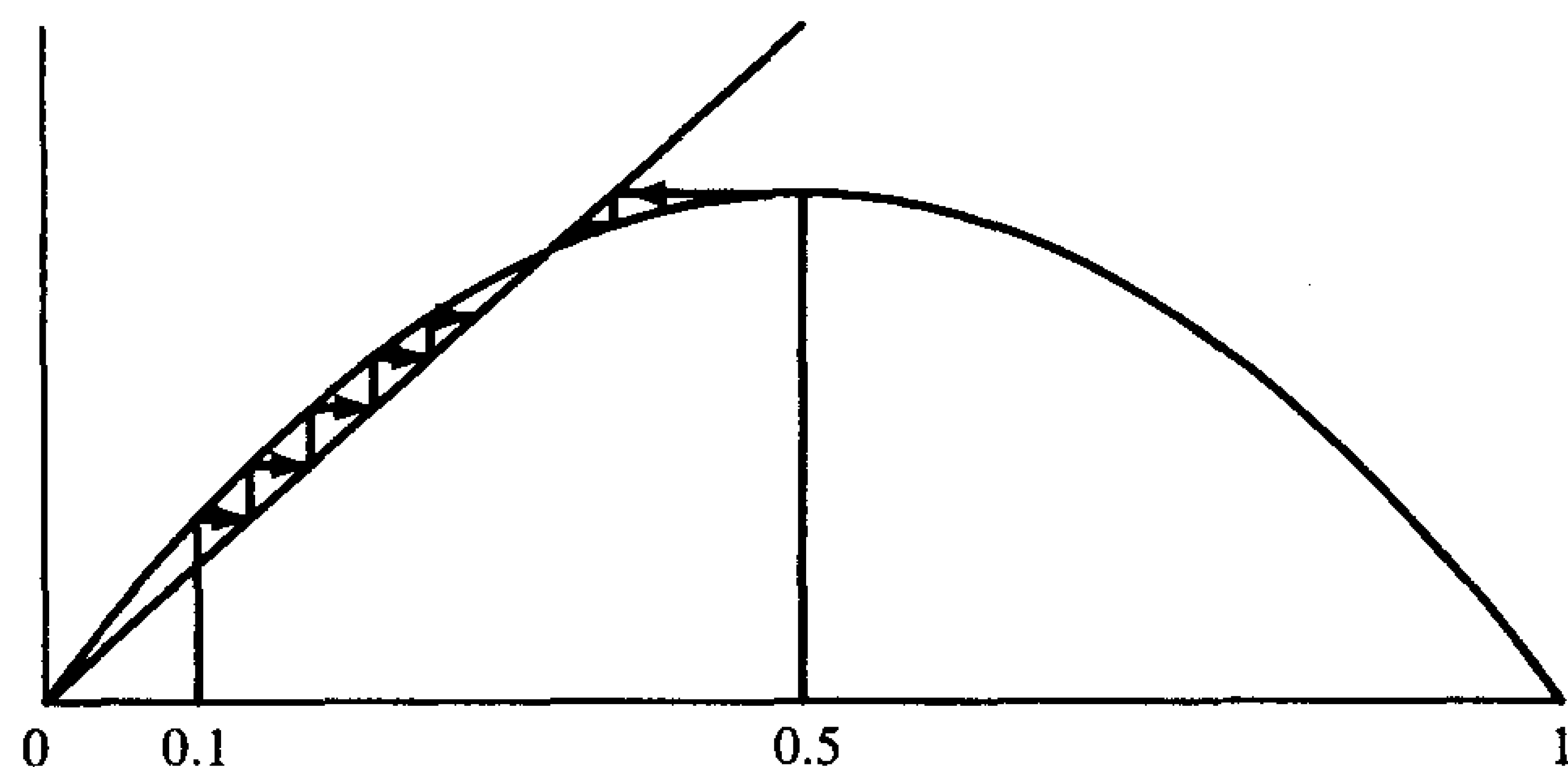


图 9.2.2　$x_0=0.1$ 和 $x_0=0.5$ 时 $g_{1.5}$的图示迭代

这个例子中当 $x\in(0,\ 1/3)$时，$(x,\ g(x))$的图像位于对角线之上，但 $g(x)<1/3$，因此$(x_0,\ g(x_0))$位于对角线之上、水平线$\{(x,\ 1/3)\}$之下，$(x_1,\ x_1)=(g(x_0),\ g(x_0))$由$(x_0,\ x_1)$向右移动得到，而且 $x_0<x_1<1/3$，重复上述讨论，可得

$$0<x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\frac{1}{3}.$$

由图 9.2.2 可以看出这个点列收敛于 1/3：定理 9.2.2 给出了保证此点列收敛于不动点的充分条件. 例如，若 $x_0=0.1$，则

$$\begin{aligned} x_0=0.1<x_1&=0.135\,00\\ <x_2&=0.175\,16\cdots\\ <x_3&=0.216\,72\cdots\\ &<\cdots\\ <x_{10}&=0.331\,29\cdots\\ &<\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

图 9.2.2 给出了两个不同初始值的图示迭代，图 9.2.3 给出了始于点 $x_0=0.1$ 和 0.5 的两条轨道，其中 x_n 随着 n 变化.

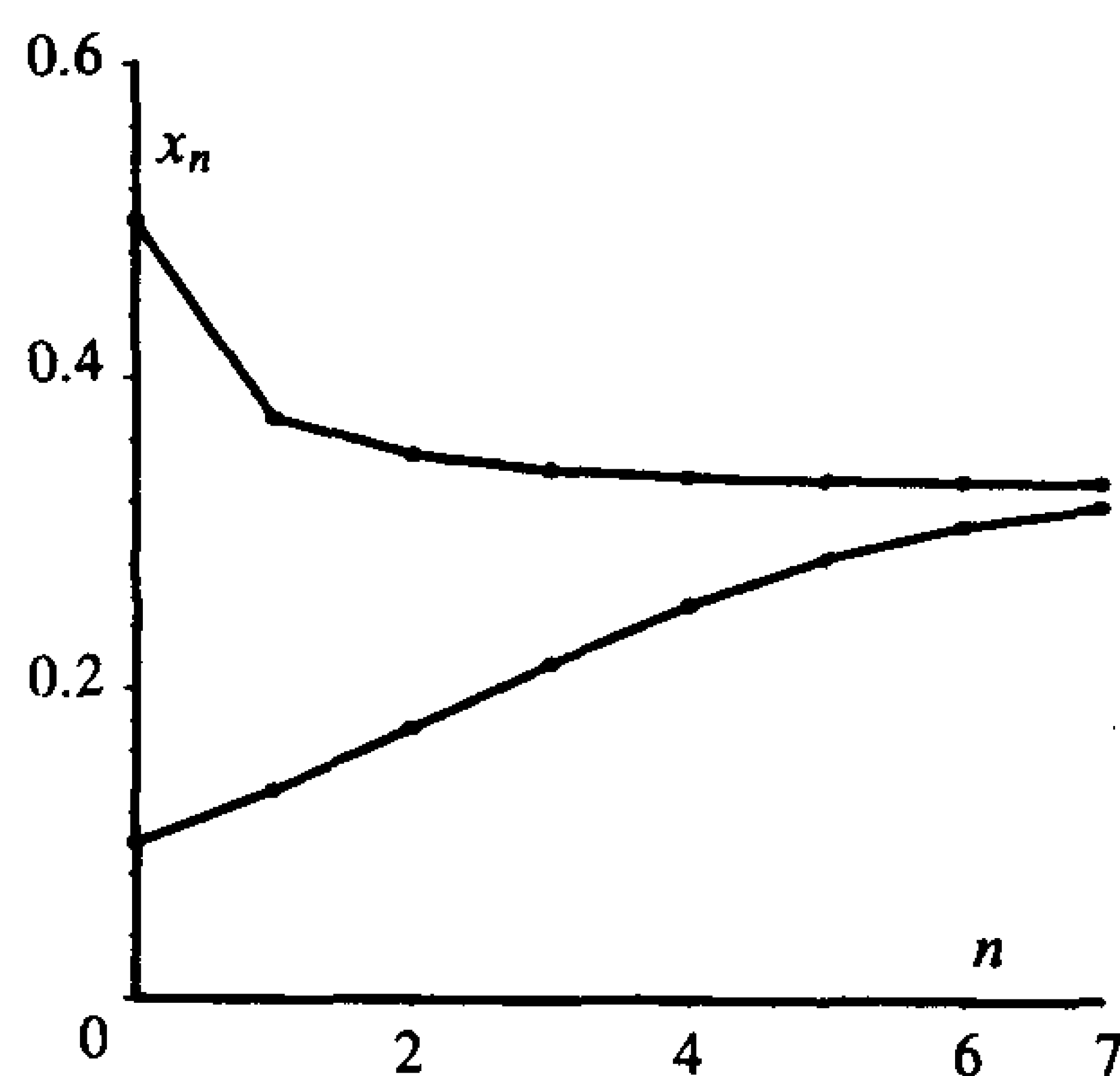


图 9.2.3　$x_0=0.1$ 和 $x_0=0.5$ 时 $g_{1.5}$的 x_n 相对于 n 的图示迭代

当 $1/3<x\leqslant 1/2$ 时，图像单调递增且位于对角线之下，因此若从点 x_0：$1/3<x_0\leqslant 1/2$ 出发，则有

$$\frac{1}{2}\geqslant x_0>x_1>x_2>\cdots>x_n>\frac{1}{3}.$$

同样，x_n 也收敛于不动点 1/3，参见图 9.2.2 和图 9.2.3.

最后，当 $1/2<x_0<1$ 时，$0<x_1=g(x_0)<1/2$，于是数列

$$x_{n+1}=f^{n+1}(x_0)=f^n(f(x_0))=f^n(x_1)$$

收敛于1/3，因此，对任意的$0<x_0<1$有$f^n(x_0)$收敛于不动点1/3，我们称这些点位于1/3的吸引域中. ■

我们已经介绍了一个特殊函数迭代的图像法，下面的定义给出了任意函数的迭代程序.

定义 9.2.2　函数f的图示迭代法(阶梯法或蛛网法)对以x_0为初始值的迭代过程如下：在同一个图中画出函数f和对角线的图像，从第一坐标轴上的点$(x_0, 0)$出发向上或向下作一条垂线段与f相交于点$(x_0, f(x_0))=(x_0, x_1)$，然后从f上的点(x_0, x_1)出发作一条水平线段与对角线相交于点(x_1, x_1)，便得到x_0的第一次迭代$x_1=f(x_0)$，重复此过程，到第n步时从对角线(x_{n-1}, x_{n-1})出发作一条垂线段与f相交于点$(x_{n-1}, f(x_{n-1}))=(x_{n-1}, x_n)$，然后从点$(x_{n-1}, x_n)$出发作一条到点$(x_1, x_1)$的水平线段，这便得到$x_0$的第$n$次迭代$x_n=f(x_{n-1})$.

定义 9.2.3　设f是一个函数，x^*是它的不动点，如果初始值x_0满足：当n趋向无穷时，$f^n(x_0)$收敛于x^*(即当n趋向无穷时，$|f^n(x_0)-x^*|$趋向于零)，则称x_0属于x^*的吸引域，若用$\mathcal{B}(x^*, f)$表示x^*的吸引域，则

$$\mathcal{B}(x^*,f) = \{x_0: |f^n(x_0) - x^*| \to 0, n \to \infty\}.$$

只需要做轻微的改动就得到k-周期点p的吸引域的定义，它是指当n趋向于无穷时使得$|f^n(x_0)-f^n(p)|$趋向于零的初始值x_0的全体：

$$\mathcal{B}(p,f) = \{x_0: |f^n(x_0) - f^n(p)| \to 0, n \to \infty\}.$$

k-周期轨道$\mathcal{O}_f^+(p, f)$的吸引域是指该轨道上点的吸引域的并集：

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}_f^+(p),f) = \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{B}(f^i(p),f).$$

下面的定理总结了例9.2.1中分析吸引域大小的方法，详细证明过程将在本章最后的9.8节给出.

314

定理 9.2.4　令f是$\mathbb{R}$上的连续函数，x^*是其不动点，假设存在$y_1<x^*<y_2$，使

$$x < f(x) < x^* \qquad y_1 < x < x^*,$$

$$x^* < f(x) < x \qquad x^* < x < y_2,$$

而且f在区间(y_1, y_2)上单调递增，则x^*的吸引域包含区间(y_1, y_2)，即

$$(y_1,y_2) \subset \mathcal{B}(x^*,f).$$

9.3　周期点的稳定性

在上一节，我们引入了图示迭代法，对于逻辑斯谛函数$g_{1.5}(x)$的不动点1/3，我们证明了存在包含1/3的一个区间，其中每一个点都被不动点1/3所吸引，此时称点1/3吸引这一区间. 本节我们给出一个利用函数的导数来判断不动点是否吸引的准则.

由于很多定理的条件都涉及函数的导数，因此在给出稳定性定义之前先引入有关连续导数存在性的术语.

定理 9.3.1　设函数f把$\mathbb{R}$映射到$\mathbb{R}$，若f和$f'(x)$都是x的连续函数，则称f是连续可微或是C^1的；若对某个整数$r\geq 1$，若f和f的r阶导数都是x的连续函数，则称f是r阶连续可

微或是 C^r 的；若对所有正整数 r，f 都是 C^r 的，则称之为是 C^∞ 的.

例 9.3.2　此例中函数有一个不动点，尽管所有点的迭代都收敛于它，但我们不想称它是吸引的. 令

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x(1-x) \quad (\mathrm{mod}\ 1).$$

把[0, 1)看成把区间[0, 1]弯转并把 0 和 1 看成一点后得到的圆周，x 到 0 的距离取为 $|x|$ 和 $|1-x|$ 中较小的一个. 因此，可以把趋向于 1 的点看作趋向于 0 的点. 0 是唯一的不动点. 由于当 $0 < x_0 < 1$ 时 $0 < x_0 < f(x_0) < 1$，由图示迭代法可知，迭代点向右移动，且 $\lim\limits_{j\to\infty} f^j(x_0) = 1(\mathrm{mod}1) = 0$，因此所有点的迭代都收敛于 0.

然而，当取 $x_0 = 0.01$ 时，它的迭代轨道在靠近 0 之前先远离 0，我们不想称这种行为是吸引的，因此在定义吸引时是要加条件的. ■

定义 9.3.3　一个 n-周期点 p_0 称为是李雅普诺夫稳定或 L 稳定的，如果对所有的 $r > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得对 $|x_0 - p_0| < \delta$ 和所有 $k \geqslant 0$，

$$|f^k(x_0) - f^k(p_0)| < r.$$

一个 n-周期点 p_0 称为是吸引的，如果它是李雅普诺夫稳定的，而且存在 $\delta_1 > 0$ 使得对 $|x_0 - p_0| < \delta_1$ 和所有 $k \geqslant 0$，

$$\lim_{j\to\infty} |f^j(x_0) - f^j(p_0)| = 0.$$

这种点也称为是 n-周期汇(sink)或渐近稳定的 n-周期点(有些作者称之为稳定的 n-周期点，但我们不采用这种叫法).

315

第二个条件是主要条件，例 9.3.2 中定义在圆周上映射满足第二个条件但不满足第一个条件；对于定义在$\mathbb{R}$上的不包含取模的函数来说，第二个条件可以推出第一个条件(并不显然). 在吸引性的定义中，第一个条件(称为李雅普诺夫稳定)是必不可少的，这与高维微分方程组的情况相似.

定义 9.3.4　若一个 n-周期点 p_0 不是 L 稳定的，则称其为不稳定的，即存在 $r_0 > 0$，使得对任意的 $\delta > 0$ 都存在一个点 x_δ：$|x_\delta - p_0| < \delta$ 和某个 $k \geqslant 0$ 使得

$$|f^k(x_\delta) - f^k(p_0)| \geqslant r_0.$$

这说明 p_0 的任意小邻域中都存在一个点离开 p_0 的轨道(距离大于 r_0).

定义 9.3.5　若一个周期点附近的点都离开它，则称此不动点是排斥的；一个 n-周期点 p_0 称为是排斥周期点(或源)，如果存在 $r_1 > 0$，对所有 $x \neq p_0$，$|x - p_0| < r_1$ 都存在某个 k(依赖于 x)使得

$$|f^k(x) - f^k(p_0)| \geqslant r_1.$$

定义 9.3.6　若一个 n-周期点 p_0 一侧吸引而另一侧排斥，则称它是半稳定的.

例 9.2.1 中函数在不动点处导数是

$$g'_{1.5}(x) = \left(\frac{3}{2}\right)(1-2x) \qquad 且$$

$$g'_{1.5}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

正是由于这个数(的绝对值)小于1才使得存在不动点所在的一个区间完全包含于它的吸引域中. 下面的定理明确了给出了判断不动点是否吸引的准则.

定理 9.3.7　令 f 是映 $\mathbb{R}$ 到自身的连续可微函数.

(a)设 p_0 是不动点，$f(p_0)=p_0$，则不动点导数的绝对值和其稳定性的关系可表述为下面三句话：

(i)设 $|f'(p_0)|<1$，则 p_0 是吸引不动点.

(ii)若 $|f'(p_0)|>1$，则 p_0 是排斥不动点.

(iii)若 $|f'(p_0)|=1$，则不动点 p_0 的稳定性无法确定，它可能是吸引的、排斥的、半稳定的或不属于上述任何一种情况.

(b)设 p_0 是 n-周期点，由链式求导法则

$$|(f^n)'(p_0)|=|f'(p_{n-1})|\cdots|f'(p_1)|\cdot|f'(p_0)|,$$

其中 $p_j=f^j(p_0)$，则周期点导数的绝对值和其稳定性的关系可表述为下面三句话：

(i)若 $|(f^n)'(p_0)|<1$，则 p_0 是吸引的 n-周期点.

(ii)若 $|(f^n)'(p_0)|>1$，则 p_0 是排斥的 n-周期点.

(iii)若 $|(f^n)'(p_0)|=1$，则 p_0 的稳定性无法确定，它可能是吸引的、排斥的、半稳定的或不属于上述任何一种情况.

尽管上述定理可直接由导数的定义(或中值定理)推出，我们仍在9.8节给出了它的证明. 容易看出当 $|(f^n)'(p_0)|<1$ 时

$$|f^n(x)-p_0|\approx|(f^n)'(p_0)|\cdot|x-p_0|<|x-p_0|.$$

对于满足 $0<f'(p_0)<1$ 的不动点 p_0 来说，可以通过观察迭代的图像法得到结论，在这种情况下，f 的图像从上向下穿过对角线；由定理9.2.4可知，在 p_0 的吸引域中包含 p_0 的一个区间邻域，$a=1.5$ 的逻辑斯谛方程就属于这种情况，参见图9.2.2. 对于满足 $-1<f'(p_0)<0$ 的不动点 p_0 来说时，它附近的点每迭代一次就从 p_0 的一侧跑到另一侧，经过两次迭代后回到同侧但更靠近不动点，参见图9.3.1和图9.3.2中 $g_{2.8}(x)=2.8x(1-x)$ 的图示迭代.

316

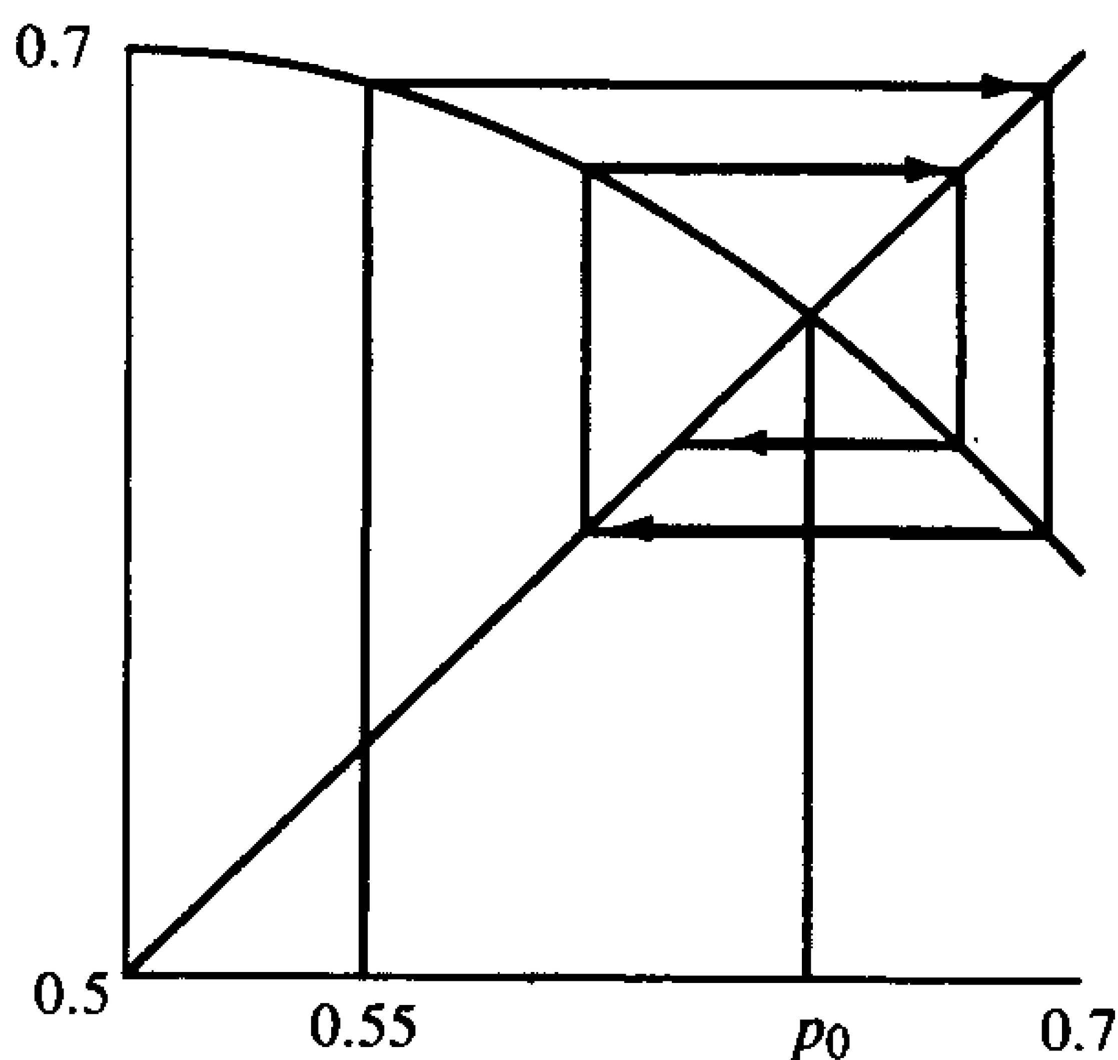


图9.3.1　$x_0=0.55$ 时 $g_{2.8}(x)=2.8x(1-x)$ 的图示迭代

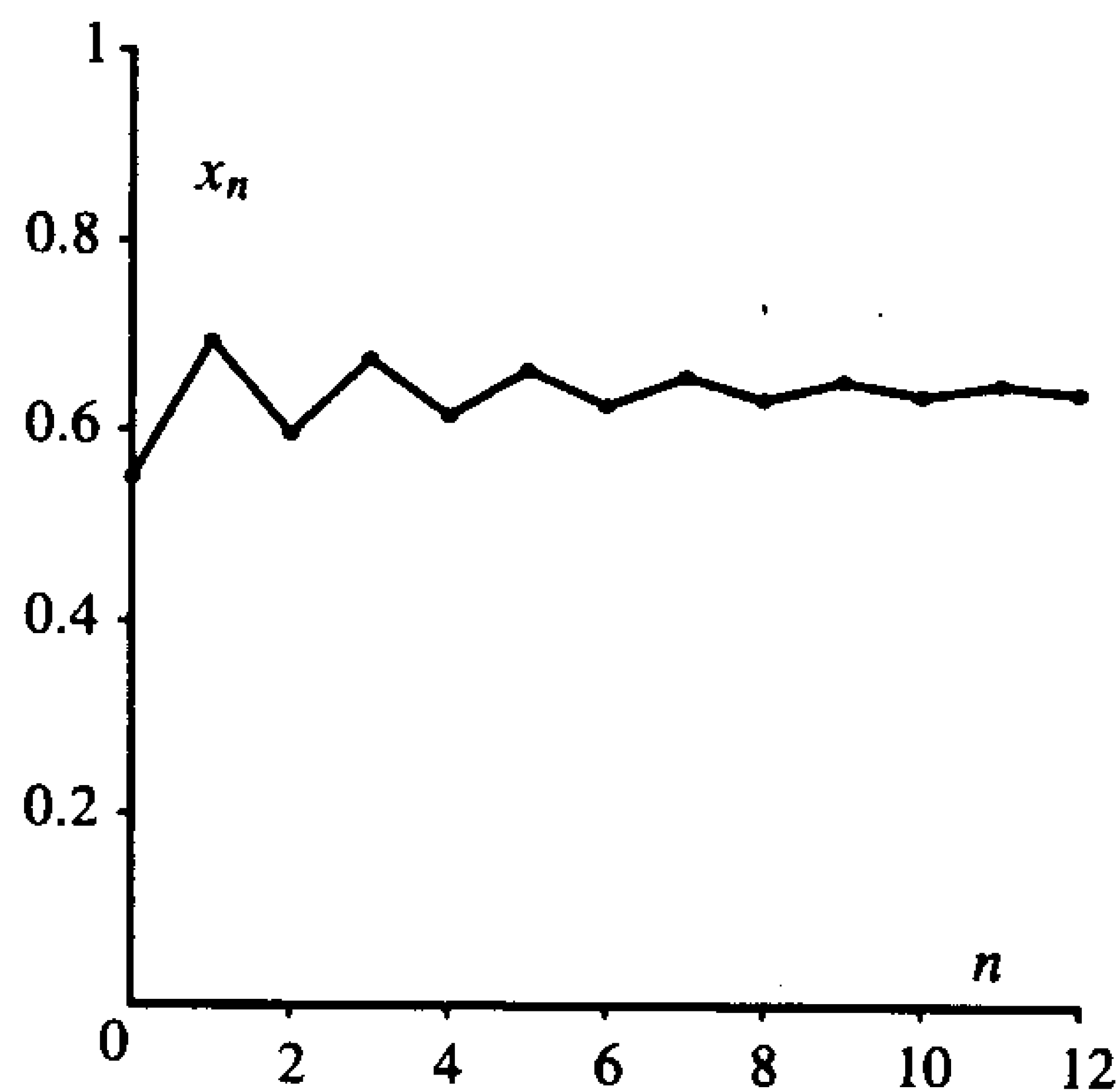


图9.3.2　$x_0=0.55$ 时 $g_{2.8}(x)=2.8x(1-x)$ 的关于 n 的图示迭代

当 $f'(p_0)>1$ 时 f 的图像从对角线下侧进入上侧，重复阶梯法的步骤，可知 p_0 是排斥的不动点，参见图 9.3.3. 图 9.3.4 和图 9.3.5 画出了 $g_{3.3}(x)=3.3x(1-x)$ 的满足 $g'_{3.3}(p_{3.3})<-1$ 不动点 $p_{3.3}$ 附近的图示迭代，所有轨道离开不动点而趋向于一条 2-周期轨道.

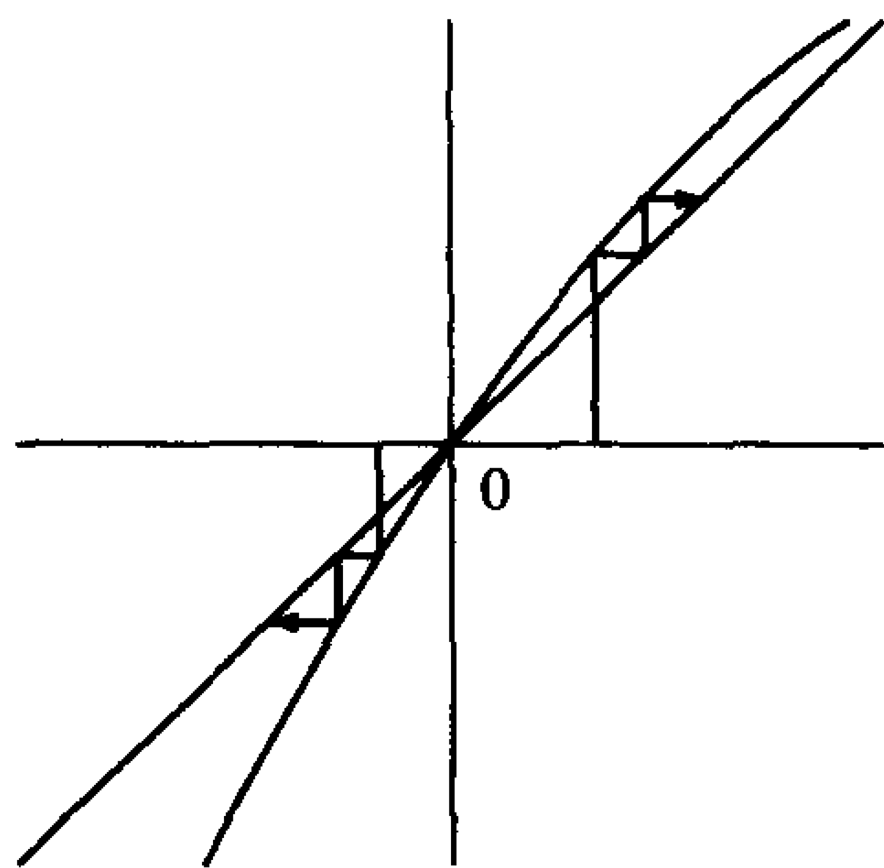


图 9.3.3　$x_0=-0.5$ 和 $x_0=0.1$ 时 $g_{1.5}(x)=1.5x(1-x)$ 的图示迭代

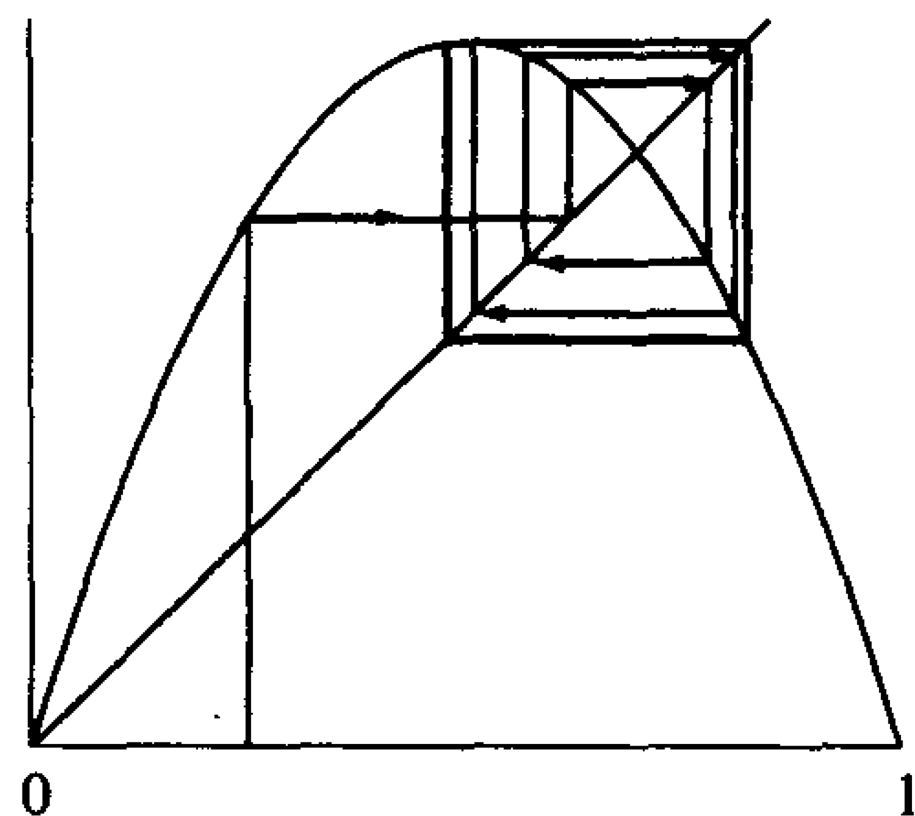


图 9.3.4　$x_0=0.25$ 时 $g_{3.3}(x)=3.3x(1-x)$ 的图示迭代

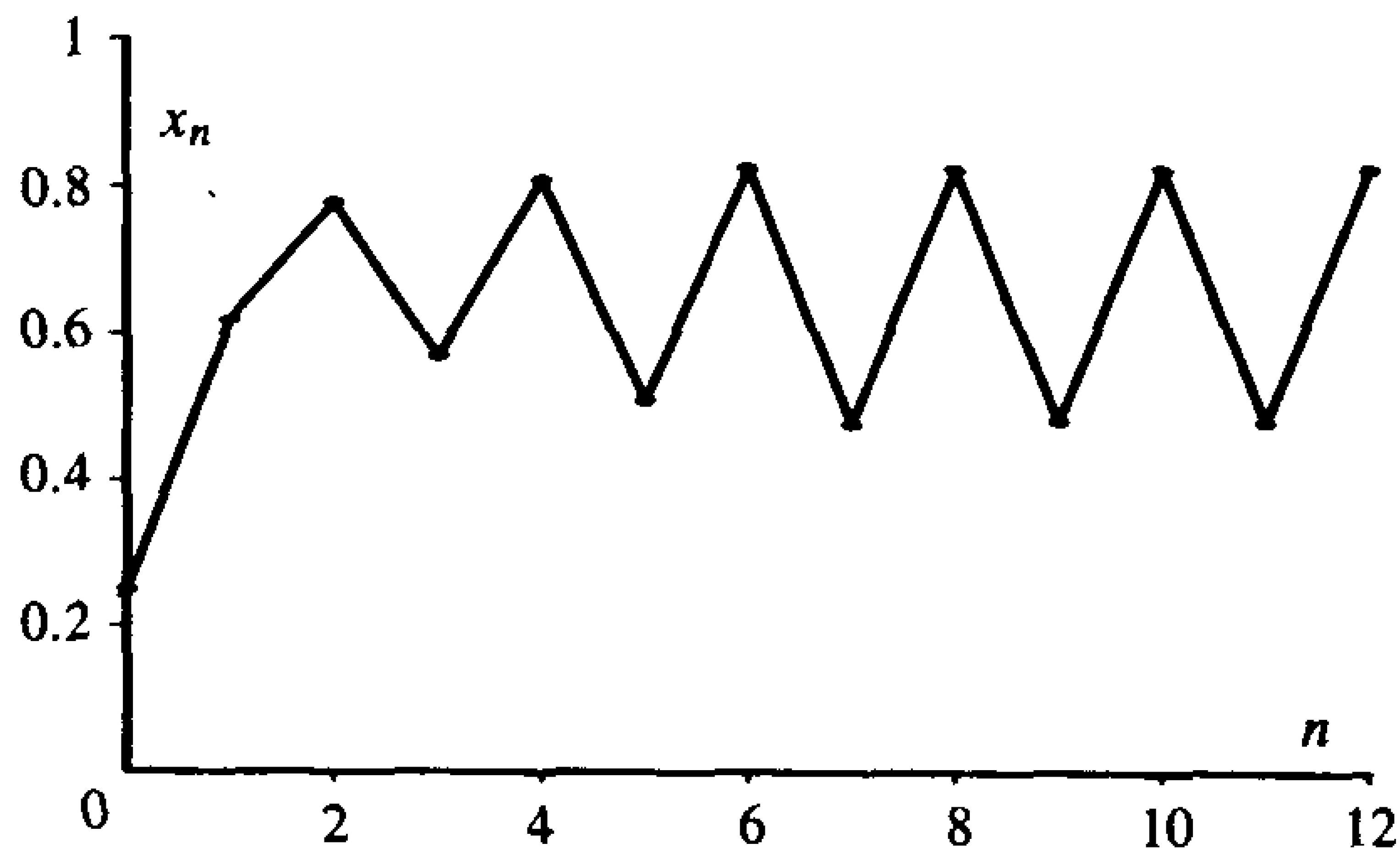


图 9.3.5　$x_0=0.25$ 时 $g_{3.3}(x)=3.3x(1-x)$ 的关于 n 的图示迭代

定义 9.3.8　若 n-周期点 p_0 还是一个临界点，即 $(f^n)'(p_0)=0$，则称它关于映射 f 是超吸引的(superattracting).

注意，利用超吸引的 n-周期点 p_0 处的泰勒展式，得

$$|f^n(x)-p_0|\approx|(f^n)''(p_0)|\cdot|x-p_0|^2.$$

对任意小的 $\varepsilon>0$，当 $|x-p_0|<\dfrac{\varepsilon}{|(f^n)''(p_0)|}$ 时

$$|f^n(x)-p_0|<\epsilon|x-p_0|\ll|x-p_0|.$$

可见收敛速度非常快，它因此而得名.

317
≀
318

例 9.3.9　考虑 $f(x)=-x^3$，在例 9.1.2 中已证明 f 有一个不动点 $x=0$ 和一条 2-周期轨道 $\{-1,1\}$，由 $f'(x)=-3x^2$ 可知 $f'(0)=0$，从而 0 是超吸引不动点.

在 2-周期点处的导数满足

$$|(f^2)'(1)|=|f'(-1)|\cdot|f'(1)|=3\cdot3=9>1,$$

因此 2-周期轨道是排斥的. 注意，我们不必计算函数的幂的导数，只需计算函数导数的乘积

即可. ■

例 9.3.10 考虑函数

$$f(x) = x^3 - 1.25x.$$

显然它的不动点是 0 和 ±1.5，由于 $f'(x) = 3x^2 - 1.25$，$|f'(0)| = 1.25 > 1$ 以及 $|f'(\pm 1.5)| = |3(2.25) - 1.25| = 5.5 > 1$，所以这些不动点都是排斥的.

因为 f 是奇函数：$f(-x) = -f(x)$，所以我们很自然想到寻找满足 $x_2 = f(x_1) = -x_1$ 和 $x_1 = f(x_2) = -x_2$ 的 2-周期点，因此解方程 $-x = f(x)$ 或 $0 = f(x) + x$：

$$0 = f(x) + x = x^3 - \frac{5}{4}x + x$$

$$= x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right).$$

它的解 $x = 0$ 是不动点，而 $x = \pm 0.5$ 构成一条 2-周期轨道：$f(0.5) = -0.5$ 且 $f(-0.5) = 0.5$，则

$$(f^2)'(0.5) = f'(-0.5)f'(0.5)$$
$$= (3(0.25) - 1.25)^2$$
$$= 0.25 < 1,$$

所以 ±0.5 是吸引的，参见图 9.3.6.

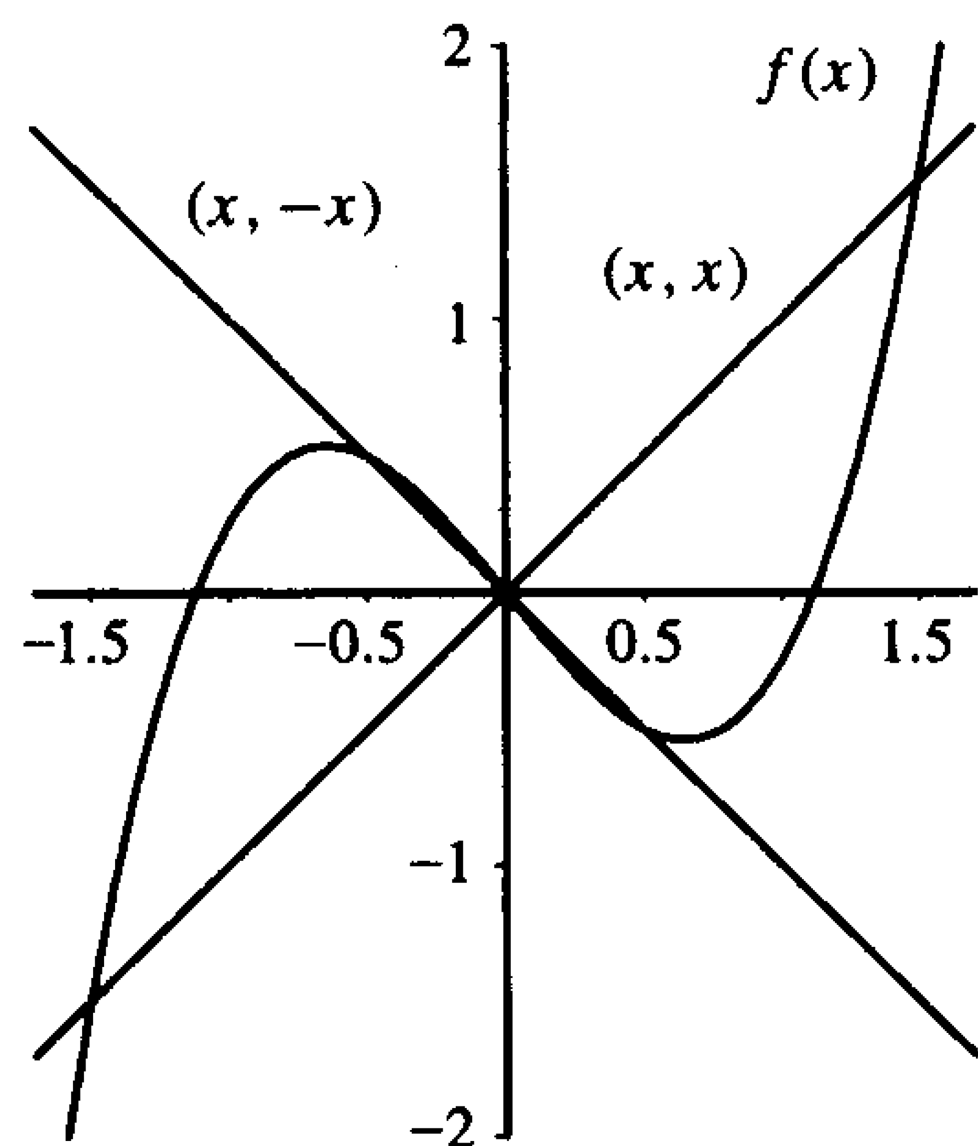


图 9.3.6 例 9.3.10 的图像

解方程 $3x^2 - 5/4 = 0$ 得到临界点 $x_c^{\pm} = \pm\sqrt{5/12} \approx 0.655$，因为 $|x_c^{\pm}| > |\pm 0.5|$，所以临界点不在 2-周期轨道上.

下面利用图示迭代法证明 $(x_c^-, 0)$ 和 $(0, x_c^+)$ 都包含于 2-周期轨道的吸引域中，为此把 $f(x)$、对角线 Δ 和直线 $\Delta^- = \{(x, -x)\}$ 画在一个图中，因为当 $0 < x < 0.5$ 时 $f(x)$ 的图像在 Δ^- 下方，因此 $-0.5 < f(x) < -x < 0$ 且 $0 < |x| < |f(x)| < 0.5$；同理，当 $-0.5 < x < 0$ 时 $f(x)$ 的图像在 Δ^- 上方，因此 $-0.5 < f(x) < -x < 0$ 且 $0 < |x| < |f(x)| < 0.5$；总之，当 $-0.5 < x < 0.5$，$x \neq 0$ 时，

$$0 < |x| < |f(x)| < 0.5 \qquad \text{且}$$
$$0 < |x| < |f(x)| < |f^2(x)| < 0.5.$$

则当 $0 < x_0 < 0.5$ 时，

$$0 < x_0 < f^2(x_0) < f^4(x_0) < \cdots < 0.5,$$

而且 $f^{2j}(x_0)$ 收敛于 0.5，由连续性可知整条轨道都收敛于 0.5，从而 x_0 位于 2-周期轨道的吸引域中. 对 $-0.5 < x_0 < 0$ 可类似讨论.

319

在区间 $[x_c^-, -0.5) \cup (0.5, x_c^+]$ 上，有 $0.5 < |f(x)| < |x| \leqslant |x_c^{\pm}|$，因此迭代的绝对值单调递减地收敛于 2-周期轨道，所以 $[x_c^-, -0.5) \cup (0.5, x_c^+]$ 位于此 2-周期轨道的吸引域中. 综上所述，

$$[x_c^-, 0) \cup (0, x_c^+] \subset \mathcal{B}(\mathcal{O}(0.5); f).$$

对于区间 $(-1.5, x_c^-)$，f 的图像位于对角线 Δ 之上，而且取值小于 $f(x_c^-) < x_c^+$，因此

$(-1.5,\ x_c^-)$中点的迭代落在区间$(x_c^-,\ x_c^+)$之前是单调递增的. 若迭代不是恰好落在 0 上，则进一步迭代后必收敛于2-周期轨道. 对于区间$(x_c^+,\ 1.5)$可类似分析，只不过f的图像位于对角线Δ之下，而且取值大于$f(x_c^+) > x_c^+$. 令$\mathcal{B}(0;\ f)$表示收敛于 0 的初始值的集合，则

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}(0.5);f) \supset (-1.5,,1.5) \setminus \mathcal{B}(0;f).$$

因为$[-1.5,\ 1.5]$之外的点的迭代都趋向于$\pm\infty$，所以上式实际就是2-周期轨道的吸引域. ■

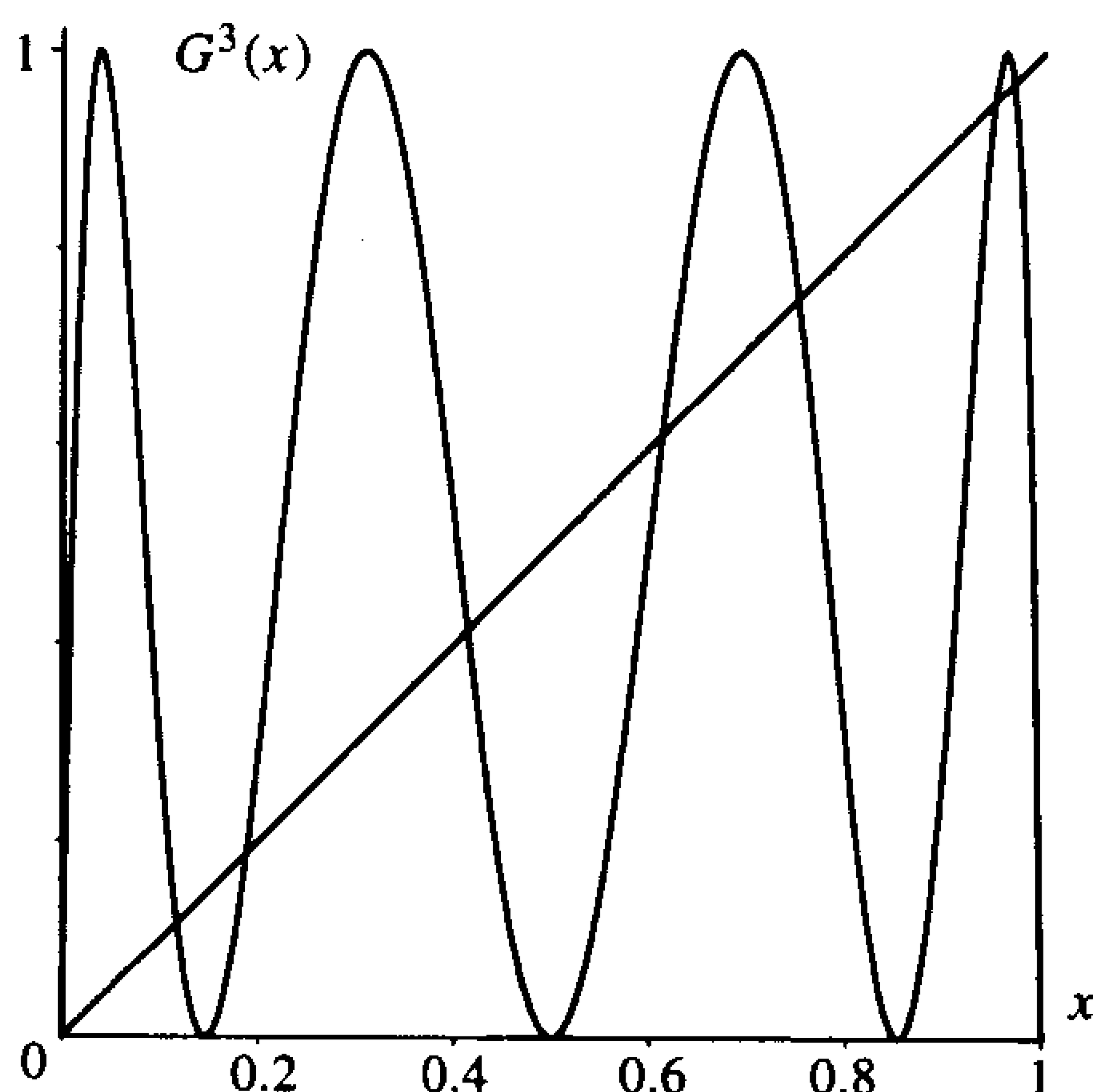


图 9.3.7　G^3 的图像

定理 9.3.7 的另一个推论是：在同一条 n-周期轨道的每一点x_i处，它的导数$(f^n)'(x_i)$的值相同，利用此结论和图 9.3.7 中 G^3 的图像可确定 $G(x)=4x(1-x)$的两条独立的3-周期轨道.

9.3.1　牛顿映射

本节将介绍求解多项式或 8.1 节中出现的单变量函数的根的牛顿法. 如果$f(x)$是一个多项式或更一般的函数，我们希望能确定$f(x)$的根(即满足$f(x)=0$的值x). 对于一个多项式，从理论上讲可以把它因式分解并求出其所有实根和复根，但实际上对一个高次多项式来说，它没有代数求根公式，在这种能情况下，找出它的近似根是很有实际意义的，牛顿法(或牛顿-Raphson 法)就是利用迭代方法来求函数的近似根.

假设x_0是根的初次估计值，则f在x_0处的切线为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

320

在x_0附近函数f的最佳线性(仿射)近似就是其切线，设此直线与x轴$(y=0)$交于x_1，即

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

只要切线不是水平的，即$f'(x_0)\neq 0$，上式就成立，参见图 9.3.8. 再从x_1开始，令x_1处函数f切线与x轴$(y=0)$交点是x_2，即

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

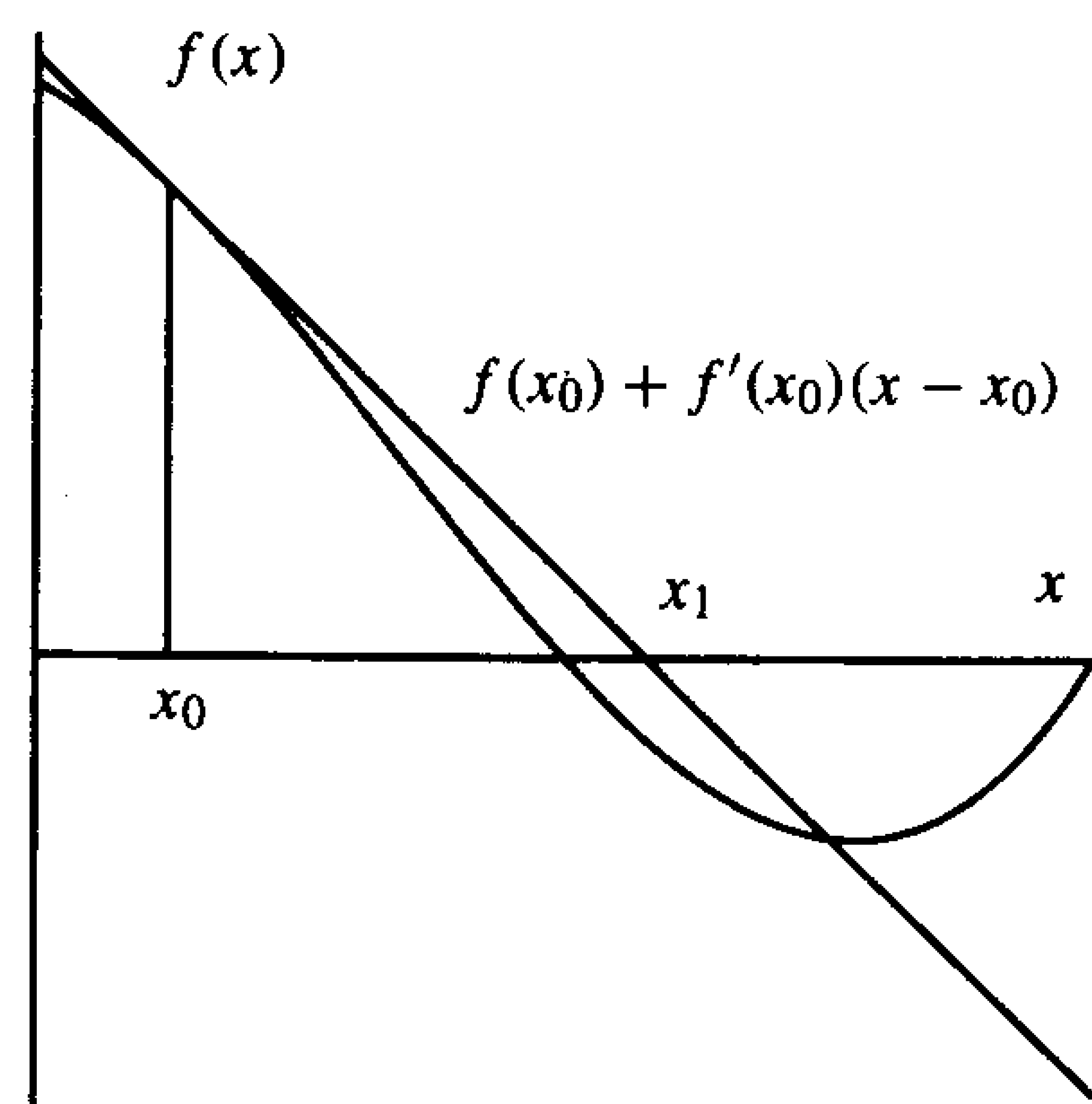


图 9.3.8　$f(x)$图像上的牛顿映射

321

若令

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{9.3.1}$$

则$x_1=N_f(x_0)$，$x_2=N_f(x_1)$，N_f称为是函数f的牛顿映射(Newton map for the function f). 重复

此过程，若得到根的第 n 次近似是 x_n，则它的第 $n+1$ 次近似

$$x_{n+1} = N_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

下面的定理说明：若对根的初次估计足够好(事实上，绝大部分初次估计都符合这一要求)，那么当 n 趋向于无穷时上面的迭代序列收敛于多项式的根.

定理 9.3.11　设 $f(x)$ 有二阶连续导数，x^* 是满足 $f(x^*)=0$ 但 $f(x^*)'\neq 0$ 的 f 的简单零点，则 x^* 是 N_f 的超吸引不动点(即 $N_f(x^*)=x^*$，$N_f'(x^*)=0$).

证明　若 $f(x^*)=0$，则

$$N_f(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^* - \frac{0}{f'(x^*)} = x^*,$$

所以 x^* 是 N_f 的不动点，而且

$$N'_f(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)^2 - f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2}$$

$$= 1 - \frac{f'(x^*)^2}{f'(x^*)^2} = 0.$$

因此 x^* 是超吸引不动点且其吸引域中包含一个 x^* 的开区间邻域. ■

例 9.3.12　设 $f(x)=x^2-7$，它的根是 $x=\pm\sqrt{7}$，对应的牛顿映射为

$$N_f(x) = x - \frac{x^2-7}{2x}.$$

由定理 9.3.11 可知 $x=\sqrt{7}$ 是超吸引不动点. 若取初次估计 $x_0=1$，则

$$x_1 = N_f(1) = 1 - \frac{(-6)}{2} = 4.000\,00,$$

$$x_2 = N_f(x_1) = 4 - \frac{9}{8} = 2.875\,00,$$

$$x_3 = N_f(x_2) = 2.875\,00 - \frac{2.875\,00^2 - 7}{2\times 2.875\,00} \approx 2.654\,89,$$

$$x_4 = N_f(x_3) \approx 2.654\,89 - \frac{2.654\,89^2 - 7}{2\times 2.654\,89} \approx 2.645\,77,$$

$$x_5 = N_f(x_4) \approx 2.645\,77 - \frac{2.645\,77^2 - 7}{2\times 2.645\,77} \approx 2.645\,75.$$

即使采用一个很差的估计 $x_0=1$，仅经五次迭代后，便有 $|x_5-x_4|<2\times 10^{-5}$. 用计算器算出的 $\sqrt{7}=2.645\,751\,3$，用迭代法也能得到这个结果. 事实上它准确地给出了小数点后的五位数字：$x_5\approx 2.645\,75$，参见图 9.3.9. ■

更高次多项式的牛顿映射可能会出现周期点或混沌迭代：这些初始值的迭代不收敛于多项式的根，参见 10.7.1 节. 但大多数初始值的迭代都收敛于多项式的根，而且如果取的初始估计靠近多项式的根，则迭代过程会快速收敛于这个根.

参见有关高重零点稳定性的练习.

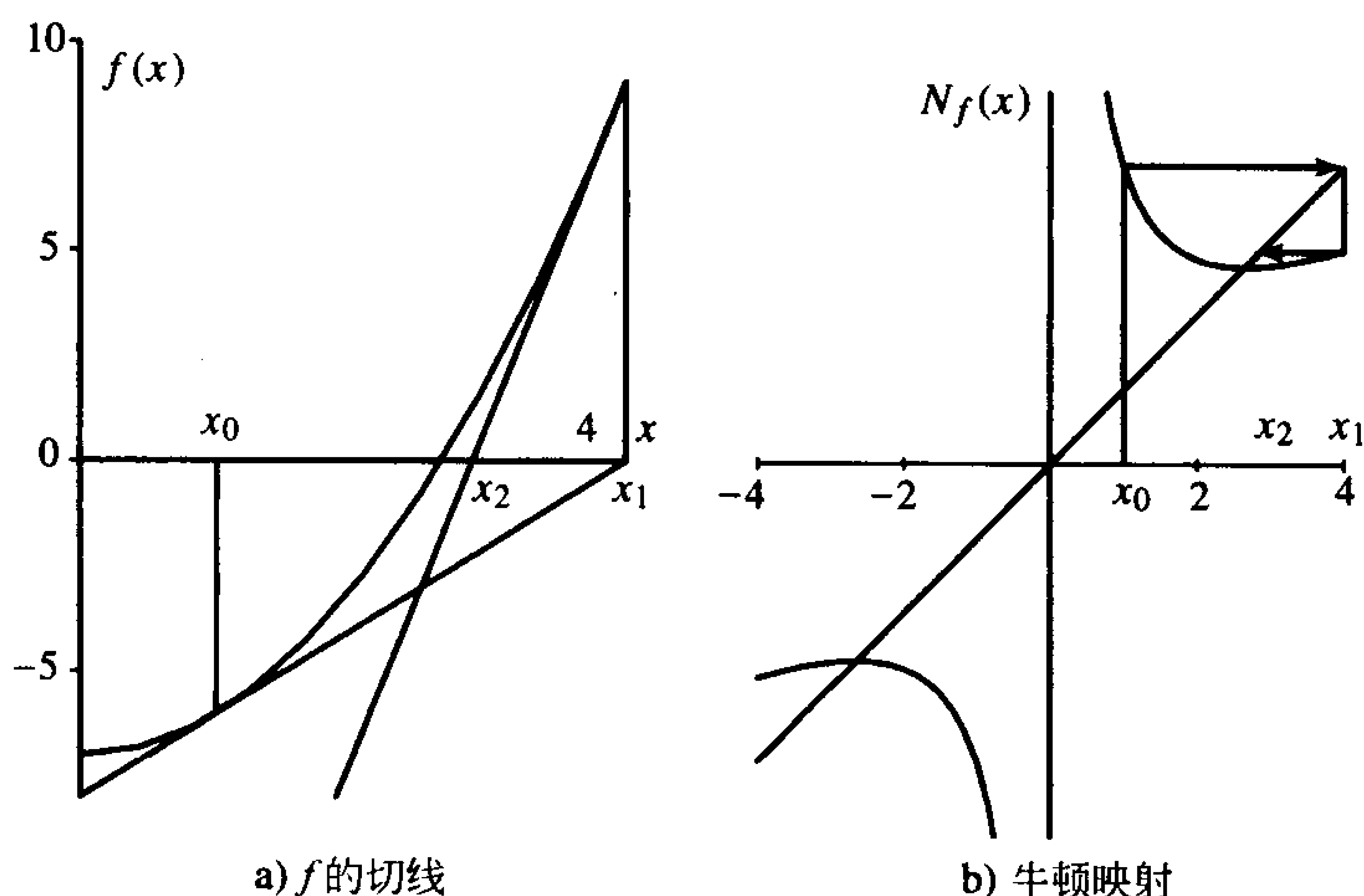


图 9.3.9　$f(x)=x^2-7$ 时 $f(x)$ 的切线和牛顿映射

9.3.2　逻辑斯谛族映射的不动点和 2-周期点

我们已经多次考虑逻辑斯谛族映射 $g_a(x)=ax(1-x)$，本节要讨论这类映射的不动点的稳定性，如果对应某些参数范围该映射有吸引的不动点，我们还将讨论这些不动点的吸引域. 此外，还要找出它的 2-周期点并讨论其稳定性.

不动点

由于 g_a 的不动点满足

$$x = g_a(x)$$
$$x = ax - ax^2$$
$$0 = x(ax - a + 1),$$

所以可得

$$x = 0 \quad 且 \quad p_a = \frac{a-1}{a}.$$

当 $a>1$ 时 p_a 为正值且 $0<p_a<1$.

为了讨论稳定性，要计算 $g_a'(x)=a-2ax$，对于不动点 0，$g_a'(0)=a$，因此当 $0<a<1$ 时 0 是吸引的，当 $a>1$ 时是 0 排斥的，此处不讨论 $a\leqslant 0$ 的情况.

322
~
323

对不动点 p_a，

$$g'_a(p_a) = a - 2a\left(\frac{a-1}{a}\right) = a - 2a + 2 = 2 - a.$$

所以当 $0<a<1$ 时，p_a 是排斥的(p_a 为负值)；当 $1<a<3$ 时，$|2-a|<1$，且 p_a 是吸引的；当 $a>3$ 时，$g_a'(p_a)=2-a<-1$，且不动点是排斥的.

下面的命题给出了吸引的不动点 p_a 的吸引域.

命题 9.3.13 设逻辑斯谛族映射 g_a 中 $0<a<3$，则不动点 p_a 的吸引域是整个开区间 $(0,\ 1)$，即 $\mathcal{B}(p_a,\ g_a)=(0,\ 1)$，特别地，除 0 和 p_a 外 g_a 再无其他周期点.

证明 在例 9.2.1 中我们已证明了当 $a=1.5$ 时的情况，其推导过程也适用于 $1<a\leqslant 2$ 的情形，此时不动点 p_a 小于临界点(即导数等于零的点)0.5.

因此我们仅证明 $2<a<3$ 的情形(读者可能会考虑 $a=2.5$，$p_a=0.6$ 的特殊情况)，首先考虑 p_a 的区间：左端点是 0.5，右端点被映射成 0.5. 为得到大于 0.5 且被映射成 0.5 的点，解方程

$$0=ax^2-ax+0.5,$$

得

$$x_+=\frac{1+\sqrt{1-2/a}}{2a} \quad \text{和} \quad x_-=\frac{1-\sqrt{1-2/a}}{2}.$$

对 0.5 的迭代 $g_a(0.5)=a/4$，可验证此点属于区间 $[0.5,\ x_+]$，显然 $g_a(0.5)=a/4>0.5$，下面的计算表明 $a/4<x_+$：

$$\frac{a}{4}\overset{?}{<}\frac{1+\sqrt{1-2/a}}{2}$$

$$a-2\overset{?}{<}2\sqrt{1-2/a}$$

$$a^2-4a+4\overset{?}{<}4-\frac{8}{a}$$

$$a^3-4a^2+8\overset{?}{<}0$$

$$(a-2)(a^2-2a-4)\overset{?}{<}0$$

$$a^2-2a-4\overset{?}{<}0.$$

最后一行的左端当 $a=1\pm\sqrt{5}$ 时等于零，当 $1-\sqrt{5}<a<1+\sqrt{5}$ 时为负，由 $1-\sqrt{5}<2$ 及 $3<1+\sqrt{5}$ 可知当 $2<a<3$ 时最后一行的左端为负，因此当 $2<a<3$ 时区间 $[0.5,\ x_+]$ 的两个端点都被映射到 $[0.5,\ x_+]$ 中，此时 g_a 单调减少，且 $g_a([0.5,\ x_+])\subset[0.5,\ x_+]$. 因为区间被 g_a 映射到自身，所以称其为正不变的.

此外，由 $g_a(0.5)<x_+$ 可知

$$g_a^2(0.5)>g_a(x_+)=0.5,$$

$$g_a^2(x_+)=g_a(0.5)<x_+.$$

如图 9.3.10b 所示，g_a^2 在区间是单调递增的，把定理 9.2.4 应用于 g_a^2，则有 $[0.5,\ x_+]\subset$ 324 $\mathcal{B}(p_a,\ g_a^2)$，参见图 9.3.11.

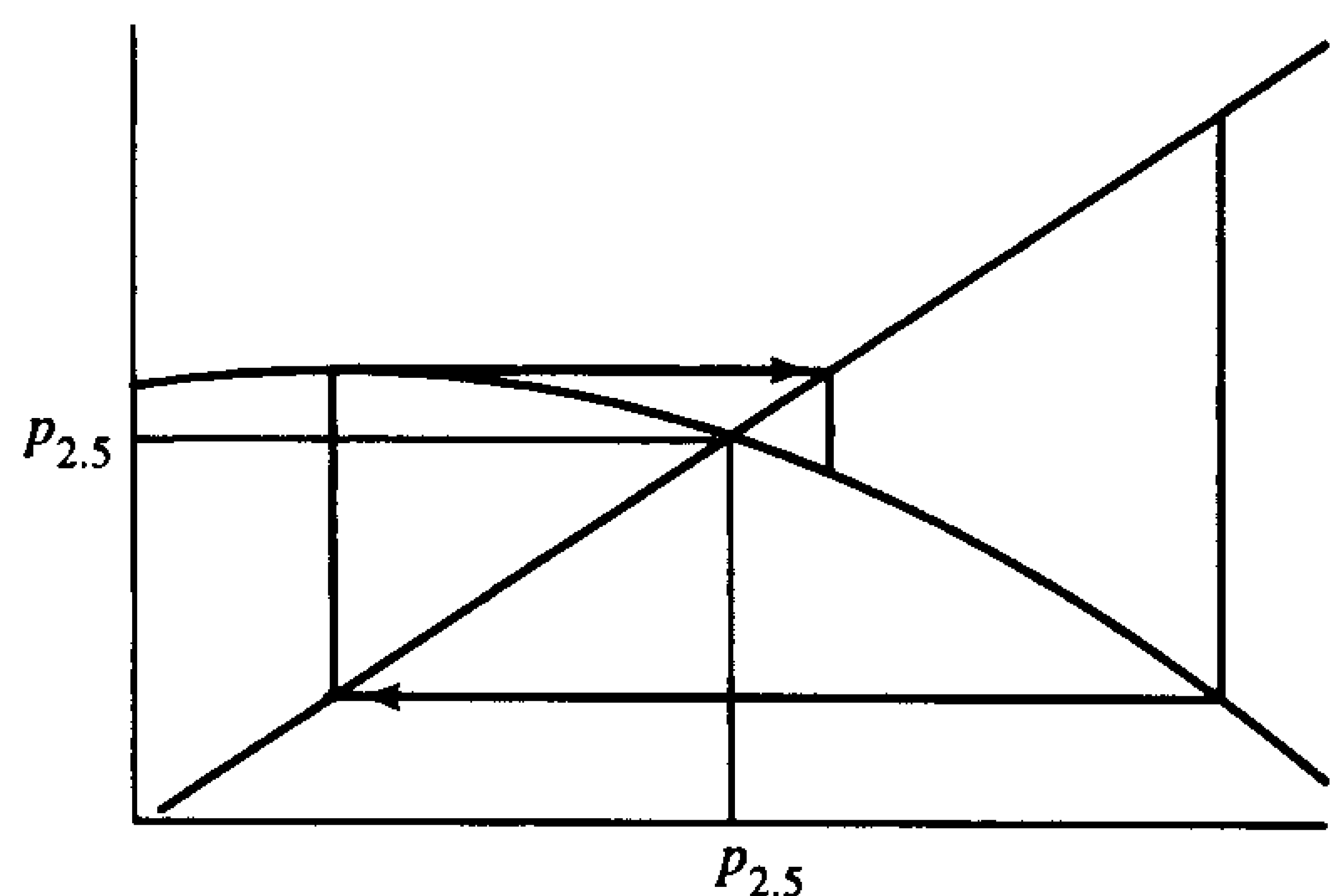
由对称性可知 $g_a^2([x_-,\ 0.5])=g_a^2([0.5,\ x_+])$，因此

$$[x_-,0.5]\subset\mathcal{B}(p_a;g_a^2).$$

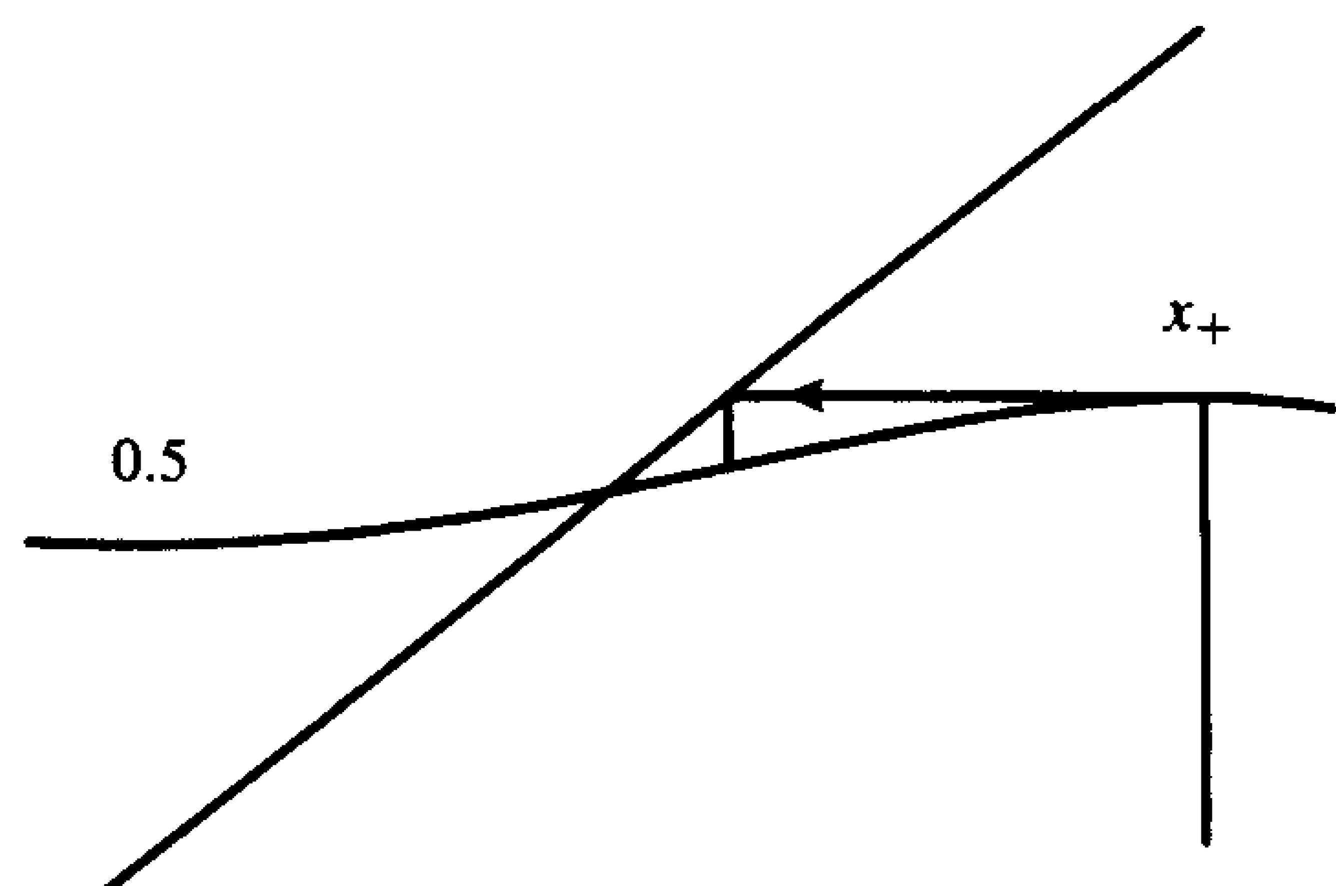
对任意点 $0<x_0<0.5$，每被 g_a^2 迭代一次都变大，因此

$$0<x_0<x_2<x_4<\cdots<x_{2n}.$$

当 $x_{2n}>0.5$ 时，因为 x_{2n} 必小于 x_+，所以 $x_{2n}\in[0.5,\ x_+]$，又由于 x_{2n} 属于 $\mathcal{B}(p_a,\ g_a^2)$，所以 x_0 必属于 $\mathcal{B}(p_a,\ g_a^2)$，这表明 $(0,\ x_+)\subset\mathcal{B}(p_a,\ g_a^2)$.



a) x_+的迭代



b) $g^2_{2.5}$介于0.5和x_+间的图像

图 9.3.10 $a=2.5$ 时的逻辑斯谛映射

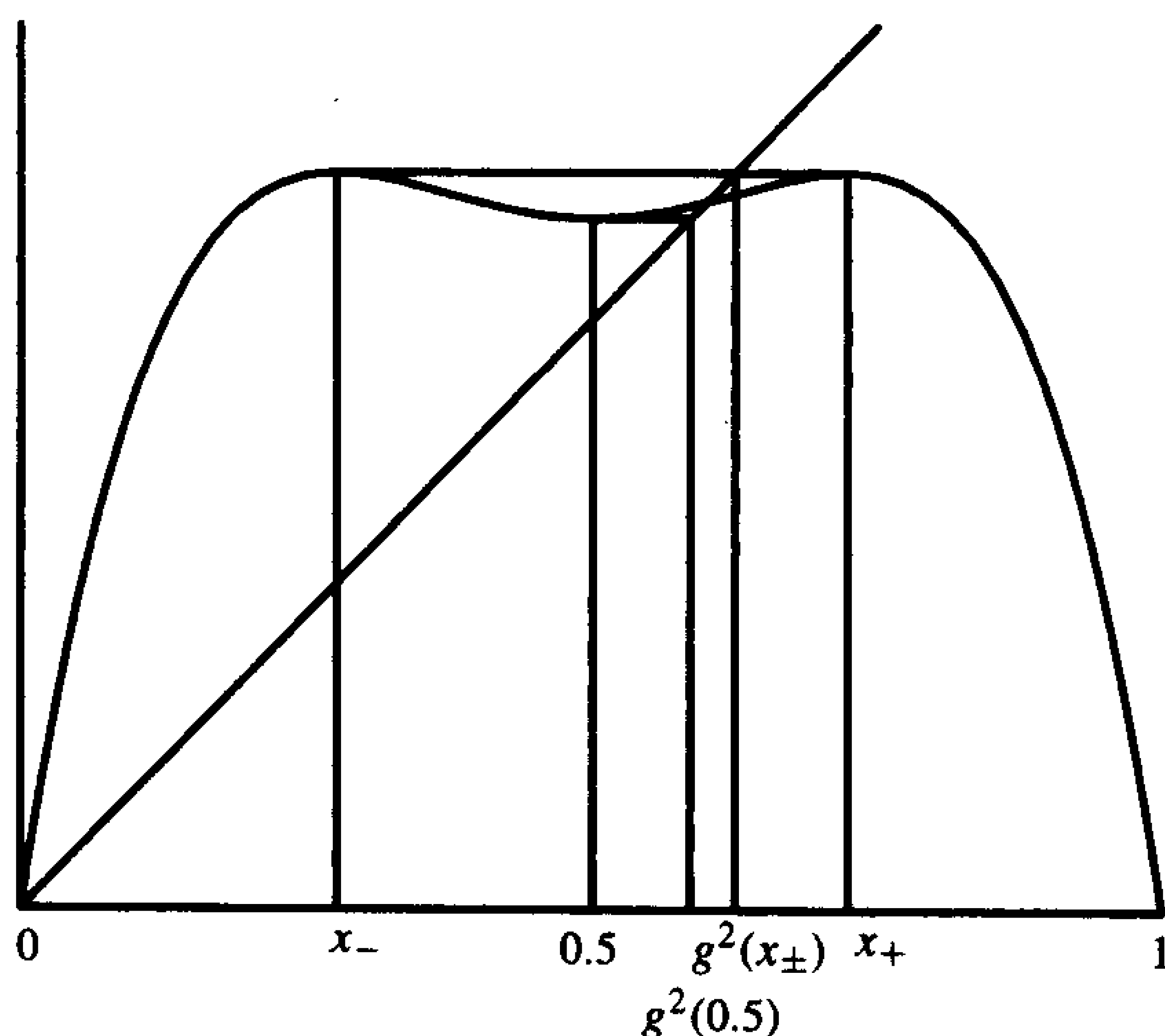


图 9.3.11 $g^2_{2.5}$介于 0 和 1 间的图像以及 $g^2_{2.5}(x_-)$，$g^2_{2.5}(0.5)$，$g^2_{2.5}(x_+)$的迭代

对任意点 $x_+<x_0<1$，$g_a^2(x_0)=x_2$ 必属于$(0,\ x_+]$，由前面的讨论可知 x_0 必属于$\mathcal{B}(p_a,\ g_a^2)$，这便证明了$(0,\ 1)$包含在$\mathcal{B}(p_a,\ g_a^2)$中.

最后考虑奇数次迭代，对 $x_0\in(0,\ 1)$，由上面的讨论可知存在 $x_{2k}\in[0.5,\ x_+]$，此后 x_{2k}经 g_a 的迭代仍属于该区间，由 $x_{2j}=g_a^{2j}(x_0)$收敛于 p_a 以及 g_a 的连续性可知 $x_{2j+1}=g_a(x_{2j})$也必收敛于 p_a，因此 x_0 的所有迭代都收敛于 p_a，这表明 x_0 不仅属于$\mathcal{B}(p_a,\ g_a^2)$而且属于$\mathcal{B}(p_a,\ g_a)$，证毕. ■ 325

2-周期点

我们首先找出 2-周期点，然后讨论其稳定性. 映射 g_a^2 的不动点必满足

$$\begin{aligned}0 &= g_a^2(x)-x=g_a(ax(1-x))-x\\ &= a[ax(1-x)][1-ax(1-x)]-x\\ &= x(ax-a+1)[a^2x^2-(a^2+a)x+(a+1)].\end{aligned}$$

前两个因子的零点分别是 g_a 的不动点 0 和 p_a，因此 2-周期点完全由后一个因子的零点决定，令最后一个因子等于零，得

$$q_a^{\pm}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(a-3)(a+1)}.$$

当 $a\geqslant3$ 时这些根都是实数，因为 2-周期点经 g_a 迭代后仍是 2-周期点，所以必有 $g_a(q_a^+)=q_a^-$

和 $g_a(q_a^-)=q_a^+$，当 $a=3$ 时，它们是同一个点，即不动点 p_3，

$$p_3=\frac{2}{3}=q_3^{\pm}.$$

因此我们仅对 $a>3$ 时的点感兴趣.

在下面的定理中，我们归纳了2-周期轨道这些结论，并讨论它的稳定性.

定理 9.3.14　(a) 当 $a>3$ 时，逻辑斯谛族映射 $g_a(x)=ax(1-x)$ 有唯一的2-周期轨道：

$$q_a^{\pm}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(a-3)(a+1)}.$$

326

(b) 当 $3<a<1+\sqrt{6}$ 时，2-周期轨道是吸引的，当 $a>1+\sqrt{6}$ 时，它是排斥的.

证明　我们已证明定理的第一部分，为证(b)，计算

$$\begin{aligned}|(g_a^2)'(q_a^{\pm})|&=|g_a'(q_a^-)|\cdot|g_a'(q_a^+)|\\&=|(a-2aq_a^-)(a-2aq_a^+)|\\&=|(-1+\sqrt{(a-3)(a+1)})(-1-\sqrt{(a-3)(a+1)})|\\&=|1-(a^2-2a-3)|\\&=|-a^2+2a+4|.\end{aligned}$$

绝对值号里面的部分当 $a=3$ 时为1；当 $a=1+\sqrt{6}$ 时为 -1，当 $3<a<1+\sqrt{6}$ 时介于1和 -1 之间，因此当 $3<a<1+\sqrt{6}$ 时周期轨道是吸引的；当 $a>1+\sqrt{6}$ 时，此轨道是排斥的. ■

例 9.3.15　本例讨论2-周期轨道的吸引域，当 $a=3.3$ 时，2-周期轨道由点0.479 4…和0.823 6…构成，表9.3.1给出了初始值为0.25，0.5和0.95的三条轨道，可以看出它们都收敛于2-周期轨道. 因为表9.3.1中只给出小数点后四位，所以看上好像三条轨道上某些点落在2-周期轨道上，其实并不相交. 图9.3.4给出了 $x_0=0.25$ 阶梯图，图9.3.12给出对应于 $x_0=0.5$，0.95和 $f(0.25)=0.618\,75$ 的 x_j 关于 j 的图像.

表 9.3.1　$g_{3.3}$ 的三条轨道

j	$g_{3.3}^j(0.25)$	$g_{3.3}^j(0.5)$	$g_{3.3}^j(0.95)$
0	0.250 0	0.500 0	0.950 0
1	0.618 8	0.825 0	0.156 8
2	0.778 5	0.476 4	0.436 2
3	0.569 1	0.823 2	0.811 6
4	0.809 3	0.480 4	0.504 7
5	0.509 4	0.823 7	0.824 9
6	0.824 7	0.479 2	0.476 6
7	0.477 1	0.823 6	0.823 2
8	0.823 3	0.479 5	0.480 3
9	0.480 2	0.823 6	0.823 7
10	0.823 7	0.479 4	0.479 2
11	0.479 2	0.823 6	0.823 6
12	0.823 6	0.479 4	0.479 5

■

要确定 2-周期轨道的吸引域需作进一步讨论，由于区间(0, 1)上收敛于 p_a 的点仅仅是经若干步迭代后等于 p_a 的那些点(即最终不动点)，因此这些点并不属于 2-周期轨道的吸引域，可称它们为 p_a 的吸引域，记 $g_a^{-j}(p_a)$ 为第 j 步迭代后等于 p_a 的点；即

$$g_a^{-j}(p_a) = \{x : g_a^j(x) = p_a\}.$$

因此区间(0, 1)上最终不动点的集合是

$$\mathcal{B}(p_a;g_a) = \bigcup_{j=0}^{\infty} g_a^{-j}(p_a),$$

它是可数的，如下面的定理所述它在区间(0, 1)的补集就等于 2-周期轨道的吸引域.

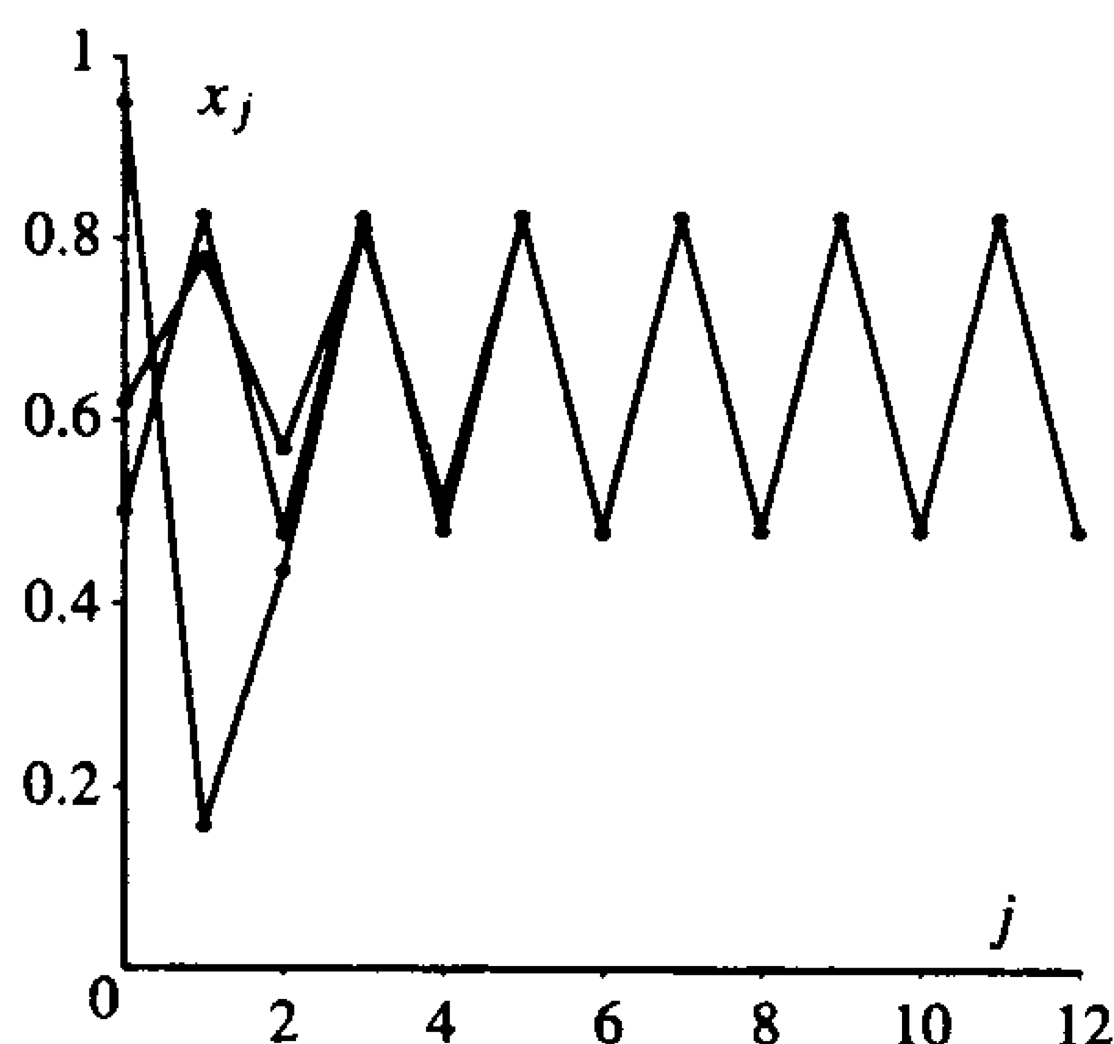


图 9.3.12　$g_{3.3}(x) = 3.3x(1-x)$ 对应于 $x_0 = 0.5$，0.95 和 $f(0.25) = 0.61875$ 的图像

[327]

定理 9.3.16　当 $3 < a < 1+\sqrt{6}$ 时，逻辑斯谛族映射 $g_a(x)$ 的 2-周期轨道的吸引域是区间(0, 1)除去最终不动点的余集，即

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}(q_a^{\pm});g_a) = (0,1) \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} g_a^{-j}(p_a).$$

而且两个不动点和 2-周期轨道是仅有的周期点.

当 $a > 1+\sqrt{6}$ 时，逻辑斯谛族映射 $g_a(x)$ 还有其他类型的周期点，但如 9.4 节所述，对任何一个参数它至多有一条吸引的周期轨道，当 a 刚大过 $1+\sqrt{6}$ 时会出现一条吸引的 4-周期轨道，随参数增大接着会出现一条吸引的 8-周期轨道等. 通过计算机模拟会发现当 $3 < a < 3.56995\cdots$ 时，有一吸引的周期轨道，其周期为 2 的整数幂，这些周期当 a 趋向于 $3.56995\cdots$ 时经由倍周期突变而趋向于无穷大，正如 9.5.1 节所述. 因为通过先计算函数的任意次幂然后解一个代数方程的方式来确定所有 2^k-周期点是不可能的，所以这种方法仅限于讨论不动点和 2-周期点，对于其他周期点，我们需要利用计算机模拟.

9.4　周期汇和施瓦茨导数

由 9.3.2 节的讨论可知：当 $1 < a < 3$ 时逻辑斯谛族映射 g_a 有吸引不动点 p_a；当 $3 < a < 1+\sqrt{6}$ 时 g_a 有一条吸引的 2-周期轨道. 而对更大的参数值，g_a 先后有吸引的 4-周期、8-周期以及 2^k-周期的轨道(参见 9.5.1 节的讨论)，本节将解释为什么 g_a 对于同一个参数不能有两条吸引的周期轨道，这一点需要用到施瓦茨导数. 这一结果曾在实验中被观察到，但是直到 1978 年才由 D. Singer[**96**]通过引入复杂分析中的一个量加以证实.

[328]

由 g_a 的导数 $g_a'(x) = a - 2ax$ 可知，仅当 $x = 0.5$ 时 g_a 的导数等于 0(即 g_a 有唯一的临界点 $x = 0.5$)，本节的主要定理表明：g_a 的任何吸引的周期轨道的吸引域必包含此临界点. 因为临界点是唯一的，所以包含它的吸引域也是唯一的，从而 g_a 只有一条吸引的周期轨道.

我们是利用 g_a 的导数所满足的一个条件来证明吸引的周期轨必包含临界点这一限制的，

这个条件能保证 g_a 的任意次幂 g_a^k 的图像都不同于 $f(x)=\frac{3}{4}x+x^3$ 的图像. $f(x)$有三个不动点：0 和 ±0.5，其中 0 的吸引域包含区间(−0.5，0.5)，但区间中不含任何临界点，参见图 9.4.1.

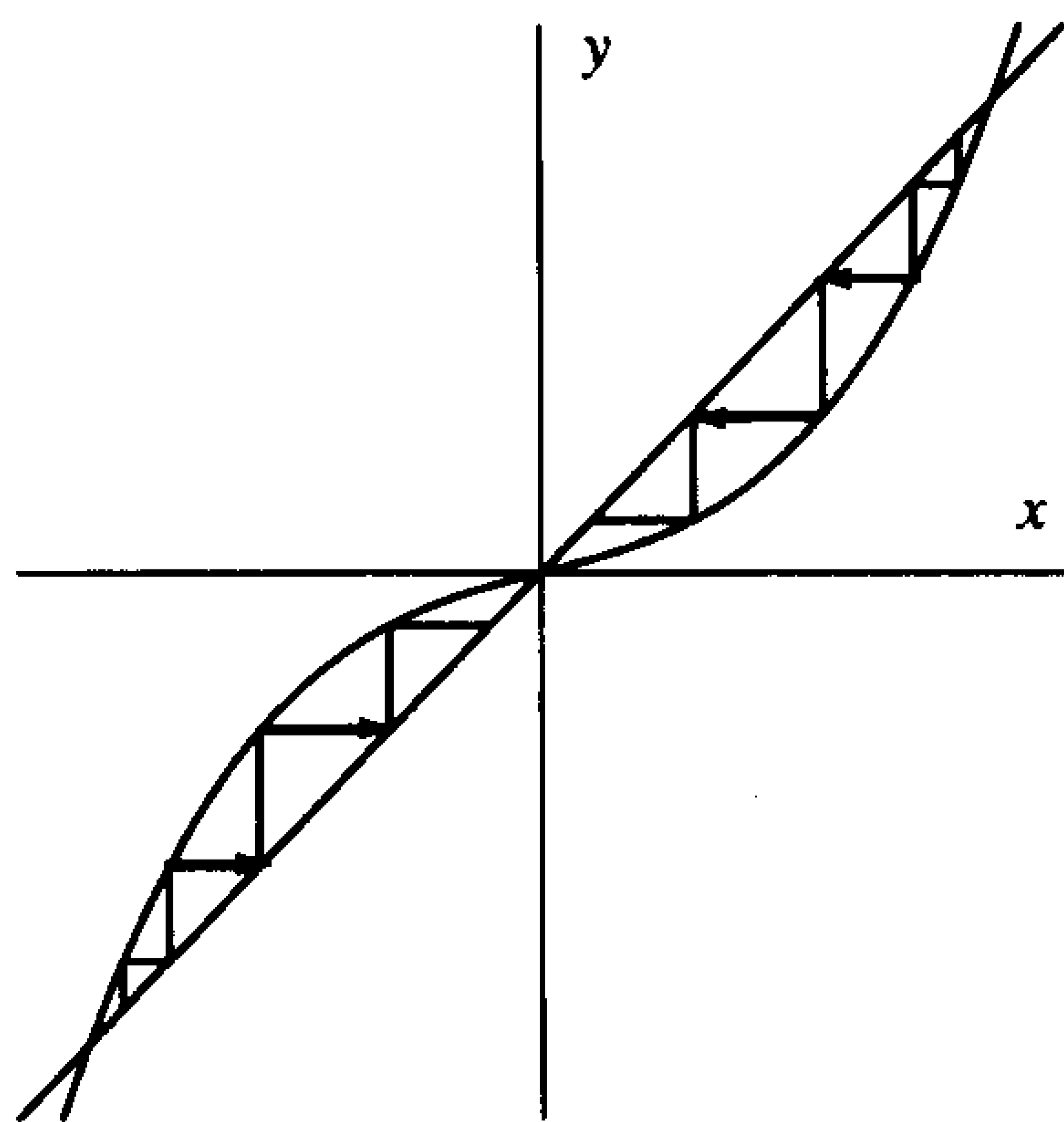


图 9.4.1　对于负的施瓦茨导数来说是不可能的

为了证明吸引的周期轨具有这条性质，下面引入一种关于任意函数 f 的非线性项的测度，它被称为施瓦茨导数，记作 $S_f(x)$，它有以下性质：

(1)若对所有满足 $f'(x)\neq 0$ 的 x 都有 $S_f(x)<0$，则 f 介于三个不动点间的图像不会是图 9.4.1.

(2)若对所有满足 $f'(x)\neq 0$ 的 x 都有 $S_f(x)<0$，则对所有满足 $(f^n)'(x)\neq 0$ 的 x 都有 $S_{f^n}(x)<0$.

性质(2)说明在不计算 f 幂的情况下就可以确定 $S_{f^n}(x)<0$，再将性质(1)应用于 f^n，可知 f 任意次幂的图像都不存在类似于图 9.4.1 的部分，显然图 9.4.1 中映射的吸引的周期点的吸引域中不含任何临界点.

为了找到这个量，先求出 f 的二阶导数，再让它除以一阶导数，得

$$N_f(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)},$$

$N_f(x)$称为是 f 的非线性部分(要注意，这里虽然使用了与牛顿映射相同的符号，但与牛顿映射毫无关系)，如果 f 是线性的，则 $f''(x)\equiv 0$，从而非线性部分 $N_f(x)\equiv 0$，$N_f(x)$因此而得名. 下面考虑非线性部分的导数或非线性部分的无穷小改变量：

329

$$N'_f(x)=\frac{f'''(x)f'(x)-f''(x)^2}{f'(x)^2}.$$

命题 9.4.4 表明 $N'_f(x)$具有上述性质(1)，但是 $N'_f(x)$不具有性质(2)，为使 $N'_f(x)$同时具有(1)和性质(2)，对其做如下修改：

$$S_f(x)=N'_f(x)-\frac{1}{2}[N_f(x)]^2$$

$$=\frac{f'''(x)f'(x)-\frac{3}{2}f''(x)^2}{f'(x)^2}.$$

需要特别注意当 $f''(x)=0$ 时 $S_f(x)=N_f(x)$，此外对于使得 $f'(x)=0$ 的点 $S_f(x)$无定义.

定义 9.4.1　设 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 C^3 类函数，定义 f 的施瓦茨导数为

$$S_f(x)=\frac{f'''(x)f'(x)-\frac{3}{2}f''(x)^2}{f'(x)^2}.$$

引理 9.4.2　设 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 C^3 类函数，则

$$S_{g\circ f}(x)=S_g(f(x))\cdot|f'(x)|^2+S_f(x).$$

直接计算便可得到结论，我们在 $N_f'(x)$ 后面加上项 $-\frac{1}{2}[N_f(x)]^2$ 就是为了保证该引理正确.

命题 9.4.3 若当 $f'(x)\neq 0$ 时 $S_f(x)<0$，则当 $(f^n)'(x)\neq 0$ 时 $S_{f^n}(x)<0$，这就是性质(2).

证明 首先考虑 f 的二次幂，由引理 9.4.2，得

$$S_{f^2}(x) = S_f(f(x))\cdot|f'(x)|^2 + S_f(x),$$

因为 $|f'(x)|^2>0$，$S_f(f(x))<0$ 和 $S_f(x)<0$，所以上式小于零.

假设对 $n-1$ 结论成立，则对 n 我们有

$$S_{f^n}(x) = S_{f^{n-1}}(f(x))\cdot|f'(x)|^2 + S_f(x),$$

因为 $|f'(x)|^2>0$，$S_{f^{n-1}}(f(x))<0$（归纳假设），所以 $S_{f^n}(x)<0$. ■

下面的定理表明施瓦茨导数（或 $N_f'(x)$）满足性质(1).

命题 9.4.4 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 C^3 类函数，对所有满足 $f'(x)\neq 0$ 的 x 都有 $S_f(x)<0$.

(a) 若 m 是 $g(x)=f'(x)$ 的极小值点，则 $g(m)=f'(m)\leqslant 0$.

(b) 设 $a<p<b$ 是 f 的三个不动点，$f(a)=a$，$f(p)=p$，$f(b)=b$，进一步假设(i) $0<f'(p)<1$，(ii) 对 $a<x<p$，$a<x<f(x)<p$ 以及(iii)当 $p<x<b$ 时，$p<f(x)<x<b$，则存在 $x_c\in(a,b)$ 使得 $f'(x_c)=0$（这说明施瓦茨导数具有性质(1)）.

证明在本章最后的 9.8 节给出.

综合上面的各个命题，可得下面的定理.

定理 9.4.5 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 C^3 类函数，对所有满足 $f'(x)\neq 0$ 的 x 都有 $S_f(x)<0$，再设 p 是吸引的 n-周期点，则下面关于 p 的轨道的吸引域的两个论述中必有一个成立：

(1) 吸引域 $\mathcal{B}(\mathcal{O}_f^+(p),f)$ 可达到 ∞ 或 $-\infty$.

(2) 存在 $\mathcal{B}(\mathcal{O}_f^+(p),f)$ 中的点 x_c 使得 $f'(x_c)=0$.

证明在本章最后的 9.8 节给出.

330

例 9.4.6 对任意参数 a，逻辑斯谛函数的施瓦茨导数都是负数，事实上

$$g_a'(x) = a-2ax$$

$$g_a''(x) = -2a$$

$$g_a'''(x) = 0,$$

因此

$$S_{g_a}(x) = \frac{(a-2ax)0-\frac{3}{2}(-2a)^2}{(a-2ax)^2} = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0.$$

由于逻辑斯谛族函数的施瓦茨导数恒为负数，所以 g_a 的任意次幂的施瓦茨导数恒为负数，再由定理 9.4.5 可知 g_a 的吸引的周期轨的吸引域或者包含一个临界点或者可延展到无穷. 由于区间[0, 1]外的点的前行轨都趋于负无穷，这说明没有可延展到无穷的吸引域，从而任一吸引域必包含一个临界点，又因为 $x=0.5$ 是唯一的临界点，所以对给定的参数至多有一条吸

引的周期轨道. ■

例 9.4.7 考虑反正切函数的倍数

$$A(x) = r\arctan(x).$$

因为

$$A'(x) = \frac{r}{1+x^2},$$

$$A''(x) = \frac{-r2x}{(1+x^2)^2},$$

$$A'''(x) = \frac{r(6x^2-2)}{(1+x^2)^3},$$

所以

$$S_A(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right)^2$$
$$= \frac{6x^2-2-6x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{(1+x^2)^2} < 0.$$

当 $0<r<1$ 时，原点是吸引不动点，吸引区域是整条实轴；此函数无临界点，但吸引区域延展到 $\pm\infty$，从而符合定理.

当 $r>1$ 时，有三个不动点：$x=0$ 和 $\pm x_0$，其中 $x_0>0$ 满足

$$\arctan(x_0) = x_0/r.$$

原点 $x=0$ 是排斥的，$\pm x_0$ 是吸引的，此函数无临界点，但 $\pm x_0$ 的吸引区域可分别延展到 $\pm\infty$，从而符合定理. ■

331

9.5 周期点的分支

9.3.2 节中逻辑斯谛族映射 g_a 的不动点 p_a 当 $a=3$ 时变为不稳定，而且当 $3<a<1+\sqrt{3}$时会出现一条吸引的 2-周期轨道，可见周期轨道的数量和稳定性当 $a=3$ 发生变化，因此称逻辑斯谛族映射映射在 $a=3$ 经历了一次*分支*(bifurcation)，$a=3$ 称为是*分支值*. bifurcation 来自法语，用以描述路的分岔或其他开裂、变化. 对于逻辑斯谛族映射在 $a=3$ 的特殊分支来说，吸引的周期轨的周期由 1 变为 2，我们称之为*倍周期分支*(period doubling bifurcation)，本节将讨论这种分支以及*二重分支*(tangential bifurcation)或称*鞍-结点分支*(saddle-node bifurcation)，后一种分支是指在分支值处从无周期轨变成有两条同周期的周期轨(或者两条同周期的周期轨被破坏而变成无周期轨)，这种分支会在满足 $f_{\mu_0}(x_0)=x_0$ 和 $f'_{\mu_0}(x_0)=1$ 的不动点 x_0 和参数 μ_0 处发生(即映射 f 的图像与对角线在 x_0 处相切).

例 9.5.1(二重分支或鞍-结点分支) 令 $f_\mu(x)=\mu+x-x^2$，则不动点满足

$$x = \mu + x - x^2,$$
$$x^2 = \mu,$$

于是

$$x_\mu^\pm = \pm\sqrt{\mu}.$$

当$\mu<0$时，不存在(实)不动点；当$\mu>0$时，有两个不动点，参见图 9.5.1. 从图像上看：当$\mu<0$时，f_μ 的图像完全在对角线下方，与对角线不相交；当$\mu=0$时，f_0 的图像与对角线交于一点，更确切地说是相切；当$\mu>0$时，f_μ 的图像与对角线相交于两点. 因为f_μ 关于μ是单增的，所以f_μ 的图像随着μ的增大而上移，从而引起与对角线交点数量的变化. 注意，在分支点，f_μ 图像与对角线相切：事实上，由$f'_\mu(x)=1-2x$ 可知在分支点处$f_0(0)=1$.

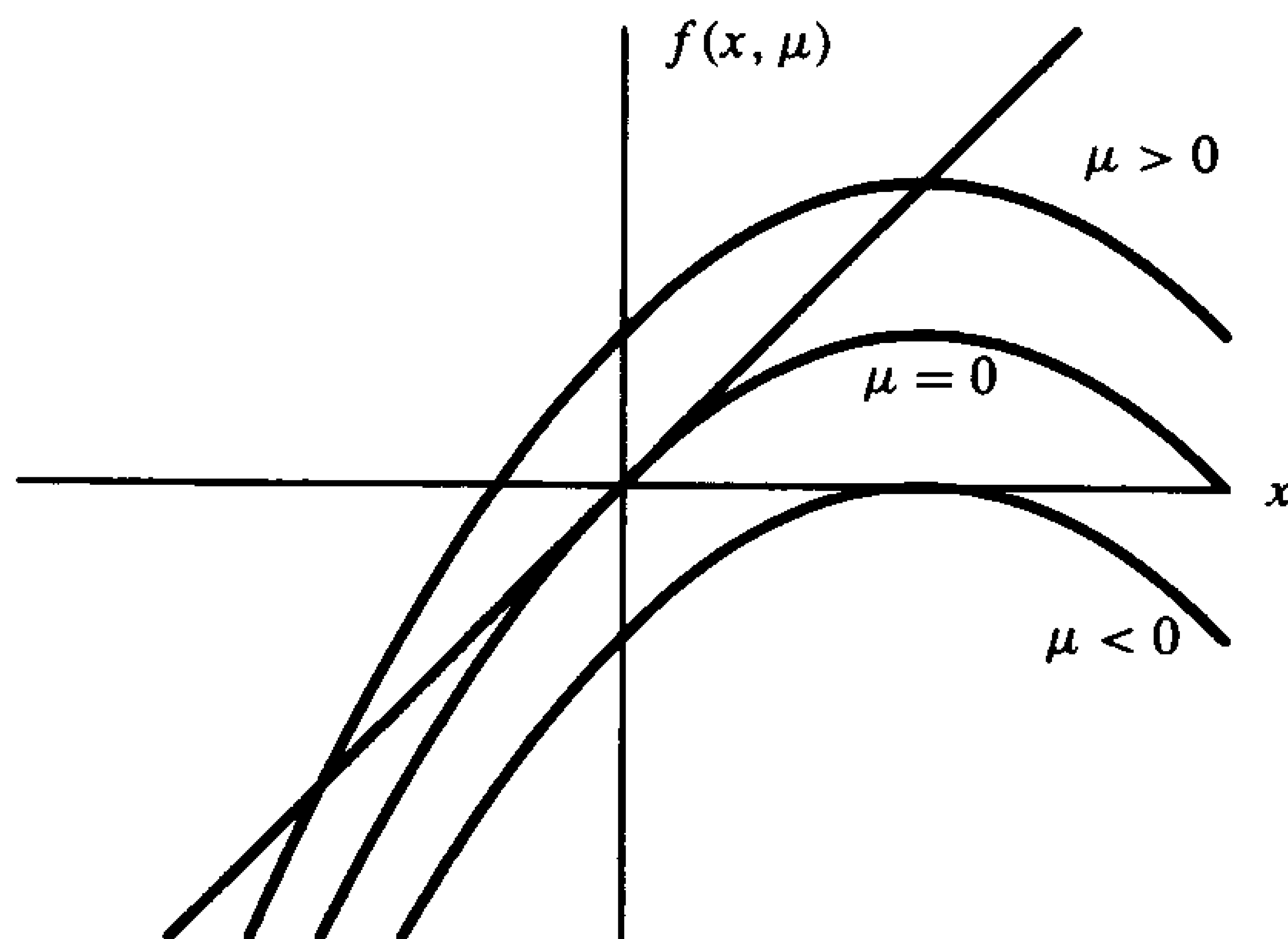


图 9.5.1　例 9.5.1 中两个不动点的产生过程，$\mu<0$，$\mu=0$，$\mu>0$

对于$\mu>0$,

$$f'_\mu(x_\mu^-)=1+2\sqrt{\mu}>1,$$

这表明 x_μ^- 是排斥的；另一方面，在 x_μ^+ 处

$$f'_\mu(x_\mu^+)=1-2\sqrt{\mu}<1,$$

此导数等于-1仅当

$$-1=1-2\sqrt{\mu},$$

$$2\sqrt{\mu}=2,\qquad 或$$

$$\mu=1.$$

因为$f'_\mu(x_\mu^+)$的值连续地依赖于μ的变化，所以当$0<\mu<1$时 x_μ^+ 是吸引的，当$\mu>1$时 x_μ^+ 是排斥的.

注意到 $x_\mu^+=\sqrt{\mu}$ 不是μ的可微函数，但是若把$\mu=(x_\mu^\pm)^2$ 看作 x 的函数，则它关于 x 是可微的，在本节定理中将使用后一种函数，在不动点曲线上用 x 值表示μ的值.

图 9.5.2 中画出了(μ,x)平面上所有不动点的集合，此图称为分支图(bifurcation diagram)，图中表示 x_μ^- 的一支画成虚线是因为这些不动点是排斥的，x_μ^+ 的一支上$\mu>1$的部分画成虚线也是因为这个原因. ■

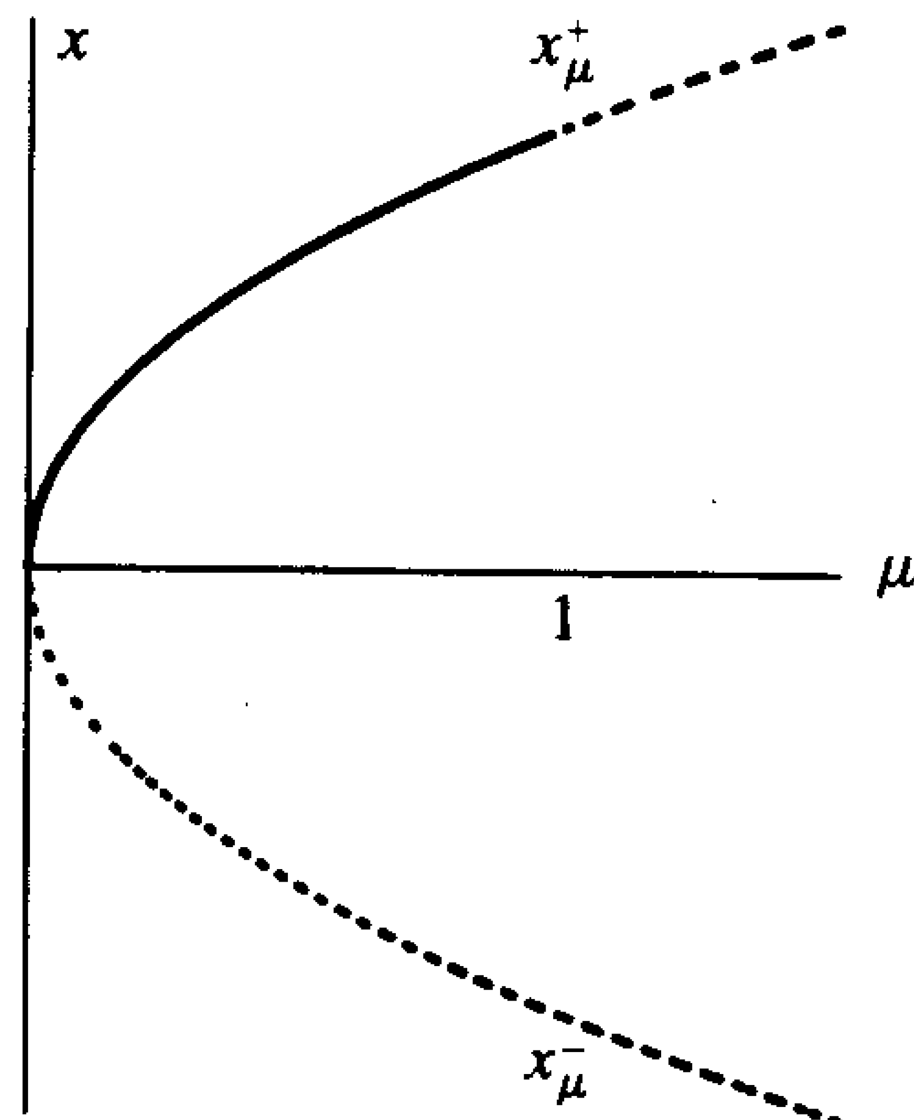


图 9.5.2　例 9.5.1 中鞍结点分支的分支图

上面的例子非常具有代表性，如果 x^2 项的系数与$f_\mu(x)$符号相反，那么不动点将产生于分支值之前而非分支值之后. 而

且，不能仅仅利用函数表达式中某些项的系数，下面定理的条件和结论中出现了函数关于 x 和 μ 的导数，为表示这些导数，我们把 $f_\mu(x)$ 看成是两个变元 (x,μ) 的实值(从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$)函数. 令 μ_0 表示参数 μ 的分支值，x_0 表示分支值处的不动点，即 $f_{\mu_0}(x_0)=x_0$. 我们假设在分支值处 f_{μ_0} 图像与对角线相切，或假设 $f'_{\mu_0}(x_0)=1$；进一步假设 $f''_{\mu_0}(x_0)\neq 0$，因此 f_{μ_0} 图像位于对角线的同侧. 上面例子中 $f_\mu(x)$ 中包含项 μ，当 μ 变化时函数图像上下移动，为使一般的函数 $f_\mu(x)$ 也具有这种性质，可作此相应假设：$\frac{\partial f}{\partial\mu}(x_0,\mu_0)\neq 0$. 这些分析都归纳在下面的定理中.

332
~
333

定理 9.5.2(二重分支或鞍结点分支)　设 f 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的 C^2 类函数，记 $f(x,\mu)=f_\mu(x)$，设 μ_0 是一个分支值，它有一个导数为 1 的不动点 x_0，即

(1) $f(x_0,\mu_0)=x_0$.

(2) $f'_{\mu_0}(x_0)=1$.

进一步假设 f 的导数满足如下条件：

(3) 二阶导数 $f''_{\mu_0}(x_0)\neq 0$，因此当 x 靠近 x_0 时 f_{μ_0} 的图像位于对角线的同侧.

(4) f_μ 的图像随 μ 的变化而上下移动，或更明确地，$\frac{\partial f}{\partial\mu}(x_0,\mu_0)\neq 0$.

则存在包含 x_0 的区间 $\boldsymbol{I}$ 和包含 μ_0 的区间 $\boldsymbol{J}$，以及从 $\boldsymbol{I}$ 到 $\boldsymbol{J}$ 的连续函数 $\mu=m(x)$ 使得如下条件成立：

(i) $f_{m(x)}(x)=x$，$x\in\boldsymbol{I}$.

(ii) 函数 $\mu=m(x)$ 的图像过点 (x_0,μ_0)，即 $m(x_0)=\mu_0$.

(iii) 函数 $m(x)$ 的图像给出了 f 在 $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{J}$ 上的所有不动点.

(iv) $m(x)$ 的导数满足 $m'(x_0)=0$ 且

$$m''(x_0)=\frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\mu_0)}{\frac{\partial f}{\partial\mu}(x_0,\mu_0)}\neq 0,$$

因此 $\mu=m(x)=\mu_0+\frac{1}{2}m''(x_0)(x-x_0)^2+O(|x-x_0|^3)$. 若 $m''(x_0)>0$，则不动点在 $\mu>\mu_0$ 时出现. 若 $m''(x_0)<0$，则不动点在 $\mu<\mu_0$ 时出现.

(v) $m(x)$ 的图像上位于 x_0 不同侧的不动点的吸引性相反，事实上

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,m(x))=1+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\mu_0)(x-x_0)+O(|x-x_0|^2).$$

在 (iv) 和 (v) 中，$O(|x-x_0|^k)$ 表示 $(x-x_0)^k$ 的高阶项，即存在常数 $C>0$ 使得 $O(|x-x_0|^k)\leqslant C|x-x_0|^k$.

该定理的证明思路详见 9.8 节.

下面考虑当 $f_{\mu_0}(x_0)=x_0$ 和 $f'_{\mu_0}(x_0)=-1$ 时发生的倍周期分支. 在本节的引言部分我们指出逻辑斯谛族映射在 $a=3$ 时会经历倍周期分支，下面也是一个出现倍周期分支例子，其中映射的导数更具有代表性.

例 9.5.3(倍周期分支)　令

$$f_\mu(x) = -\mu x + ax^2 + bx^3,$$

其中 a, $b>0$, 注意, 对所有的参数 μ 都有 $f_\mu(0)=0$, 而且 $f'_\mu(x) = -\mu + 2ax + 3bx^2$, $f'_\mu(0) = -\mu$, $f'_1(0) = -1$, 当 μ 单增地穿过 1 时不动点的稳定性由吸引变为排斥, 我们希望找到当 μ 靠近 1 时在 0 附近的 2-周期轨道. 图 9.5.3 给出了当 $\mu<1$, $\mu=1$ 和 $\mu>1$ 时 $f_\mu^2(x)$ 的图像, 可以看到当 $\mu>1$ 时 $f_\mu^2(x)$ 的图像与对角线又有两个新交点.

334

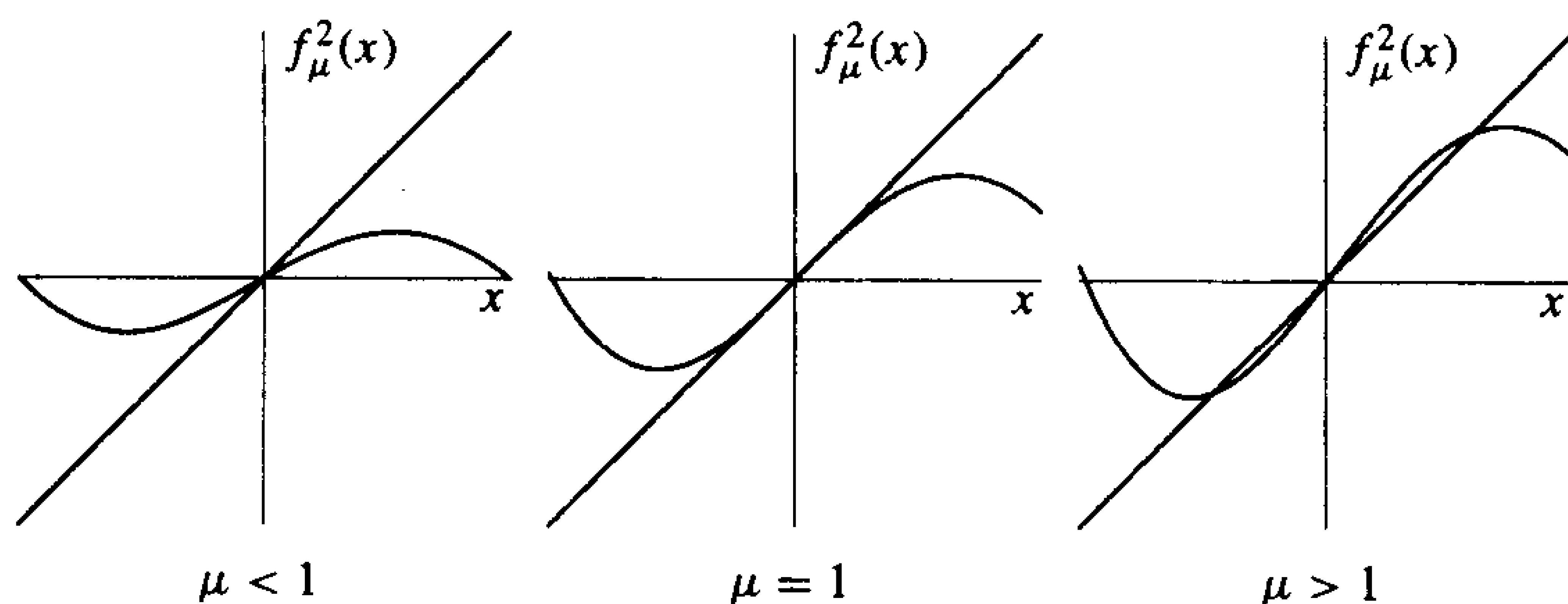


图 9.5.3　当 $\mu<1$, $\mu=1$ 和 $\mu>1$ 时 $f_\mu^2(x)$ 的图像

为了得到 2-周期轨道, 需要解方程 $0=f_\mu^2(x)-x$, 直接计算得

$$f_\mu^2(x) = \mu^2 x + (-a\mu + a\mu^2)x^2 + (-b\mu - 2a^2\mu - b\mu^3)x^3 + O(x^4),$$

其中 $O(x^4)$ 表示 x^4 的高阶项. 因为要找除 0 以外的 $f_\mu^2(x)-x$ 的根, 所以可用 x 去除 $f_\mu^2(x)-x$, 定义

$$\begin{aligned} M(x,\mu) &= \frac{f_\mu^2(x) - x}{x} \\ &= \mu^2 - 1 + (-a\mu + a\mu^2)x + (-b\mu - 2a^2\mu - b\mu^3)x^2 + O(x^3). \end{aligned}$$

要通过解 $M(x,\mu)=0$ 得到 μ 关于 x 的函数并不容易, 在 9.8 节中我们将利用隐函数微分法来计算 $\mu=m(x)$ 的导数并得到

$$\begin{aligned} m(0) &= 0, \\ m'(0) &= 0, \\ m''(0) &= 2(b+a^2). \end{aligned}$$

因此 $\mu=m(x)=1+(b+a^2)x^2+O(x^3)$. 为了使 $m(x)-1$ 的符号由二次项确定, 需要假设 $b+a^2\neq0$, 特别地, 若 $b+a^2\neq0$, 则 2-周期轨道当 $\mu>1=\mu_0$ 或 $\mu<1=\mu_0$ 时出现.

2-周期轨道的稳定性也由 $b+a^2$ 的符号决定, 在 9.8 节, 我们得到

$$\frac{\partial(f^2)}{\partial x}(x,m(x)) = 1 - 4(b+a^2)x^2 + O(x^3).$$

因此, 当 $b+a^2>0$ 时 2-周期轨道是吸引的; 当 $b+a^2<0$ 时它是排斥的, 图 9.5.4 给出了分支图. ■

下面的定理中给出了关于倍周期轨道的一般结果. 在定理中常数 β 与上面例子中 $b+a^2$ 的作用相同, α 则用以测量 $f'_\mu(x(\mu))$ 的变化情况, 在上面例子中它等于 -1. 因为 $f'_{\mu_0}(x_0) = -1\neq1$, 所以参数值微变时不动点持续存在, 即有一条过 x_0 的不动点曲线 $x(\mu)$.

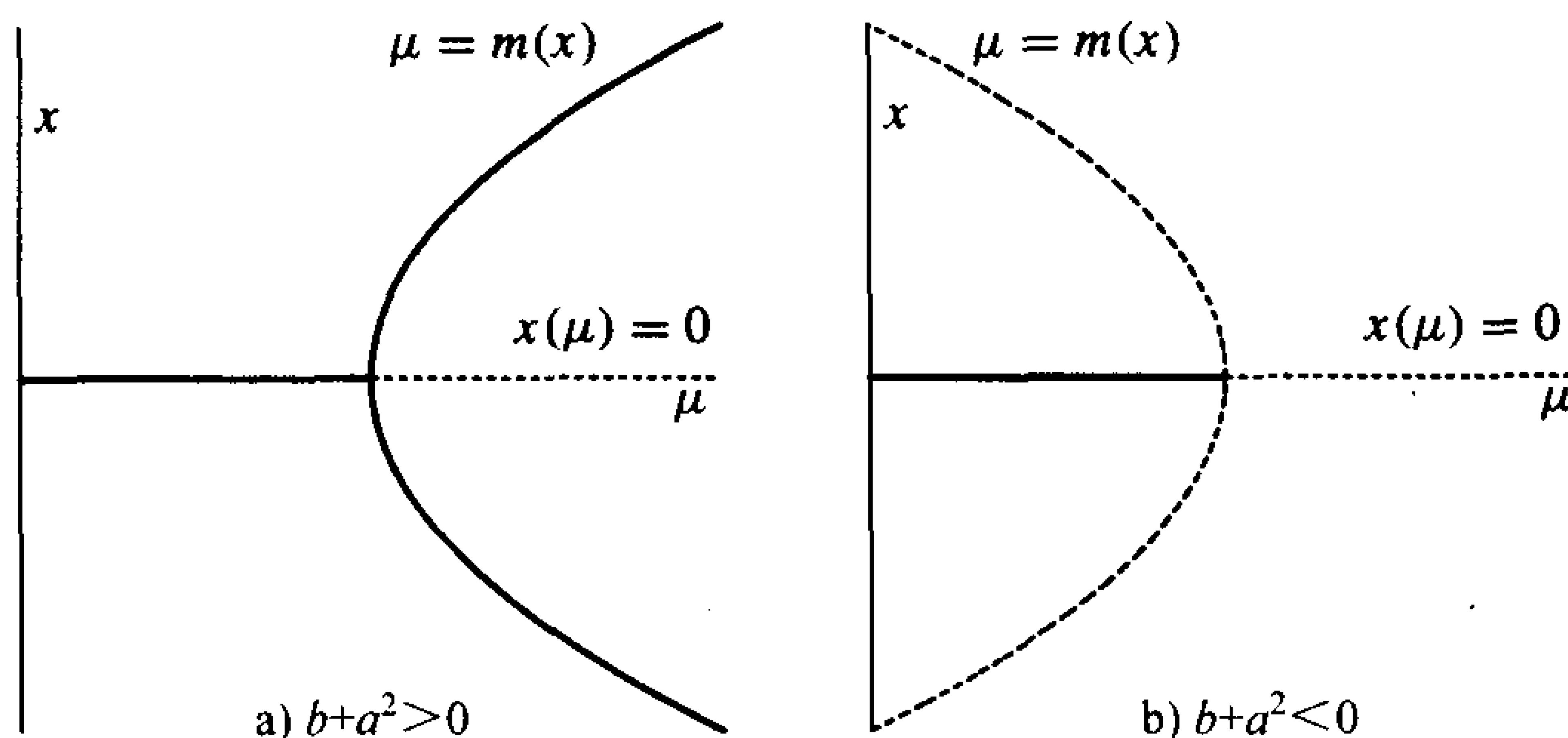


图 9.5.4　例 9.5.3 中的倍周期分支图

定理 9.5.4(倍周期分支)　设 f 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的 C^3 类函数，记 $f(x,\mu)=f_\mu(x)$，设 μ_0 是一个分支值，它有一个不动点 x_0 且 $f_{\mu_0}(x)$ 在 x_0 的导数为 -1，即

(1) $f(x_0,\mu_0)=x_0$.

335 (2) $f'_{\mu_0}(x_0)=-1$.

因为 $f'_{\mu_0}(x_0)=-1\neq1$，所以存在一条可微的不动点曲线 $x(\mu)$ 使得 $x(\mu_0)=x_0$，$f(x(\mu),\mu)=x(\mu)$. 进一步假设 f 的导数满足如下条件：

(3) $f'_\mu(x(\mu))$ 关于 μ 的导数在 (x_0,μ_0) 处不为零，即

$$\alpha=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\mu}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right]\Bigg|_{(x_0,\mu_0)}\neq0.$$

不动点的稳定性在 μ_0 处改变：当 $\alpha>0$ 时不动点对 $\mu>\mu_0$ 是吸引的；当 $\alpha<0$ 时不动点对 $\mu<\mu_0$ 是吸引的.

(4) $f^2_{\mu_0}(x)$ 的图像在与对角线相切时有非零立方项：

$$\beta=\left(\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,\mu_0)\right)+\left(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\mu_0)\right)^2\neq0.$$

则存在 x_0 的区间 $\boldsymbol{I}$ 和 μ_0 的区间 $\boldsymbol{J}$，以及从 $\boldsymbol{I}$ 到 $\boldsymbol{J}$ 的连续函数 $\mu=m(x)$ 使得如下各条成立：

(i) $(x,m(x))$ 是 2-周期点，即 $f^2(x,m(x))=x$ 但 $f(x,m(x))\neq x$，$x\neq x_0$.

(ii) 曲线 $\mu=m(x)$ 过点 (x_0,μ_0)，即 $m(x_0)=\mu_0$.

(iii) 函数 $m(x)$ 的图像给出了 f 在 $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{J}$ 上的所有不动点.

(iv) $m(x)$ 的导数满足 $m'(x_0)=0$ 且

$$m''(x_0)=-\frac{\beta}{\alpha}\neq0,$$

因此 $m(x)=\mu_0-(\beta/2\alpha)(x-x_0)^2+O(|x-x_0|^3)$. 从而若 $-\beta/\alpha>0$，则 2-周期轨道在 $\mu>\mu_0$ 时出现；若 $-\beta/\alpha>0$，则 2-周期轨道在 $\mu<\mu_0$ 时出现.

(v) 2-周期轨道的稳定性依赖于 β 的符号：当 $\beta>0$ 时它是吸引的；当 $\beta<0$ 时它是排斥的. 事实上

$$\frac{\partial(f_\mu^2)}{\partial x}(x,m(x))=1-4\beta(x-x_0)^2+O(|x-x_0|^3).$$

336 利用例 9.5.3 的思想可得到该定理的证明，详见[**87**].

逻辑斯谛族的分支图

逻辑斯谛映射族都存在一个分支值序列，在这些分支值处吸引的周期轨道的稳定性随参数值的变化而改变. 对于 $1<a<3$，不动点 p_a 是吸引的，而且 0 是除 p_a 之外唯一的不动点；对于 $3<a<1+\sqrt{6}$，两个不动点都是排斥的，而 2-周期轨道 $\{q_a^+, q_a^-\}$ 是吸引的；随着参数的增大，会出现一条吸引的 4-周期轨道. 图 9.5.5 给出了 $a=3.56$ 时的图示迭代，此时 g_a 有一条吸引的 8-周期轨道，前 200 步迭代未在图中画出，由于此后的迭代每 8 步就开始重复，可以看出仅有 8 条竖直线，这对应于一 8-周期轨道. 虽然很难用代数方法对此加以证明，但可以通过数值模拟观察出来. 继续下去，随着 a 的增大，以 2^k 为周期的所有周期轨道出现，它们先是汇，然后随参数变大而变成排斥的. 在 10.1.1 节将讨论在添加其他周期轨道之前需要添加所有以 2 的幂为周期的轨道这一事实. 在 9.4 节我们借助施瓦茨导数证明了逻辑斯谛映射族的任何周期汇的吸引域必包含临界点 0.5 这一事实，因此对同一个参数 a，g_a 只能有一条吸引的周期轨道，本节仅把上面的事实当作可观察出来的现象. 令 a_k 表示吸引的周期轨的周期由 2^{k-1} 变为 2^k 时对应的参数值，表 9.5.1 列出了前面几个 a_k 的值，我们称分支值序列 $\{a_k\}$ 为是倍周期突变(period doubling cascade). 对于逻辑斯谛映射族，在 a 到达

$$a_\infty \approx 3.569\,946$$

之前会历经所有以 2^k 为周期的吸引周期点. 图 9.5.6 给出了 $a=3.572$ 时的图示迭代，对此参数，由于阶梯图中有很多不同的垂线，所以这条轨道不收敛于吸引的周期轨道(就像图 9.5.5 一样，省掉了前 200 步迭代).

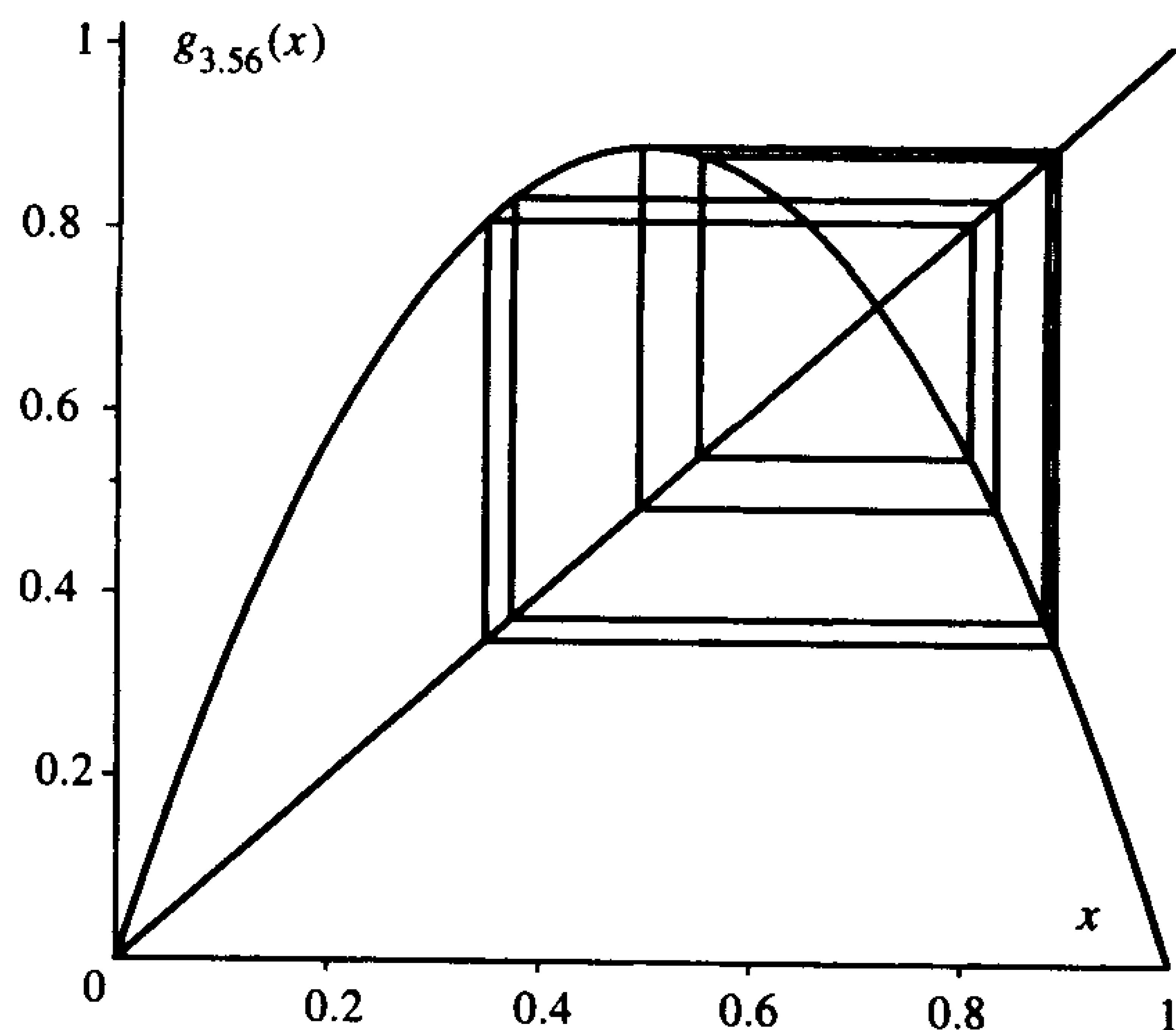


图 9.5.5　当 $a=3.56$ 时 $x_0=0.5$ 的从第 201 步到第 456 步的图示迭代

表 9.5.1　逻辑斯谛族映射的倍周期参数

2^k	a_k	F_k
2	3.000 000	
4	3.449 490…	4.751 4…
8	3.544 090…	4.656 2…
16	3.564 407…	4.668 3…
32	3.568 759…	4.668 6…
64	3.569 692…	4.669 2…
128	3.569 891…	4.669 4…
256	3.569 934…	
∞	3.569 946…	4.669 2…

作出吸引的周期点的图像是可能的，我们 9.4 节借助施瓦茨导数证明了逻辑斯谛映射族的任何周期汇的吸引域必包含临界点 0.5，于是可以选择从 0.5 开始，迭代若干次(例如 1000 次)，但不把这些点画出来，然后在包含(a, x)坐标的图中画出此后的 200 次迭代. 取定一个

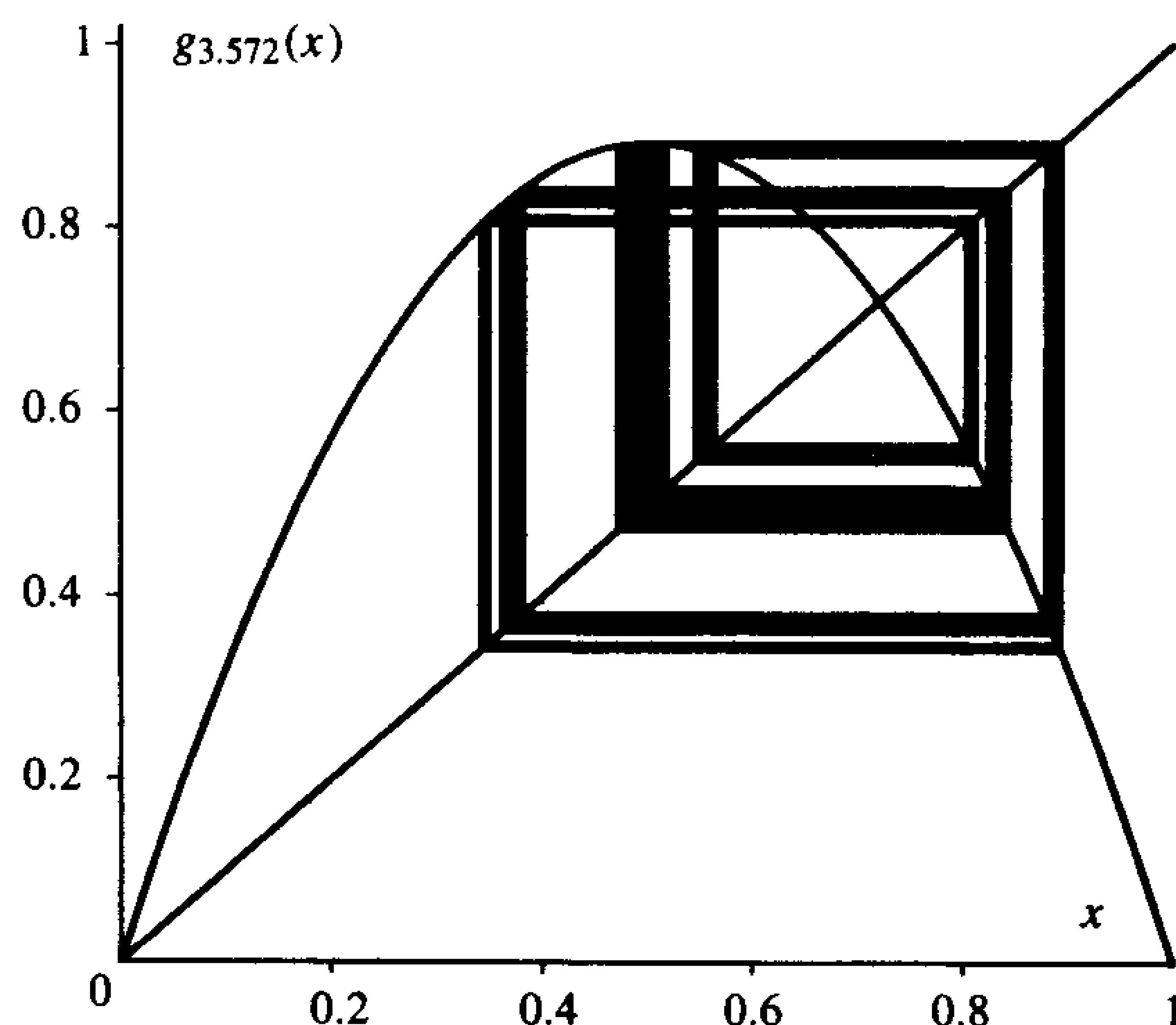


图 9.5.6 当 $a=3.572$ 时 $x_0=0.5$ 的从第 201 步到第 456 步的图示迭代

a 实施上述步骤，然后再让 a 增大 0.01 重复上述过程. 考虑到周期轨道的变化不大，若上一个参数的最后迭代值为 x，对下一个参数我们取 x 为迭代的初始值将更有效.

图 9.5.7 给出了 a 介于 1 和 4 之间的分支图：对于那些存在吸引的周期点的参数值 a，它的上方只有有限个 x 的取值；对那些不存在吸引的周期点的参数值(例如 $a=3.58$)，迭代轨道充满一个包含区间的集合(这说明“吸引子”是一个更复杂的集合)，因此这些图像是“吸引子”的分支图而不是周期点的分支图. 图 9.5.8 仅给出了 a 介于 2.9 和 3.6 这一能发生倍周期点分支的区间上的分支图；图 9.5.9 放大了 a 属于[3.54, 3.57]时的分支图，在这幅图中 x 被限制在 0.47 到 0.57 之间，因此它没有展示 x 介于 0.8 到 0.9 之间的另一半轨道.

337 ~ 338

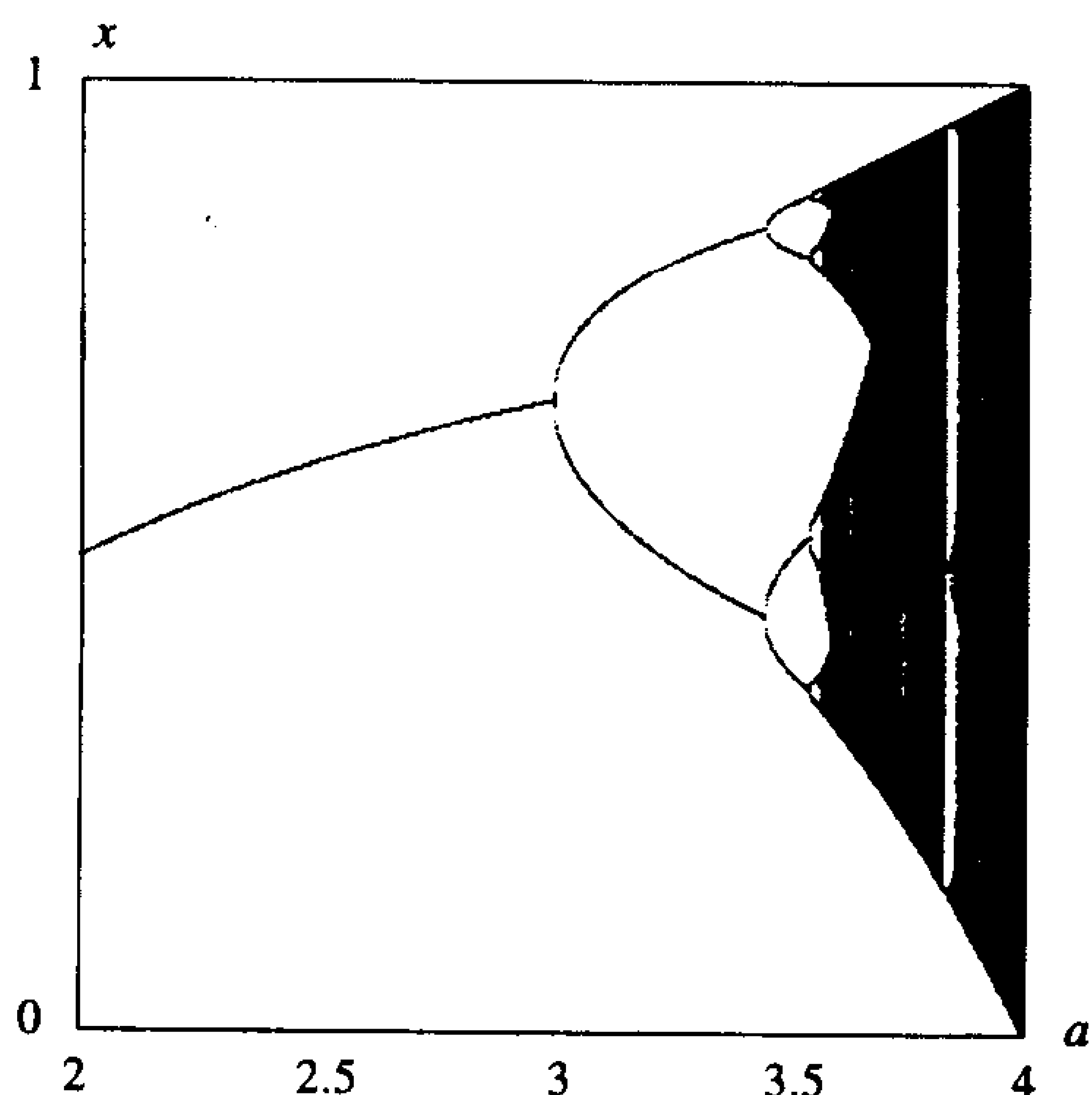


图 9.5.7 映射族 g_a 的分支图：水平方向表示 a 介于 2 和 4 之间；竖直方向表示空间变量 x 介于 0 和 1 之间

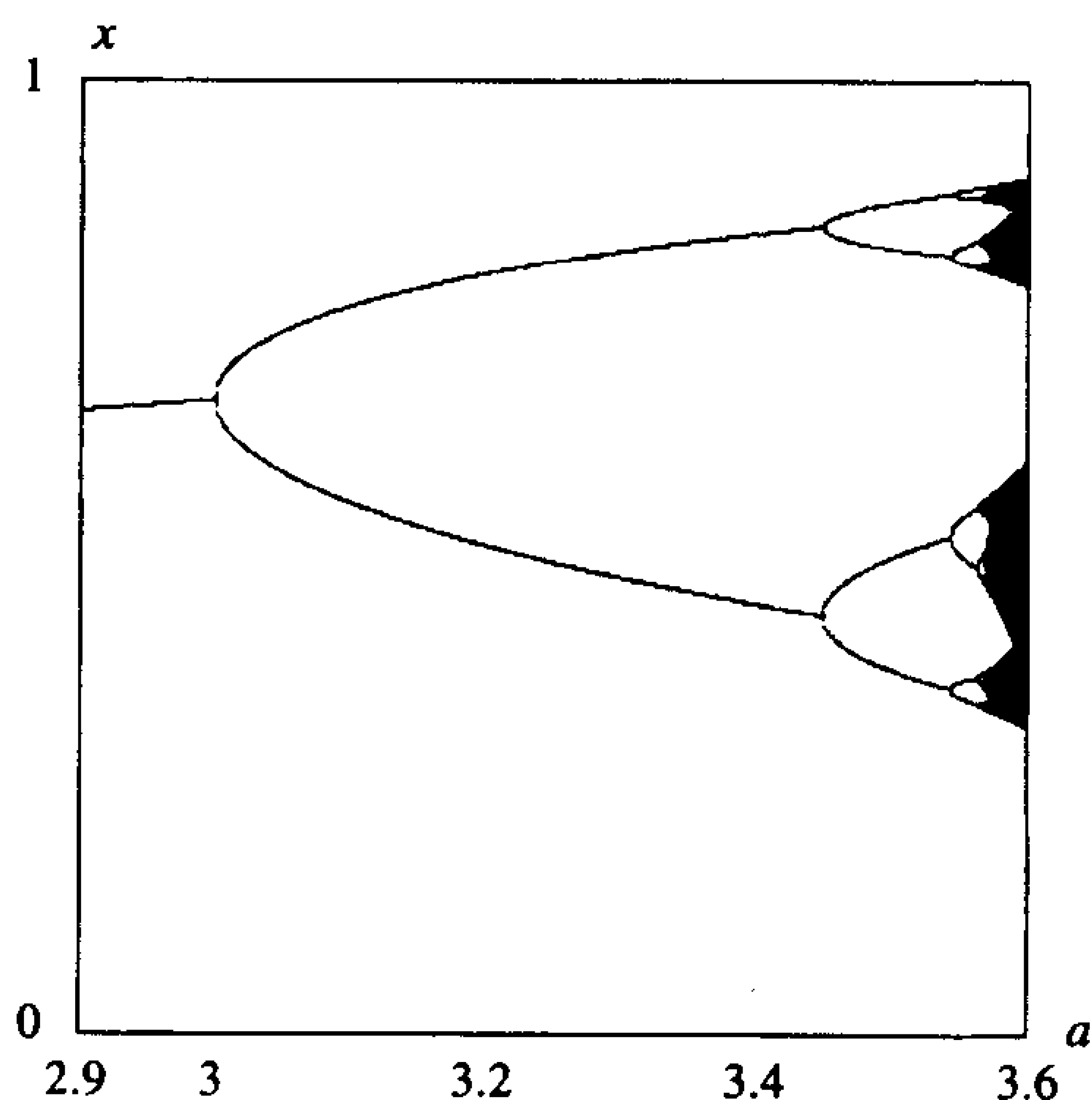


图 9.5.8 映射族 g_a 的分支图：水平方向表示 a 介于 2.9 和 3.6 之间；竖直方向表示空间变量 x 介于 0 和 1 之间

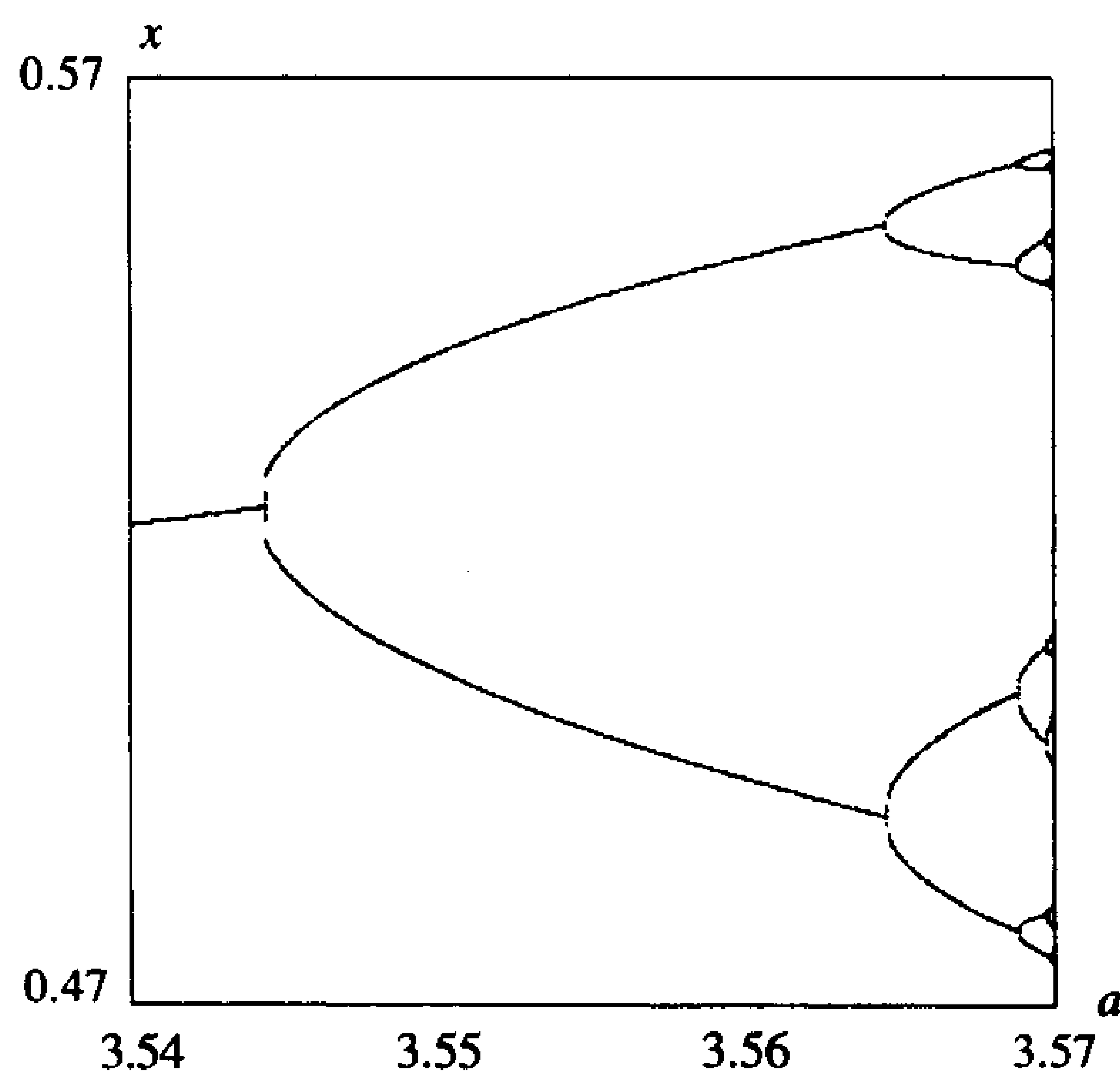


图 9.5.9　映射族 g_a 的分支图：水平方向表示 a 介于 3.54 和 3.57 之间；竖直方向表示空间变量 x 介于 0.47 和 0.57 之间

法伊根鲍姆(M. Feigenbaum)从数值模拟的角度观察出不同映射族出现分支的速率是相同，并解释了原因，详见[**37**]. P. Coullet 和 C. Tresser 也独立发现了很多类似的结论，见[**29**].

为了说明如何计算分支率，设

$$a_k \sim a_\infty - C F^{-k}.$$

则

$$a_k - a_{k-1} \sim -C F^{-k} + C F^{-(k-1)} = C(F-1)F^{-k}.$$

定义 F_k 为 $a_k - a_{k-1}$ 与 $a_{k+1} - a_k$ 的比值，则 F_k 的极限就是 F：

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} \\ &\sim \frac{C(F-1)F^{-k}}{C(F-1)F^{-k-1}} \\ &= F. \end{aligned}$$

事实上，也可以直接定义 F 为序列 F_k 的极限：

$$F = \lim_{k\to\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k}.$$

由表 9.5.1，法伊根鲍姆发现此极限为

$$4.669\,201\,609\cdots,$$

它不仅适用于逻辑斯谛映射族，还适用于法伊根鲍姆找到的其他函数族，例如 $f_r(x) = r\sin x$，因此，这个数是一个*通有常数*(universal constant)，常称为*法伊根鲍姆常数*.

很多人努力证明 Feigenbaum 的发现是正确的，即对满足一定条件的函数族来说这个数一定相同，O. E. Lanford[**59**]首次证明了具有负施瓦茨导数的任何单参数单峰映射族(只有一个临界点)的法伊根鲍姆常数相同.

339 ~ 340

当 a 介于 3.828 和 3.858 之间时，分支图缩为三个点(即在此参数范围内，有一条吸引的 3-周期轨道)，图 9.5.10 详细地给出了此参数范围的分支图. $a=3.828$ 附近的 3-周期轨道是经由一个鞍结点分支而出现的，这一点也能通过观察 g_a^3 关于 a 变化的图像得到，图 9.5.11 通过 g_a^3 图像展示了这条周期轨道是怎样出现的，当 $a=3.828$ 时 g_a^3 图像与对角线仅在不动点处相交；当 $a=3.83$ 时会出现六个新交点，其中三个对应于新出现的 3-周期汇，三个对应新出现的 3-周期源；当 a 增大到 3.845 时，3-周期汇变为一条排斥的周期轨，当 3-周期轨道变为排斥时，会发生倍周期分支，从而出现一个新的 6-周期汇. 因此，图 9.5.10 展示一族新的倍周期突变，这些汇的周期具有形式 3×2^k. 图 9.5.12 中 $g_{3.86}$ 的图示迭代展示了一条轨道是如何以一种复杂的方式盘绕的，因此没有吸引的周期轨道.

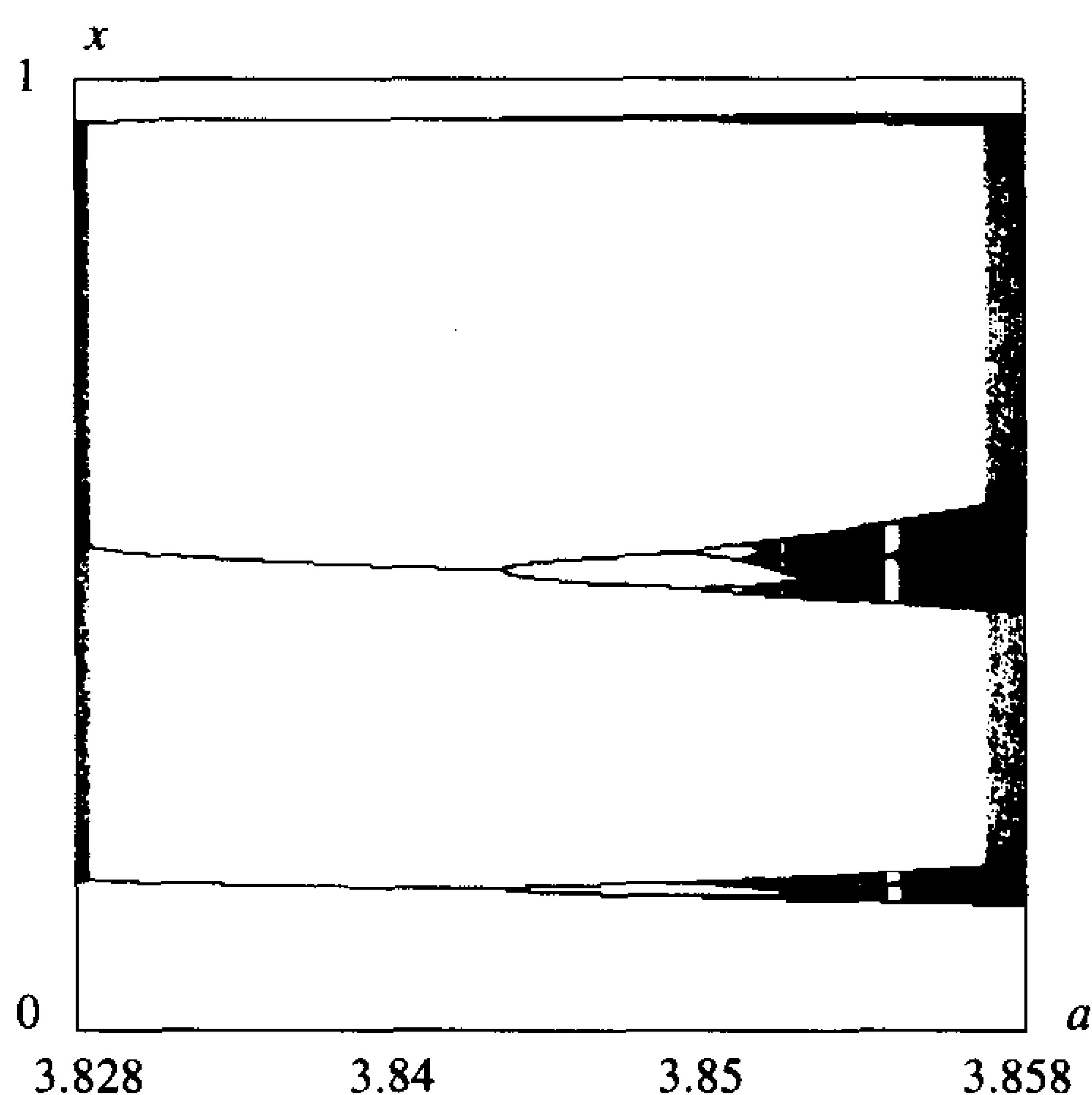


图 9.5.10　映射族 g_a 的分支图：水平方向表示 a 介于 3.828 和 3.858 之间；竖直方向表示空间变量 x 介于 0 和 1 之间

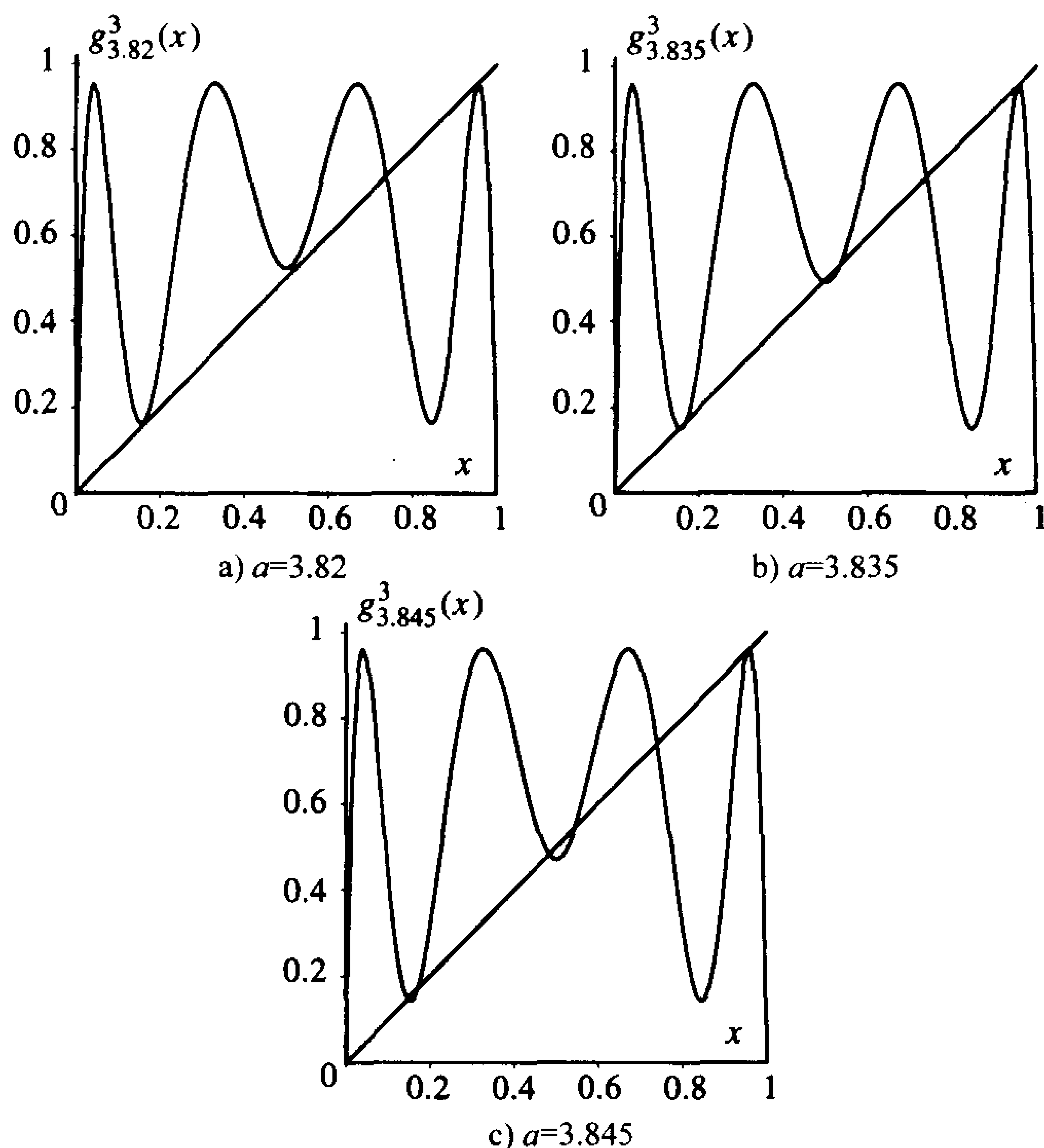


图 9.5.11　g_a^3 的图像

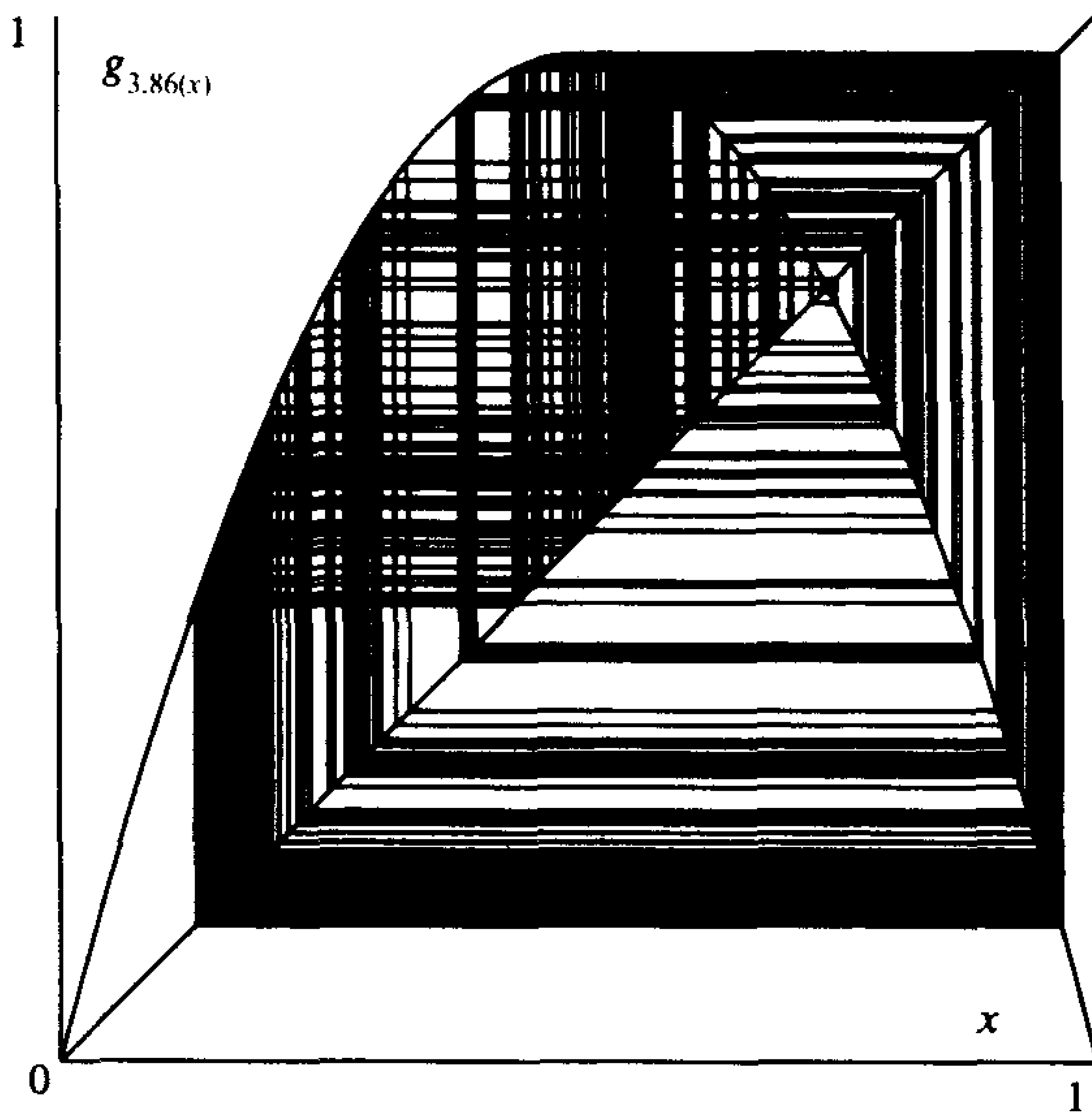


图 9.5.12　g_a 在 $a=3.86$ 时的图示迭代

分支图中还包含其他周期的相似的窗块，但由于出现这种分支的参数范围较小，所以不容易看出来. 当出现一个通过鞍-结点分支的周期为 p 的周期汇后，接着就发生以 $p\times 2^k$ 为周期的汇的倍周期突变. 最大窗块开始于周期 3，5，6.

计算机练习

C. Ross 和 J. Sorensen[**89**]认为可下指令画出给定范围内所有周期点的分支图而难画出吸引子的分支图. 对于给定迭代步数和参数范围，比方说 $1\leqslant n\leqslant 100$ 和 $2.99\leqslant a\leqslant 3.56$，可以借助计算机程序例如 Maple 和 Mathematica 来画图. 利用计算机可以画出 $1\leqslant n\leqslant 10$ 时 g_a^n 对应于 $2.5\leqslant a\leqslant 3.56$ 的图像，并能找出图像在何处穿过对角线. 如果在 g_a^n 的图像穿过对角线的点处，g_a^n 的导数的绝对值小于 1，则说明此点是一个吸引的周期点，那就在分支图上用“x”标注出这个点；若在 g_a^n 的图像穿过对角线的点处，g_a^n 的导数的绝对值大于 1，则说明此点是一个排斥的周期点，就用“o”或小圆圈标注出这个点；此外，在分支图上标出不同点的周期. 显然，我们不可能检验所有的参数值，但有必要每次让 a 有一个小增量. 用实的曲线把同周期的且相近的 x 连起来，用虚的曲线把相近的 o 连起来，所得图像类似于图 9.5.2 和图 9.5.4，但上面有更多的曲线. 可以分组完成这项工作，让不同的小组验证不同的参数范围.

9.6　共轭

在 9.4 节我们讨论了具有负施瓦茨导数的周期汇的吸引域的性质，本节的最后一个定理表明两个不同的映射在经过不动点吸引域上的连续坐标变换后是等价的，这是一个一般性的结论，这里仅考虑特殊情况，在本节中，拓扑共轭的定义准确地阐述了连续坐标变换的思想.

在 9.1 节通过观察帐篷映射 T 和逻辑斯谛映射 $G(x)=4x(1-x)$ 图像发现这两个映射的各类周期点的数目是相同的，本节将证明其原因是存在一个连续“坐标变换”或一个共轭把其中

341~342

一个函数变为另一个，在第10章将利用这种共轭性证明对帐篷映射来说很容易验证的其他动力学性质，逻辑斯谛映射也具有.

共轭的概念出现在很多数学分支中，在线性代数中出现的是线性共轭，若 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0$ 是一个线性映射，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 是一个线性坐标变换，它有逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$，这便导出一个新的线性映射

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}_0,$$

它的矩阵是 $\boldsymbol{CAC}^{-1}$，我们称矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{CAC}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

在研究动力系统时，有时可以找到一个线性或可微的坐标变换，但更多情况下至多能找到一个连续的坐标变换，因此下面的定义既考虑连续坐标变换也同时考虑了可微或线性的坐标变换. 通常一个映射都是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上或 $\mathbb{R}$ 的一个区间上，但在第10章中我们会遇到定义在"符号空间"而不是欧氏空间上的映射，因此我们给出一般空间上函数共轭的定义.

定义 9.6.1　设 X 和 Y 是两个度量空间，h 是从 X 到 Y 的映射，若对任意的 $y_0\in Y$ 都存在 $x_0\in X$ 使得 $h(x_0)=y_0$，则称 h 是从 X 到 Y 上的满(onto)映射.

若当 $x_1\neq x_2$ 时必有 $h(x_1)\neq h(x_2)$，则称 h 是从 X 到 Y 的一对一(one-to-one)映射.

若 h 是一个从 X 到 Y 上满的一对一映射，则存在从 Y 到 X 的逆映射 h^{-1} 使得 $h^{-1}(y)=x$ 当且仅当 $h(x)=y$.

343

若从 X 到 Y 的映射 h 满足：(i) h 是连续映射，(ii) h 是到 Y 上的满映射，(iii) h 是一对一映射，以及(iv) h^{-1} 是从 Y 到 X 的连续映射，则称 h 是从 X 到 Y 的同胚，此时我们认为 h 是一个连续的坐标变换.

定义 9.6.2　设 f 和 g 分别是从 X 到 X 和从 Y 到 Y 的映射，h 是从 X 到 Y 的映射，若满足：(i) h 是从 X 到 Y 的同胚，以及(ii) $h\circ f(x)=g\circ h(x)$，则称 h 是从 f 到 g 的拓扑共轭(topological conjugacy)，此时也称 f 和 g 是拓扑共轭的或共轭的. 如果 h 仅是从 X 到 Y 上满的连续映射(可能不是一对一的)且满足 $h\circ f(x)=g\circ h(x)$，则称 h 是半共轭的(semiconjugacy).

如果共轭映射 h 及其逆映射 h^{-1} 都是 $C^r(r\geqslant 1)$ 可微的，则称 f 和 g 是 C^r 共轭或 C^r 可微共轭的. 如果 h 是仿射的，$h(x)=ax+b$，则称 f 和 g 是仿射共轭的. 如果 h 是线性的，$h(x)=ax$，则称 f 和 g 是线性共轭的.

下面给出一些可显式表示的共轭映射的例子，有些是线性的，有些是仿射的，有些仅是连续的，定理9.6.5表明帐篷映射和逻辑斯谛映射是拓扑共轭的，而不是可微共轭的.

首先介绍共轭方程 $h\circ f(x)=g\circ h(x)$ 的一些简单结论. 由 $g(y)=h\circ f\circ h^{-1}(y)$ 可知

$$\begin{aligned} g^2(y) &= h\circ f\circ h^{-1}\circ h\circ f\circ h^{-1}(y) \\ &= h\circ f\circ f\circ h^{-1}(y) \\ &= h\circ f^2\circ h^{-1}(y), \end{aligned}$$

这表明 h 也是从 f^2 到 g^2 的拓扑共轭，继续下去，则有

$$\begin{aligned} g^n(y) &= g^{n-1}\circ g(y) \\ &= h\circ f^{n-1}\circ h^{-1}\circ h\circ f\circ h^{-1}(y) \\ &= h\circ f^{n-1}\circ f\circ h^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$= h \circ f^n \circ h^{-1}(y),$$

即 h 也是从 f^n 到 g^n 的拓扑共轭，因此，两个映射的共轭也是它们迭代映射的共轭.

我们看一下此结论对轨道上的点 $x_n = f^n(x_0)$ 有何意义，令 $y_0 = h(x_0)$，则 $x_0 = h^{-1}(y_0)$，于是

$$y_n = g^n(y_0) = h \circ f^n \circ h^{-1}(y_0)$$
$$= h \circ f^n(x_0) = h(x_n),$$

可见共轭映射把 x_0 经 f 的 n 次迭代映射成 y_0 经 g 的 n 次迭代.

例 9.6.3　考虑两映射族

$$g_a(y) = ay(1-y) \qquad 与$$
$$f_b(x) = 1 - bx^2.$$

这两个函数都是二次的，这意味着合理地选择参数 a 和 b 后这两个函数是共轭的，首先考虑形如 $y = h_{m,B}(x) = mx + B$ 的仿射共轭.

344

注意到 g_a 在其临界点 0.5 附近两点 $0.5 \pm \delta$ 处取相同的值，f_b 在其临界点 0 附近两点 $\pm\delta$ 处也取相同的值，因此 $h_{m,B}$ 应把 0 映射成 0.5，从而 $B = 0.5$，现在记 $h_m(x) = h_{m,0.5}(x)$.

下面计算 $g_a \circ h_m(x)$ 和 $h_m \circ f_b(x)$ 以确定 m 取何值以及 a，b 满足何种关系时 $h_m(x)$ 是共轭映射：

$$\begin{aligned} g_a \circ h_m(x) &= g_a(mx + 0.5) \\ &= a(mx + 0.5)(0.5 - mx) \\ &= 0.25a - m^2ax^2; \\ h_m \circ f_b(x) &= h_m(1 - bx^2) \\ &= m(1 - bx^2) + 0.5 \\ &= m + 0.5 - mbx^2. \end{aligned}$$

因为在 $g_a \circ h_m(x)$ 和 $h_m \circ f_b(x)$ 的表达式中常数项与 x^2 项的系数应相等，所以

$$0.25a = m + 0.5 \qquad 与$$
$$m^2a = mb.$$

由第二个等式可得 $m = b/a$，把它代入第一个等式，则有

$$0.25a = b/a + 0.5 \qquad 或$$
$$b = 0.25a^2 - 0.5a.$$

注意到 g_a 以 0 为不动点且 $g_a(1) = 0$，f_b 以 $-(1+\sqrt{1+4b})/2b$ 为不动点且 $f_b((1+\sqrt{1+4b})/2b) = -(1+\sqrt{1+4b})/2b$，共轭映射不仅使不动点相匹配，而且使 $(1+\sqrt{1+4b})/2b$ 与 1 相匹配.

尽管不必利用仿射共轭的逆映射，由 $y = h_{m,B}(x) = mx + B$ 得

$$mx = y - B$$
$$x = h^{-1}(y) = \frac{y - B}{m}.$$

这样就解出了逆映射，因为此方程式可解，所以 h 是一对一映射，其逆由上式给出. ■

我们把上面的例子归纳为下面的命题.

命题 9.6.4　考虑两族映射

$$g_a(y) = ay(1-y) \quad \text{和}$$

$$f_b(x) = 1 - bx^2.$$

则两族映射在映射 $h(x) = mx + 0.5$ 之下是仿射共轭的，其中

$$b = 0.25a^2 - 0.5a \quad \text{和}$$

$$m = b/a = 0.25a - 0.5.$$

特别地，$G(y) = g_4(y) = 4y(1-y)$ 经变换 $y = 0.5x + 0.5$ 与 $f_2(x) = 1 - 2x^2$ 拓扑共轭.

345

下面的定理表明帐篷映射和逻辑斯谛映射是共轭的.

定理 9.6.5　在区间 $[0, 1]$ 上，逻辑斯谛映射 $G(u) = 4u(1-u)$ 和帐篷映射 $T(s)$ 在映射 $u = h(s) = \sin^2(\pi s/2)$ 之下是拓扑共轭的.

证明　此处我们直接验证 $h(s)$ 是 G 和 T 之间的共轭，到 9.8 节再详细推导 $h(s)$ 的表达式. 先计算 $G \circ h(s)$：

$$\begin{aligned} G \circ h(s) &= 4h(s)[1 - h(s)] \\ &= 4\sin^2(\pi s/2)\cos^2(\pi s/2) \\ &= [2\sin(\pi s/2)\cos(\pi s/2)]^2 \\ &= \sin^2(\pi s). \end{aligned}$$

再计算 $h \circ T(s)$，当 $0 \leqslant s \leqslant 0.5$ 时，

$$h \circ T(s) = h(2s) = \sin^2(\pi s),$$

当 $0.5 \leqslant s \leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned} h \circ T(s) &= (2 - 2s) = \sin^2(\pi - \pi s) \\ &= [-\sin(\pi s)]^2 = \sin^2(\pi s). \end{aligned}$$

由 $G \circ h(s)$ 与 $h \circ T(s)$ 相等可得，$u = h(s)$ 是从 T 到 G 的共轭. ■

共轭 $u = h(s) = \sin^2(\pi s/2)$ 是可微的，而它的逆却是不可微的，事实上

$$h'(0) = h'(1) = 0.$$

因此 h 逆的导数在 0 和 1 处等于无穷. 有意思的是 h 及其逆在 G 的不动点 0.5 处是可微的，而 T 在此点不可微.

下面讨论定义在不动点吸引域上的共轭映射.

定理 9.6.6　令 $f(x) = ax$，$g(y) = by$，$0 < a, b < 1$，则它们在映射 $y = h(x) = \text{sign}(x)\,|x|^\alpha$ 下是共轭的，其中 $b = a^\alpha$ 或 $\alpha = \ln(b)/\ln(a)$，当 $x > 0$ 时 $\text{sign}(x) = 1$，当 $x < 0$ 时 $\text{sign}(x) = -1$.

当 $a \neq b$ 时，或者(i) $h(x) = x^\alpha$ 在 0 处不可微，或者(ii) $h'(0) = 0$ 而导致 $h^{-1}(y)$ 在 0 处不可微.

证明　考虑形如 $y = h(x) = x^\alpha$ 的共轭，则

$$h \circ f(x) = h(ax) = a^\alpha x^\alpha \quad \text{和}$$
$$g \circ h(x) = g(x^\alpha) = bx^\alpha.$$

要保证 $G \circ h(s)$ 与 $h \circ T(s)$ 相等，只需

$$b = a^\alpha \quad \text{或}$$
$$\alpha = \frac{\ln(b)}{\ln(a)},$$

即为所证.

因为 $a \neq b$ 时 $\alpha \neq 1$，所以或者 $h(x) = x^\alpha$ 在 0 处不可微，或者 $h^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$ 在 0 处不可微. ■ [346]

命题 9.6.7 (a) 设 $f(x)$ 和 $g(y)$ 在映射 $y = h(x)$ 下是共轭的，则 h 把 f 的周期轨道映射成 g 的周期轨道，且周期相同.

(b) 若进一步假设 p_0 是 f 的 n-周期点，$q_0 = h(p_0)$，$h(x)$ 在 p_0 处可微且其导数 $h'(p_0)$ 不等于零或无穷（因此 h^{-1} 在 q_0 处可微且其导数 $(h^{-1})'(q_0) \neq 0$），则 $|(f^n)'(p_0)| = |(g^n)'(q_0)|$，从而两条周期轨道之一是吸引的当且仅当另一周期轨道是吸引的，其中之一是排斥的当且仅当另一条是排斥的.

证明 (a) 由 $g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y)$ 可知 $g^n(y) = h \circ f^n \circ h^{-1}(y)$，因此若 $f^n(p_0) = p_0$，$q_0 = h(p_0)$，则

$$\begin{aligned} g^n(q_0) &= h \circ f^n \circ h^{-1}(q_0) \\ &= h \circ f^n(p_0) \\ &= h(p_0) \\ &= q_0, \end{aligned}$$

即 q_0 是 g^n 的不动点，又若 q_0 是 g 的周期低于 n 的周期点，则可推出 p_0 是 f 的周期低于 n 的周期点，所以 n 是 q_0 的最小周期.

(b) 对等式 $h \circ f^n(x) = g^n \circ h(x)$ 两端求在 p_0 处的导数，则有

$$h'(p_0) \cdot (f^n)'(p_0) = (g^n)'(q_0) \cdot h'(p_0),$$

因此当 $h'(p_0)$ 不等于零或无穷时必有

$$(f^n)'(p_0) = (g^n)'(q_0),$$

从而 $|(f^n)'(p_0)| = |(g^n)'(q_0)|$，分属 f，g 的两条周期轨道的吸引性相同. ■

下面定理中的两个映射在其不动点的吸引域上是拓扑共轭的.

定理 9.6.8 令 $f(x) = \frac{x + x^3}{2}$，$g(y) = ay + by^3$，其中 $0 < a < 1$，$b > 0$，此时 g 有不动点 $y = 0$ 和 $\pm\sqrt{(1-a)/b}$，则 f 在区间 $[-1, 1]$ 与 g 在区间 $[-\sqrt{(1-a)/b}, \sqrt{(1-a)/b}]$ 上是拓扑共轭的，其共轭映射可以延拓到整个实数轴上.

该定理的证明在 9.8 节给出.

9.7　应用

9.7.1　资本积累

第 8 章利用科布–道格拉斯产量函数得到了资本和劳动力之比 $k=K/L$ 的资本函数，即方程 8.1.1：

$$k_{n+1}=f(k_n)=\frac{\sigma A k_n^{\alpha}}{1+\lambda}.$$

其中各参数满足：$0<\alpha<1$，$0<\sigma<1$，$A>0$ 以及 $\lambda>0$，此函数的不动点为 $k=0$ 和

$$k^*=\left(\frac{\sigma A}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}>0.$$

资本函数的导数为

347

$$f'(k)=\frac{\alpha\sigma A k^{\alpha-1}}{1+\lambda}.$$

由 $f'(k)>0$ 可知该函数是单调递增的，由 $f'(k^*)=\alpha<1$ 可知不动点 k^* 是吸引的. 又因为

$$f(k)>k \qquad 0<k<k^*$$

$$f(k)<k \qquad k^*<k.$$

所以对任意初始值 $k_0>0$，序列 $f^n(k_0)$ 收敛于不动点 k^*，这说明 k^* 的吸引域是所有正数，即

$$\mathcal{B}(k^*,f)=\{k:k>0\}.$$

9.7.2　单种群模型

如果线性增长的种群模型中的增长常数大于 1，则此种群是无限增长的. 而事实上随着种群的增加其增长率会降低，逻辑斯谛模型把这一点考虑进去了，但此模型面临如下难题：当种群变的足够大时，其下一步迭代变为负值(即此种群灭绝了). 目前还有其他一些形如 $F(x)=xf(x)$ 的模型，它们都考虑了大的初始种群数量不会导致其变为负数的事实. 此处仅简单地介绍一些模型，详情可参阅 Brauer 和 Castillo-Chávez 的著作[**20**].（有些材料取自 Thunberg 的文章[**108**]，此文技术性更高.）

Verhulst 模型

1945 年 Verhulst 给出了模型

$$F(x)=\frac{rx}{A+x},$$

其中 r 和 A 都是正数，它具有以下几条性质：当 x 趋于无穷时 $F(x)/x=f(x)=r/(A+x)$ 趋向于零；当 $x>0$ 时 $F(x)>0$；当 x 趋于无穷时 $F(x)$ 趋向于 $r>0$. 读者可以验证它的施瓦茨导数恒为零，因此本章得到的关于吸引域的理论不适用于此函数，我们也不再继续讨论它的其他性质.

Ricker 模型

1954 年 Ricker 在[**86**]中给出了另一个种群增长模型，此模型中种群不会为负，即

$$R(x) = axe^{-bx},$$

其中 a 和 b 都是正数，它具有以下几条性质：当 $x>0$ 时 $R_{a,b}(x)>0$；当 x 趋于无穷时 $R_{a,b}(x)$ 和$R_{a,b}(x)/x$趋向于零；我们最感兴趣的参数范围是 $a>1$，我们留给读者去验证 Richer 映射的施瓦茨导数小于零，并找出其不动点.

Hassel 模型

此外，1974 年 Hassel 在[**50**]中给出了模型

$$H_{r,b}(x) = r\,x(1+x)^{-b},$$

其中 $r>0$，$b>1$，显然当 $x>0$ 时 $H_{r,b}(x)>0$，因此对初始值 $x_0>0$ 的迭代不会变为负数，Hassel 函数的导数为

$$\begin{aligned} H'_{r,b}(x) &= \frac{r}{(1+x)^{b}} - \frac{brx}{(1+x)^{b+1}} \\ &= \frac{r(1+x-bx)}{(1+x)^{b+1}}. \end{aligned}$$

348

下面几个引理给出了 Hassel 函数的基本性质.

定理 9.7.1　设 $r>0$，$b>1$，则有

(a) 当 x 趋于无穷时 $H_{r,b}(x)$和$H_{r,b}(x)/x$趋向于零；

(b) $H_{r,b}(x)$存在唯一临界点 $x_c=(b-1)^{-1}>0$，其中 $H'_{r,b}(x_c)=0$，而且

$$H'_{r,b}(x) > 0,\quad 0 < x < x_c;$$

$$H'_{r,b}(x) < 0,\quad x_c < x.$$

证明　(a) 当 x 趋于无穷时 $H_{r,b}(x)$趋向于零，这是因为分母上 x 的指数 b 大于分子上 x 的指数 1；显然当 x 趋于无穷时$H_{r,b}(x)/x=r(1+x)^{-b}$趋向于零.

(b) $H_{r,b}(x)$的临界点满足

$$H'_{r,b}(x_c) = \frac{r(1+x_c-bx_c)}{(1+x_c)^{b+1}} = 0,$$

因此 $1=(b-1)x_c$ 或 $x_c=(b-1)^{-1}$. $H'_{r,b}(x)$的符号可直接由其表达式推出. ■

由 $H_{r,b}(0)=0$ 及 $H'_{r,b}(0)=r$ 可知，不动点 0 当 $0<r<1$ 时是吸引的，当 $r>1$ 时是排斥的.

命题 9.7.2　对于 $0<r\leqslant 1$，$x=0$ 是全局吸引不动点.

证明　对于 $0<r\leqslant 1$，当 $x>0$ 时 $H_{r,b}(x)\leqslant x(1+x)^{-b}<x$，因此，由图示迭代法可知 0 的吸引域包含全体正数集$(0,\infty)$. ■

下面讨论 $r>1$ 时的情形.

引理 9.7.3　设 $r>1$，则 $x^*=r^{1/b}-1$ 是唯一大于零的不动点.

证明　非零不动点 x^* 必满足 $x^*=rx^*(1+x^*)^{-b}$，$(1+x^*)^b=r$ 或 $x^*=r^{1/b}-1$，显然它是唯一的. ■

引理 9.7.4　设 $r>1$，若选取 $b>1$ 满足 $-1<H'_{r,b}(x^*)<1$，则 x^* 的吸引域是全体正数集，特别地，这对 $1<b<2$ 成立.

证明　分两种情况来证：(a) $0\leqslant H'_{r,b}(x^*)<1$ 和 (b) $-1<H'_{r,b}(x^*)<0$.

(a)对第一种情况，由$0\leqslant H'_{r,b}(x^*)<1$可得$0<x^*\leqslant x_c$，其中$x_c=(b-1)^{-1}$是唯一临界点，又因为$H'_{r,b}(0)=r>1$，所以

$$0<x<H_{r,b}(x)<H_{r,b}(x^*)=x^* \qquad 0<x<x^*$$

$$x^*=H_{r,b}(x^*)<H_{r,b}(x)<x \qquad x^*<x\leqslant x_c.$$

由定理9.2.4，x^*的吸引域包含区间$(0,x_c]$. 因为当$x>x_c$时$H_{r,b}(x)$单调递减，所以对点$x>x_c$的迭代$H_{r,b}(x)<H_{r,b}(x_c)\leqslant x_c$，它落在$x^*$的吸引域中.

(b)当$-1<H'_{r,b}(x^*)<0$时，则$x^*>x_c$，考察临界点的像可以推出

$$x_c<H^2_{r,b}(x_c)<x^*<H_{r,b}(x_c),$$

349 作类似于对$2<a<3$时逻辑斯谛映射族的分析可知任意$x_0>0$都落在x^*的吸引域中.

(c)现在考虑$1<b<2$的情形，在不动点x^*处

$$H'_{r,b}(x^*)=\frac{r}{(1+x^*)^b}-\frac{brx^*}{(1+x^*)^{b+1}}$$
$$=1-\frac{bx^*}{1+x^*}=1-b(1-r^{-1/b}).$$

当$1<b<2$时，

$$1>1-b(1-r^{-1/b})>1-2=-1,$$

所以不动点是吸引的. ■

由上面的讨论可知当$0<r<1$或$1<b<2$时，不动点是唯一的周期点；当$b\geqslant 2$时情况如何呢？数值迭代显式：$b=5$且$r=20$有一个2-周期汇，$b=5$且$r=40$有一个4-周期汇，因此存在周期更高的周期轨，由于只有一个临界点，结合下面引理可知对任意参数$b\geqslant 2$至多有一个周期汇，显然此结论对$b>1$都成立.

引理 9.7.5　对$b\geqslant 2$，Hassel 映射族都具有负施瓦茨导数.

证明　由

$$H'_{r,b}(x)=r(1+x)^{-b}-brx(1+x)^{-b-1}$$
$$=r(1+x)^{-b-1}(1+x-bx)$$
$$H''_{r,b}(x)=-2br(1+x)^{-b-1}+b(b+1)rx(1+x)^{-b-2}$$
$$=r(1+x)^{-b-2}(-2b-2bx+b^2x+bx)$$
$$=r(1+x)^{-b-2}(-2b+b^2x-bx)$$
$$H'''_{r,b}(x)=3b(b+1)r(1+x)^{-b-2}-b(b+1)(b+2)rx(1+x)^{-b-3}$$
$$=r(1+x)^{-b-3}[3b(b+1)(1+x)-b(b+1)(b+2)x]$$
$$=r(1+x)^{-b-3}[3b(b+1)+b(b+1)(-b+1)x],$$

可知

$$S_{H_{r,b}}(x)=\frac{2(3b(b+1)(1+x)-b(b+1)(b+2)x)(1+x-bx)}{2(1+x)^2(1+x-bx)^2}$$
$$\frac{-3(-2b-2bx+b^2x+bx)^2}{2(1+x)^2(1+x-bx)^2}$$

$$= -\left[\frac{b(b-1)}{2(1+x)^2(1+x-bx)^2}\right][(b-1)(b-2)x^2-4(b-2)x+6].$$

第一个因子只要有意义则必为正数，第二个因子当 $b\geqslant 2$ 时(此时没有实根)也是正数，结合前面负号可知施瓦茨导数为负. ■

9.7.3 血细胞种群模型

A. Lasota 在文献[**62**]中利用下面的函数给出了血液中红细胞种群的离散模型

$$f(x) = (1-a)x + bx^r e^{-sx}.$$

350

其中项 ax 对应于某时间段死去的细胞数量，项 $bx^r e^{-sx}$ 对应于某时间段新产生的细胞数量，根据试验数据，各参数的取值为

$$r=8,\quad s=16,\quad b=1.1\times 10^6,$$

只有 $0<a\leqslant 1$ 是一个可变参数，因此函数依赖于参数 a，记作 $f_a(x)$.

由 $f_a(0)=0$ 及 $|f_a'(0)|=1-a<1$ 可知，对所有参数 $p_0=0$ 都是吸引不动点.

当 $0<a\leqslant 1$ 时，f_a 有三个不动点：$p_0=0<p_1<p_2$，参见图 9.7.1. 因为原点是吸引的，所以随着 x 的增大 f_a 的图像在 $x=p_1$ 处自下而上穿过对角线，从而对任意参数 a，p_1 都是排斥的. 对任意初始值 $0<x_0<p_1$，当 n 趋向无穷时，$f_a^n(x_0)$ 趋向于零，即这类血细胞最终死光，因此 p_1 是血细胞数量的极限，如果血细胞的初始值太低，则在无外界干预情况下不可能恢复正常.

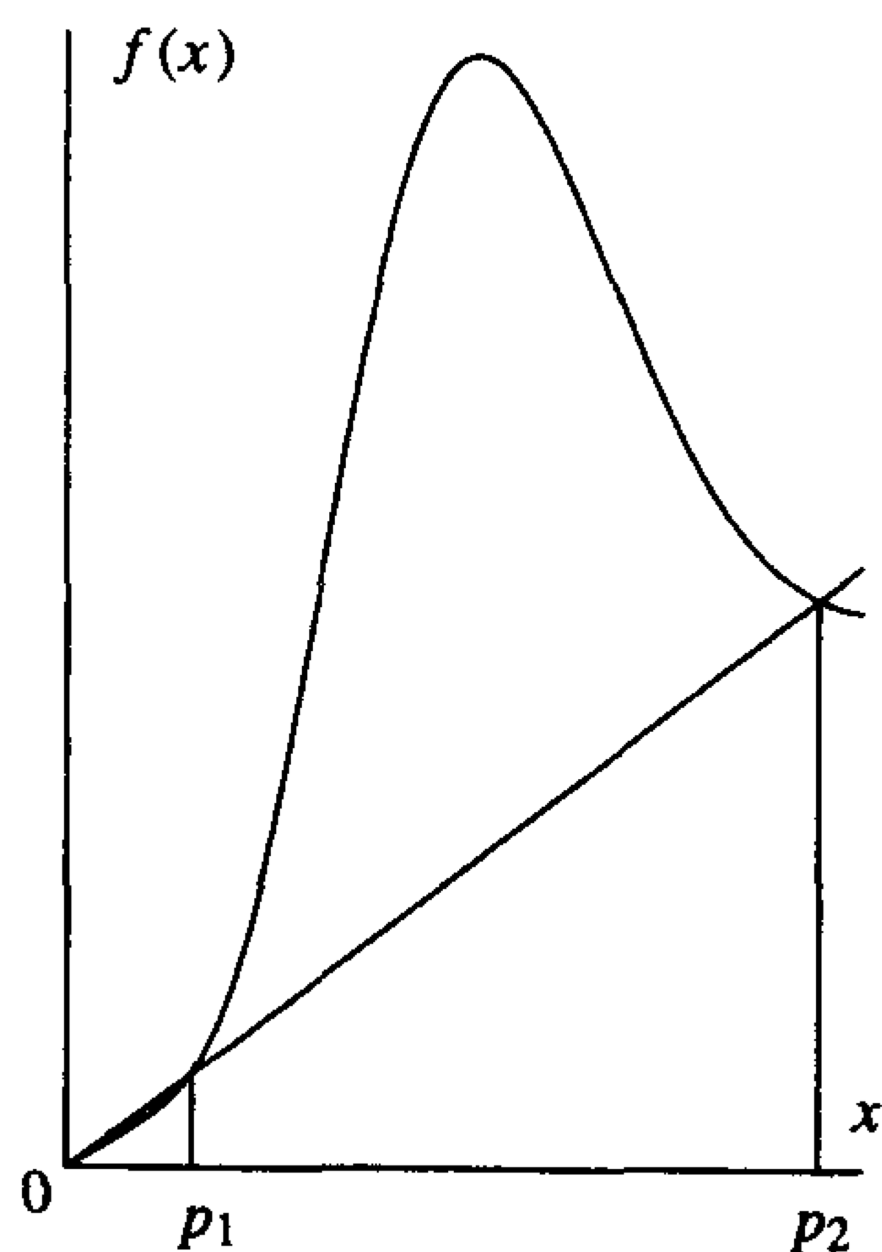


图 9.7.1 $a=0.2$ 血细胞模型的图像

p_2 的稳定性依赖于参数 a，对于 $a_0\approx 0.262\,727$，$f_{a_0}'(p_2)=-1$，当 $0<a<a_0$ 时，p_2 都是吸引不动点. 特别地，对于 $a=0.2$ 和 $x_0>p_1$，红细胞数量 $f_{0.2}^n(x_0)$ 收敛于 p_2，因此若红细胞的死亡率不太大，且初始值充分大，则红细胞数量都收敛于常态 p_2.

当 $a>a_0$ 时，p_2 变成不稳定的不动点. 它首先经过倍周期分支产生一个吸引的 2-周期轨道，继而产生更高周期的吸引轨道，特别地，当 $a=0.81$ 时会出现两个 3-周期轨道. 在 10.1 节将会看到：任何具有 3-周期轨道的映射都具有任一周期的轨道；在 11.5.2 节还将继续讨论此模型，那里对 $a=0.81$ 的情形进行数值模拟后发现此映射不仅有吸引的周期轨还具有一个混沌吸引子(如 11.2 节所定义).

在文献[**73**]中读者可以看到对此模型的进一步讨论和更多参考文献.

351

9.8 理论与证明

图像分析

定理 9.2.4 令 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，x^* 是其不动点，假设存在 $y_1<x^*<y_2$，使

$$x<f(x)<x^* \qquad y_1<x<x^*,$$

$$x^* < f(x) < x \qquad x^* < x < y_2,$$

而且 f 在区间 (y_1, y_2) 上单调递增，则 x^* 的吸引域包含区间 (y_1, y_2)，即

$$(y_1, y_2) \subset \mathcal{B}(x^*, f).$$

证明　只证 $(y_1, x^*) \subset \mathcal{B}(x^*, f)$，类似可证 $(x^*, y_2) \subset \mathcal{B}(x^*, f)$.

取 x_0 满足 $y_1 < x_0 < x^*$，令 $x_n = f^n(x_0)$，由定理假设可知当 $y_1 < x < x^*$ 时 $f(x)$ 的图像位于对角线之上、x^* 之下. 如例 9.2.1 所示，可得

$$y_1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x^*.$$

这是个单增有上界的序列，因此它一定收敛于某一点 $x_\infty \leqslant x^*$，由 f 的连续性可知序列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 必收敛于 $f(x_\infty)$，由于它只是由原序列重新编号得到的，可知 $x_{n+1} = f(x_n)$ 也收敛于 x_∞，从而 $f(x_\infty) = x_\infty$，又因为区间 (y_1, x^*) 中无不动点，所以 x_∞ 就是不动点 x^*，即 x_n 收敛于 x^*，从而 $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, f)$，由 x_0 的任意性可知 $(y_1, x^*) \subset \mathcal{B}(x^*, f)$. ■

周期点的稳定性

定理 9.3.7　令 f 是映 $\mathbb{R}$ 到自身的连续可微函数.

(a) 设 p_0 是不动点，$f(p_0) = p_0$，则不动点导数的绝对值和其稳定性的关系可表述为下面三句话：

(i) 若 $|f'(p_0)| < 1$，则 p_0 是吸引不动点.

(ii) 若 $|f'(p_0)| > 1$，则 p_0 是排斥不动点.

(iii) 若 $|f'(p_0)| = 1$，则不动点 p_0 的稳定性无法确定，它可能是吸引的、排斥的、半稳定的或不属于上述任何一种情况.

(b) 设 p_0 是 n-周期点，由链式求导法则

$$|(f^n)'(p_0)| = |f'(p_{n-1})| \cdots |f'(p_1)| \cdot |f'(p_0)|,$$

其中 $p_j = f^j(p_0)$，则周期点导数的绝对值和其稳定性的关系可表述为下面三句话：

(i) 若 $|(f^n)'(p_0)| < 1$，则 p_0 是吸引的 n-周期点.

(ii) 若 $|(f^n)'(p_0)| > 1$，则 p_0 是排斥的 n-周期点.

(iii) 若 $|(f^n)'(p_0)| = 1$，则 p_0 的稳定性无法确定，它可能是吸引的、排斥的、半稳定的或不属于上述任何一种情况.

证明　(a)(i) 设 $|f'(p_0)| < 1$，取 $\delta > 0$ 使得当 $x \in [p_0 - \delta, p_0 + \delta]$ 时 $|f'(x)| \leqslant r < 1$，由中值定理可知，对任意 $x \in [p_0 - \delta, p_0 + \delta]$，存在介于 x 和 p_0 之间的数 y（依赖于 x）满足

352

$$f(x) - f(p_0) = f'(y)(x - p_0).$$

两边取绝对值，则有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p_0)| &= |f'(y)| \cdot |x - p_0| \\ &\leqslant r|x - p_0| < |x - p_0|. \end{aligned}$$

可知 $x_1 = f(x)$ 比 x 更靠近 p_0，从而 $x_1 \in [p_0 - \delta, p_0 + \delta]$. 下面对 x_1 重复上述讨论，可得

$$\begin{aligned} |f^2(x) - f(p_0)| &= |f(x_1) - f(p_0)| \\ &= |f'(y)| \cdot |x_1 - p_0| \end{aligned}$$

$$\leqslant r \mid x_1 - p_0 \mid \leqslant r^2 \mid x - p_0 \mid .$$

因此 $f(x) = x_1$ 也属于 $[p_0 - \delta,\ p_0 + \delta]$. 归纳之，对任意的 n，$x_n = f^n(x)$ 都属于 $[p_0 - \delta,\ p_0 + \delta]$ 而且

$$\mid f'(x) - f(p_0) \mid \leqslant r^n \mid x - p_0 \mid .$$

由于当 n 趋向无穷时 r^n 趋向零，所以 p_0 是吸引的不动点.

(ii)若 $\mid f'(p_0) \mid > 1$，则存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in [p_0 - \delta,\ p_0 + \delta]$ 时 $\mid f'(x) \mid \geqslant r > 1$，取 $x \in [p_0 - \delta,\ p_0 + \delta]$，$x \neq p_0$，作类似于上面的讨论，可知只要对 $0 \leqslant j \leqslant n-1$ 都有 $x_j = f^j(x)$ 属于 $[p_0 - \delta,\ p_0 + \delta]$，则

$$\mid f^n(x) - p_0 \mid \geqslant r^n \mid x - p_0 \mid ,$$

从而 $x_n = f^n(x) \neq p_0$，因此必存在 $n_0 > 0$ 使得

$$\mid f^{n_0}(x) - p_0 \mid > \delta.$$

这证明 p_0 是排斥的不动点.

我们留给读者去验证 $\mid f'(p_0) \mid = 1$ 的情形，此时 p_0 的可能是吸引的、排斥的、或不属于上述任何一种情况.

(b)(i)设 $f^n(p_0) = p_0$，$\mid (f^n)'(p_0) \mid < 1$，由部分(a)中的证明可知 p_0 是 f^n 的吸引不动点，再利用 f^j，$1 < j < n$ 的连续性，只要 x 靠近 p_0，则中间的迭代必在此周期轨附近. 剩余部分请读者给出证明. ■

施瓦茨导数

命题 9.4.4　设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 C^3 类函数，对所有满足 $f'(x) \neq 0$ 的 x 都有 $S_f(x) < 0$.

(a)若 m 是 $g(x) = f'(x)$ 的极小值点，则 $g(m) = f'(m) \leqslant 0$.

(b)设 $a < p < b$ 是 f 的三个不动点，$f(a) = a$，$f(p) = p$，$f(b) = b$，进一步假设(i)$0 < f'(p) < 1$，(ii)对 $a < x < p$，$a < x < f(x) < p$ 以及(iii)当 $p < x < b$ 时，$p < f(x) < x < b$，则存在 $x_c \in (a,\ b)$ 使得 $f'(x_c) = 0$(这说明施瓦茨导数具有 9.4 节中的性质(1)).

证明　(a)由 m 是 $g(x) = f'(x)$ 的极小值点可知，$0 = g'(m) = f''(m)$，而且 $0 \leqslant g''(m) = f'''(m)$. 若 $f'(m) = 0$，则结论已证；若 $f'(m) \neq 0$，则

$$0 > S_f(m) = \frac{f'''(m)f'(m) - \frac{3}{2}f''(m)^2}{f'(m)^2} = \frac{f'''(m)}{f'(m)}.$$

因此 $f'''(m)$ 与 $f'(m)$ 都不等于零且符号相反，由 $f'''(m) \geqslant 0$ 可知 $f'''(m) > 0$ 以及 $f'(m) < 0$，结论成立.

(b)由假设可知 $f'(a) \geqslant 1$，$f'(b) \geqslant 1$ 以及 $0 < f'(p) < 1$，因此 $g(x) = f'(x)$ 的极小值点 m 属于开区间 $(a,\ b)$，由第一步的证明可知 $f'(m) \leqslant 0$，对 $g(x) = f'(x)$ 应用中值定理，必存在介于 m 和 p 之间的数 x_c 满足 $f'(x_c) = 0$. ■

353

定理 9.4.5　设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 C^3 类函数，对所有满足 $f'(x) \neq 0$ 的 x 都有 $S_f(x) < 0$，再设 p 是吸引的 n-周期点，则下面关于 p 的轨道的吸引域的两个论述中必有一个成立：

(1)吸引域$\mathcal{B}(\mathcal{O}_f^+(p))$可达到$\infty$或$-\infty$.

(2)存在$\mathcal{B}(\mathcal{O}_f^+(p))$中的点$x_c$使得$f'(x_c)=0$.

证明 只考虑p是不动点的情形，对其他情形只要把f换成f^n即可．分以下几种情况：

情形 a：若$f'(p)=0$，则结论已证.

情形 b：设$0<f'(p)<1$，

(i)若对$x>p$都有$p<f(x)<x$，则$\mathcal{B}(p)$包含$[p,\infty)$，结论已证.

(ii)若对$x<p$都有$x<f(x)<p$，则$\mathcal{B}(p)$包含$(-\infty,p]$，结论已证.

因此可设存在$a<p<b$满足$x<f(x)<p(a<x<p)$，$p<f(x)<x(p<x<b)$，$f(a)=a$或$f(a)=p$以及$f(b)=b$或$f(b)=p$.

(iii)假设存在$b>p$满足$f(b)=p$及$p<f(x)<x(p<x<b)$，不妨设b是满足$b>p$且$f(b)=p$及$p<f(x)<x(p<x<b)$的最小数，利用定理9.2.4可知$\mathcal{B}(p)$包含$[p,b]$，由中值定理(或罗尔定理)，必存在介于p和b之间的数x_c使得$f'(x_c)=0$，由于$x_c\in[p,b]\subset\mathcal{B}(p)$，结论已证.

(iv)假设存在$a<p$满足$f(a)=p$，类似于(iii)的证明，结论成立.

(v)只剩下讨论存在$a<p<b$满足$f(a)=a$，$f(b)=b$，$f(p)=p$且$0<f'(p)<1$的情形，若存在$x_1\in(a,b)$使得$f'(x_1)\leqslant0$，那么由中值定理可知$f'(x)$必在x_1和p之间的某点处等于零，结论已证．因此假设在区间(a,b)上$f'(x)>0$，由定理9.2.4可知$(a,b)\subset\mathcal{B}(p)$，再利用命题9.4.4，存在$x_c\in(a,b)$使得$f'(x_c)=0$，此点一定属于$\mathcal{B}(p)$，即为所证，当$f'(p)>0$时可能出现的所有情形也是如此.

情形 c：设$-1<f'(p)<0$，此时要用到f^2，详细过程此处略去. ■

周期点的分支

定理 9.5.2(二重分支或鞍结点分支) 设f是从$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}$的C^2类函数，记$f(x,\mu)=f_\mu(x)$，设μ_0是一个分支值，它有一个导数为1的不动点x_0，即

(1)$f(x_0,\mu_0)=x_0$.

(2)$f'_{\mu_0}(x_0)=1$.

进一步假设f的导数满足如下条件：

(3)二阶导数$f''_{\mu_0}(x_0)\neq0$，因此当x靠近x_0时f_{μ_0}的图像位于对角线的同侧.

(4)f_μ的图像随μ的变化而上下移动，或更明确地，$\dfrac{\partial f}{\partial\mu}(x_0,\mu_0)\neq0$.

则存在包含x_0的区间$\boldsymbol{I}$和包含μ_0的区间$\boldsymbol{J}$，以及从$\boldsymbol{I}$到$\boldsymbol{J}$的连续函数$\mu=m(x)$使得如下条件成立：

354

(i)$f_{m(x)}(x)=x$，$x\in\boldsymbol{I}$.

(ii)函数$\mu=m(x)$的图像过点(x_0,μ_0)，即$m(x_0)=\mu_0$.

(iii)函数$m(x)$的图像给出了f在$\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{J}$上的所有不动点.

(iv)$m(x)$的导数满足$m'(x_0)=0$且

$$m''(x_0) = \frac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\mu_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(x_0,\mu_0)} \neq 0,$$

因此 $\mu = m(x) = \mu_0 + \frac{1}{2}m''(x_0)(x-x_0)^2 + O(|x-x_0|^3)$. 若 $m''(x_0)>0$，则不动点在 $\mu>\mu_0$ 时出现. 若 $m''(x_0)<0$，则不动点在 $\mu<\mu_0$ 时出现.

(v) $m(x)$ 的图像上位于 x_0 不同侧的不动点的吸引性相反，事实上

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,m(x)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\mu_0)(x-x_0) + O(|x-x_0|^2).$$

证明思路 这里将利用隐函数的导数给出定理中 $m(x)$ 导数的计算方法，隐函数定理告诉我们若可以解出隐函数的导数 $m'(x) = \frac{\partial \mu}{\partial x}$，则存在函数 $\mu = m(x)$ 满足定理 9.5.2 中所述的性质.

要得到不动点，需要解方程

$$G(x,\mu) = f(x,\mu) - x = 0.$$

记

$$G_x(x,\mu) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,\mu), \qquad G_\mu(x,\mu) = \frac{\partial G}{\partial \mu}(x,\mu),$$

对其他偏导数也用类似记法.

下面计算 G 在 $(x_0,\ \mu_0)$ 处的偏导数：

$$G_x(x_0,\mu_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\mu_0) - 1 = 0$$

$$G_\mu(x_0,\mu_0) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0,\mu_0) \neq 0.$$

因为 $G_\mu(x_0,\ \mu_0)\neq 0$，所以 μ 可以表示为 x 的函数.

设函数 $\mu = m(x)$ 适合 $m(x_0) = \mu_0$ 且对所有 x 满足

$$0 = G(x,m(x)),$$

两边关于 x 求导，则有

$$0 = G_x(x,m(x)) + G_\mu(x,m(x))m'(x).$$

由于 $G_\mu(x_0,\ m(x_0)) = G_\mu(x_0,\ \mu_0)\neq 0$，所以可解出 $m'(x_0)$：

$$m'(x_0) = -\frac{G_x(x_0,\mu_0)}{G_\mu(x_0,\mu_0)} = 0,$$

两边再关于 x 求导，则有

$$\begin{aligned}0 &= G_{xx}(x,m(x)) + 2G_{x\mu}(x,m(x))m'(x) \\ &\quad + G_{\mu\mu}(x,m(x))(m'(x))^2 + G_\mu(x,m(x))m''(x), \\ 0 &= G_{xx}(x_0,\mu_0) + 2G_{x\mu}(x_0,\mu_0)\cdot 0 \\ &\quad + G_{\mu\mu}(x_0,\mu_0)\cdot 0^2 + G_\mu(x_0,\mu_0)m''(x_0),\end{aligned}$$

$$m''(x_0)=-\frac{G_{xx}(x_0,\mu_0)}{G_{\mu}(x_0,\mu_0)}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\mu_0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0,\mu_0)},$$

定理中结论(iv)已证.

不动点的稳定性可由 $f_x(x,\mu)$ 的泰勒展开式确定，这里用记号 $O(|x-x_0|^2)$ 表示不低于 $|x-x_0|$ 的项，由于 $f_x(x_0,\mu_0)=1$，则

$$f_x(x,\mu)=1+f_{xx}(x_0,\mu_0)(x-x_0)+f_{x\mu}(x_0,\mu_0)(\mu-\mu_0)$$
$$+O(|x-x_0|^2)+O(|x-x_0|\cdot|\mu-\mu_0|)+O(|\mu-\mu_0|^2).$$

利用 $m'(x_0)=0$，可得 $m(x)-\mu_0=O(|x-x_0|^2)$ 且

$$f_x(x,m(x))-1=f_{xx}(x_0,\mu_0)(x-x_0)+O(|x-x_0|^2).$$

因为 $f_{xx}(x_0,\mu_0)\neq 0$，所以 $f_x(x,m(x))-1$ 在 x_0 两侧符号相反，从而一个不动点是吸引的，另一个是排斥的. ■

例 9.5.3 的详细计算过程　令

$$f_{\mu}(x)=-\mu x+ax^2+bx^3,$$

其中 a，$b>0$，可以看出对所有参数 μ 有 $f_{\mu}(0)=0$，而且 $f'_{\mu}(x)=-\mu+2ax+3bx^2$，$f'_{\mu}(0)=-\mu$，$f'_1(0)=-1$，当 μ 单增地穿过 1 时不动点的稳定性由吸引变为排斥.

为得到 2-周期轨道，需要解方程 $0=f^2_{\mu}(x)-x$，直接计算得

$$f^2_{\mu}(x)=\mu^2x+(-a\mu+a\mu^2)x^2+(-b\mu-2a^2\mu-b\mu^3)x^3+O(x^4).$$

因为要找 0 以外的 $f^2_{\mu}(x)-x=0$ 的根，所以可用 x 除 $f^2_{\mu}(x)-x$，定义

$$M(x,\mu)=\frac{f^2_{\mu}(x)-x}{x}$$
$$=\mu^2-1+(-a\mu+a\mu^2)x+(-b\mu-2a^2\mu-b\mu^3)x^2+O(x^3).$$

代入点(0，1)，则 $M(0,1)=0$，M 的偏导数为

$$M_x(0,1)=-a\mu+a\mu^2|_{\mu=1}=0$$
$$M_{\mu}(0,1)=2\mu|_{\mu=1}=2\neq 0$$
$$M_{xx}(0,1)=2(-b\mu-2a^2\mu-b\mu^3)|_{\mu=1}=-4(b+a^2).$$

356

要通过解 $M(x,\mu)=0$ 得到 μ 关于 x 的函数并不容易，需要利用隐函数微分法来计算 $\mu=m(x)$ 的导数. 两次求导，则有

$$0=M_x(x,m(x))+M_{\mu}(x,m(x))m'(x)\qquad 和$$
$$0=M_{xx}(0,1)+2M_{x\mu}(0,1)m'(0)+M_{\mu\mu}(0,1)(m'(0))^2+M_{\mu}(0,1)m''(0).$$

在第一个方程中代入点(0，1)，并利用已计算出的 M 的偏导数，可得

$$0=0+2m'(0)$$
$$m'(0)=0;$$

代入第二个方程，则有

$$0 = -4(b + a^2) + 2M_{x\mu}(0,1)\cdot 0 + M_{\mu\mu}(0,1)\cdot 0^2 + 2m''(0),$$

$$m''(0) = 2(b + a^2).$$

因此 $\mu = m(x) = 1 + (b + a^2)x^2 + O(x^3)$. 为了使 $m(x) - 1$ 的符号由二次项确定，需要 $b + a^2 \neq 0$，特别地，若 $b + a^2 \neq 0$，则 2-周期轨道在 $\mu > 1 = \mu_0$ 或 $\mu < 1 = \mu_0$ 时出现.

2-周期轨道的稳定性也由 $b + a^2$ 的符号决定，$\frac{\partial(f^2)}{\partial x}(x, m(x))$ 在 $x = 0$ 和 $\mu = m(0) = 1$ 的泰勒展开式为

$$\frac{\partial(f^2)}{\partial x}(x,m(x)) = \frac{\partial(f^2)}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial^2(f^2)}{\partial x^2}(0,1)x + \frac{\partial^2(f^2)}{\partial\mu\partial x}(0,1)(m(x) - 1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3(f^2)}{\partial x^3}(0,1)x^3 + \cdots.$$

利用前面 f^2 的展开式可得到 f^2 的不同导数在(0, 1)处的取值：

$$\frac{\partial(f^2)}{\partial x}(0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\right)^2 = (-1)^2 = 1,$$

$$\frac{\partial^2(f^2)}{\partial x^2}(0,1) = 2(-a\mu + a\mu^2)\,|_{\mu=1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2(f^2)}{\partial\mu\partial x}(0,1) = 2\mu\,|_{\mu=1} = 2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3(f^2)}{\partial x^3}(0,1) = \left(\frac{1}{2}\right)6(-b\mu - 2a^2\mu - b\mu^3)\,|_{\mu=1} = -6(b + a^2).$$

作替换 $m(x) - 1 = (b + a^2)x^2 + O(x^3)$，得到

$$\frac{\partial^2(f^2)}{\partial\mu\partial x}(0,1)(m(x) - 1) = 2(b + a^2)x^2 + O(x^3).$$

把 $x = 0$ 和 $\mu = m(0) = 1$ 处所有偏导数的取值代入 $\frac{\partial(f^2)}{\partial x}(x, m(x))$ 的泰勒展开式，则有

$$\frac{\partial(f^2)}{\partial x}(x,m(x)) = 1 + 0\cdot x + 2(b + a^2)x^2 - 6(b + a^2)x^2 + O(x^3)$$
$$= 1 - 4(b + a^2)x^2 + O(x^3).$$

因此，当 $b + a^2 > 0$ 时 2-周期轨道是吸引的；当 $b + a^2 < 0$ 时它是排斥的. ■ 357

共轭

定理 9.6.5 在区间[0, 1]上，逻辑斯谛映射 $G(u) = 4u(1-u)$ 和帐篷映射 $T(s)$ 在映射 $u = h(s) = \sin^2(\pi s/2)$ 之下是拓扑共轭的.

证明 首先令 $\theta = h_1(s) = \pi s$，则此映射把区间[0, 1]中的点映射成从 0 取到 π 的"角度" θ，定义映射

$$\hat{T}(\theta) = \begin{cases} 2\theta & 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 2(\pi - \theta) & \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

这个映射可形象地理解为在上半圆上取一个点，加倍其角度，然后折回其自身(即把下半圆周返向上半圆周，使点都落在上半圆周).

下面考虑映射 $x=h_2(\theta)=\cos(\theta)$，它把角 θ 再映射成 x 轴上的点，因此 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 映射 $f(x)=h_2\circ\hat{T}\circ h_2^{-1}(x)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}f(x) &= h_2\circ\hat{T}\circ h_2^{-1}(x) = h_2\circ\hat{T}(\cos^{-1}(x))\\ &= \begin{cases}h_2(2\cos^{-1}(x)) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ h_2(2\pi-2\cos^{-1}(x)) & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}\\ &= \cos(2\cos^{-1}(x)) = 2\cos^2(\cos^{-1}(x))-1\\ &= 2x^2-1.\end{aligned}$$

由命题9.6.4可知 $u=h_3(x)=0.5-0.5x$ 是从 $f(x)$ 到 $G(u)$ 的共轭映射，结合起来，则

$$\begin{aligned}u &= h(s) = h_3\circ h_2\circ h_1(s) = h_3\circ h_2(\pi s)\\ &= h_3(\cos(\pi s)) = 0.5-0.5\cos(\pi s)\\ &= \sin^2(\pi s/2)\end{aligned}$$

一定是 $G(u)$ 与 $T(s)$ 之间的共轭映射. ■

定理 9.6.8 令 $f(x)=\dfrac{x+x^3}{2}$，$g(y)=ay+by^3$，其中 $0<a<1$，$b>0$，此时 g 有不动点 $y=0$ 和 $\pm\sqrt{(1-a)/b}$，则 f 在区间 $[-1,1]$ 上与 g 在区间 $[-\sqrt{(1-a)/b},\sqrt{(1-a)/b}]$ 上是拓扑共轭的，且其共轭映射可以延拓到整个实数轴上.

证明 注意到 $f'(x)=(1+3x^2)/2$ 及 $g'(y)=(a+3by^2)$ 处处为正，从而 f 和 g 皆可逆，这使证明变得简单些.

由 $f'(0)=0.5$ 及 $g'(0)=a$ 可知0是这两个映射吸引不动点，对应吸引域分别为

$$\mathcal{B}(0,f) = (-1,1) \quad 与$$
$$\mathcal{B}(0,g) = (-\sqrt{(1-a)/b},\sqrt{(1-a)/b}).$$

358

因为(0，1)中的每个点 x 在区间 $(f(1/2),1/2]$ 上恰有一个原像，$x_{-j}=f^{-j}(x)$；对应的闭集 $[f(1/2),1/2]$ 称为一基本区域(fundamental domain). 令 $\bar{y}=\sqrt{(1-a)/b}$，则 $(0,\bar{y})$ 中的每个点 y 在区间 $(g(\bar{y}/2),\bar{y}/2]$ 上恰有一个迭代 $y_{-j}=g^{-j}(y)$.

在 $[f(1/2),1/2]$ 上定义如下仿射映射 $y=h_0(x)$，它把 $[f(1/2),1/2]$ 映射为 $[g(\bar{y}/2),\bar{y}/2]$：

$$h_0(x) = \frac{\bar{y}}{2}-(0.5-x)\frac{\dfrac{\bar{y}}{2}-g\left(\dfrac{\bar{y}}{2}\right)}{0.5-f(0.5)}.$$

$y=h_0(x)$ 把 f 的基本区域的端点映射成 g 的基本区域的端点：$h_0(0.5)=\bar{y}/2$，$h_0(f(0.5))=\bar{y}/2-(\bar{y}/2-g(\bar{y}/2))=g(\bar{y}/2)$，还注意到 $h_0(f(0.5))=g(h_0(0.5))$ 且0.5是两个复合映射都有定义的唯一点.

对任意 $x\in(0,1)$，令 $j=j(x)$ 使得 $f^{-j(x)}(x)\in\left(f\left(\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}\right]$，再令

$$h(x)=g^{j(x)}\circ h_0\circ f^{-j(x)}(x).$$

则 $j(f(x))=j(x)+1$，因此

$$\begin{aligned}h(f(x))&=g^{1+j(x)}\circ h_0\circ f^{-1-j(x)}(f(x))\\&=g\circ g^{j(x)}\circ h_0\circ f^{-j(x)}(x)\\&=g(h(x)).\end{aligned}$$

这表明 $y=h(x)$ 满足共轭方程.

利用基本区域 $[f(1/2),1/2]$ 和 $[g(\bar{y}/2),\bar{y}/2]$，类似可得 h 从 $(-1,0)$ 映射到 $(-\bar{y},0)$ 的表达式，仍然定义 $h(0)=0$，$h(1)=\bar{y}$ 以及 $h(-1)=-\bar{y}$.

显然映射 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上是连续的，因为当 x 趋向于零时 $j(x)$ 趋向于无穷，所以 $h(x)=g^{j(x)}\circ h_0\circ f^{-j(x)}(x)$ 趋向于零（注意到 $h_0\circ f^{-j(x)}(x)$ 属于 g 的吸引域中的一个闭区间）. 这表明 $h(x)$ 在 0 点连续.

类似可证 $h(x)$ 在 ±1 处的连续性.

利用除不动点以外的基本区域可类似地将 $h(x)$ 延拓到整条实数轴 $\mathbb{R}$ 上. ■

练习

9.1 周期点

9.1.1 利用计算器或计算机（借助电子制表软件和数学程序）迭代下列函数，初始值都取为 $x_0=1$（对三角函数采用弧度制）：

a. $S(x)=\sin(x)$

b. $f(x)=2\sin(x)$

c. $T(x)=\tan(x)$

d. $E(x)=e^x$

e. $F(x)=\frac{1}{4}e^x$

9.1.2 继续完成表 9.1.1 中帐篷映射周期点的个数的计算，直到 $n\leqslant10$.

9.1.3 令 f 是 3 倍映射 $f(x)=3x(\bmod 1)$，对 $n\leqslant6$ 求出所有 n-周期点，并制成图表.

359

9.1.4 令 f 是 3 倍映射 $f(x)=3x(\bmod 1)$，确定过点 1/8 和 1/72 的完整轨道，并说明这些点是否为周期的、最终周期的或什么都不是.

9.1.5 令 f 是 $\mathbb{R}$ 到自身的映射，假设对任意 $k\geqslant1$，f^k 有 (3^k-2^k) 个不动点（例如 $f=f^1$ 有 $(3-2=1)$ 个不动点，f^2 有 $(9-4=5)$ 个不动点），对 $1\leqslant k\leqslant4$ 制作表格，包含下面内容：(i) k，(ii) f^k 不动点的个数，(iii) f^k 不动点中低周期点的个数，(iv) k-周期点的个数以及 (v) k-周期轨道的个数.

9.1.6 考虑帐篷映射 T，证明 $x\in[0,1]$ 是最终周期的当且仅当 x 是有理数，提示：先证 $T^n=$ 整数 $\pm2^nx$.

9.1.7 考虑双倍映射 D，证明任何形如 p/q 的有理数（其中 q 是大于 1 的奇数）都是周期点（不仅仅是最终周期点）.

9.1.8 对任意正整数 k，证明帐篷映射 T 和二次映射 G 都至少有一条 k-周期轨道.

9.1.9 考虑帐篷映射

$$T(x)=\begin{cases}2x & x\leqslant0.5\\2(1-x) & x\geqslant0.5.\end{cases}$$

找出满足下面性质的周期点：

a. 3-周期点 $x_0<0.5$ 使得 $T(x_0)<0.5$，$T^2(x_0)>0.5$.

b. 5-周期点 $x_0<0.5$ 使得 $T^j(x_0)<0.5$，$0\leqslant j<4$ 且 $T^4(x_0)>0.5$.

9.2 图示迭代法

9.2.1 令 $f(x)=(x+x^3)/2$.

a. 找出不动点.

b. 利用图像分析法确定$\mathbb{R}$上这些不动点的动力学性质.

9.2.2 令 $f(x)=\frac{3}{2}(x-x^3)$.

a. 找出不动点.

b. 利用图像分析法确定$\mathbb{R}$上这些不动点的动力学性质. 提示：先用不动点把实数轴分成几部分，然后在各区间上讨论这些不动点.

9.2.3 令 $f(x)=\frac{5}{4}(x-x^3)$.

a. 找出不动点.

b. 利用图像分析法确定$\mathbb{R}$上这些不动点的动力学性质. 提示：先用不动点把实数轴分成几部分，然后在各区间上讨论这些不动点.

9.2.4 对下列函数，(i)找出不动点并(ii)利用图像分析法确定$\mathbb{R}$上这些不动点的动力学性质：

a. $S(x)=\sin(x)$

b. $f(x)=2\sin(x)$

c. $T(x)=\tan(x)$

d. $E(x)=e^x$

e. $F(x)=\frac{1}{4}e^x$

9.2.5 设 f 是满足 $f([0,1])=[0,1]$ 的连续函数.

360

a. 证明 f 在区间 $[0,1]$ 上至少有一个不动点. 提示：存在点 x_0 和 x_1 分别满足 $f(x_0)=0$，$f(x_1)=x$.

b. 证明 f^2 至少有两个不动点. 提示：一定存在点 $y_0<y_1$ 经 f 或 f^2 分别映射成 0 和 1.

c. 假设 $f(0)\neq 0$，$f(1)\neq 1$，证明 f^2 至少有三个不动点.

9.3 周期点的稳定性

9.3.1 考虑函数 $f(x)=\frac{5}{4}x-x^3$.

a. 找出不动点，并把它们分成吸引的、排斥的或什么都不是.

b. 把 f 的图像和对角线画在一起，要特别注意在哪些区间上 f 的图像位于对角线之上，在哪些区间上 f 的图像位于对角线之下，临界点 $\pm\sqrt{5/12}$ 以及 f 的单调区间.

c. 在区间 $-\sqrt{5/12}\leqslant x\leqslant\sqrt{5/12}$ 上利用图示迭代法确定所有不动点的动力学行为，并描述出轨道上有代表性的点.

9.3.2 证明 0 是下列函数的不动点，且在 0 处的导数都等于 1，描述 0 附近点的动力学行为，并确定 0 是吸引的、排斥的、半吸引的或不属于任何一种情况.

a. $f(x)=x-x^2$

b. $g(x)=x+x^3$

c. $h(x)=x-x^3$

d. $k(x)=\tan(x)$

9.3.3 确定下列函数所有不动点的稳定性：

a. $S(x)=\sin(x)$

b. $f(x)=2\sin(x)$

c. $T(x)=\tan(x)$

d. $E(x)=e^x$

e. $F(x)=\frac{1}{4}e^x$

9.3.4 考虑函数 $Q(x)=x^2-c$，其中 $c=1.11$.

a. 找出不动点并确定它们是吸引的还是排斥的.

b. 找出 2-周期点并确定它们是吸引的还是排斥的. 提示：2-周期点满足

$$0=Q^2(x)-x=x^4-2cx^2-x+c^2-c=(x^2-x-c)(x^2+x+1-c).$$

9.3.5 找出 $f(x)=2x^2-5x$ 的 2-周期轨道，并确定此轨道是吸引的、排斥的或不属于上述任何一种情况？

9.3.6 考虑函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x$.

a. 找出不动点和 2-周期点，并逐个分析它们是吸引的、排斥的或什么都不是. 提示：

$$f^2(x)-x=\frac{1}{8}x(2x^2-5)(2x^2-1)(2x^4-3x^2+2).$$

这些周期点还满足方程 $f(x)=-x$ 或 $f(x)+x=0$.

b. 把 f 的图像和对角线画在一起，要特别注意在哪些区间上 f 的图像位于对角线之上、在哪些区间上 f 的图像位于对角线之下、临界点以及 f 的单调区间.

c. 把 f^2 的图像和对角线画在一起，注意到若 a 被 f 映成 f 临界点，则 a 是 f^2 的临界点，事实上，$(f^2)'(a)=f'(f(a))f'(a)=0$，求出这些 $f^2(a)$ 的值.

d. 利用图像迭代法确定 2-周期轨道的吸引域. 提示：注意有些点可能是最终不动点，它们的轨道恰落在 0 点.

361

9.3.7 对 $a=3.839$，逻辑斯谛映射 $g_a(x)=ax(1-x)$ 有一条 3-周期轨道，近似值为 $x_0=0.959$，$x_1=g_a(x_0)=0.150$，$x_2=g_a^2(x_0)=0.489$，假设这些值都是准确的，试确定此轨道的稳定性.

9.3.8 考虑函数 $f(x)=rxe^{r(1-x/K)}$，其中 $r>0$，$K>0$，找出不动点并确定其稳定性.

9.3.9 考虑函数 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+1$，注意到 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f(2)=0$ 是一条 3-周期轨道，试确定它是吸引的还是排斥的.

9.3.10 考虑斜率为 r 的帐篷映射

$$T_r(x)=\begin{cases} rx & x\leqslant\frac{1}{2} \\ r(1-x) & x\geqslant\frac{1}{2}. \end{cases}$$

此处我们限制 $1<r\leqslant 2$.

a. 找出不动点并确定其稳定性.

b. 求出 $T_r^2(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的表达式. 提示：将区间 $[0, 1]$ 分成四个子区间使得每个子区间上的斜率为常数.

c. 找出 2-周期点并确定其稳定性，r 多大时存在 2-周期轨道.

9.3.11 考虑逻辑斯谛映射 $G(x)=4x(1-x)$，令 $q_0=0<q_1<q_2<q_3<\cdots<q_7$ 是 G^3 的八个不动点，确定哪两个是 G 的不动点，对其余六个如何分组才能构成两条 3-周期轨道？提示：注意 0 和 3/4 是不动点，而且 $(G^3)'(x)$ 沿着轨道恒为常数，特别地，其符号保持不变，最后再利用图 9.3.7 中 G^3 的图像.

9.3.12 图 9.8.1 给出了某个函数 f 的幂 f^2 的图像，包括 f^2 的五个不动点 $q_1<q_2<q_3<q_4<q_5$，为什么五个点中至少有三个是 f 的不动点？并确定是哪三个. 哪一对可能构成 2-周期轨道？

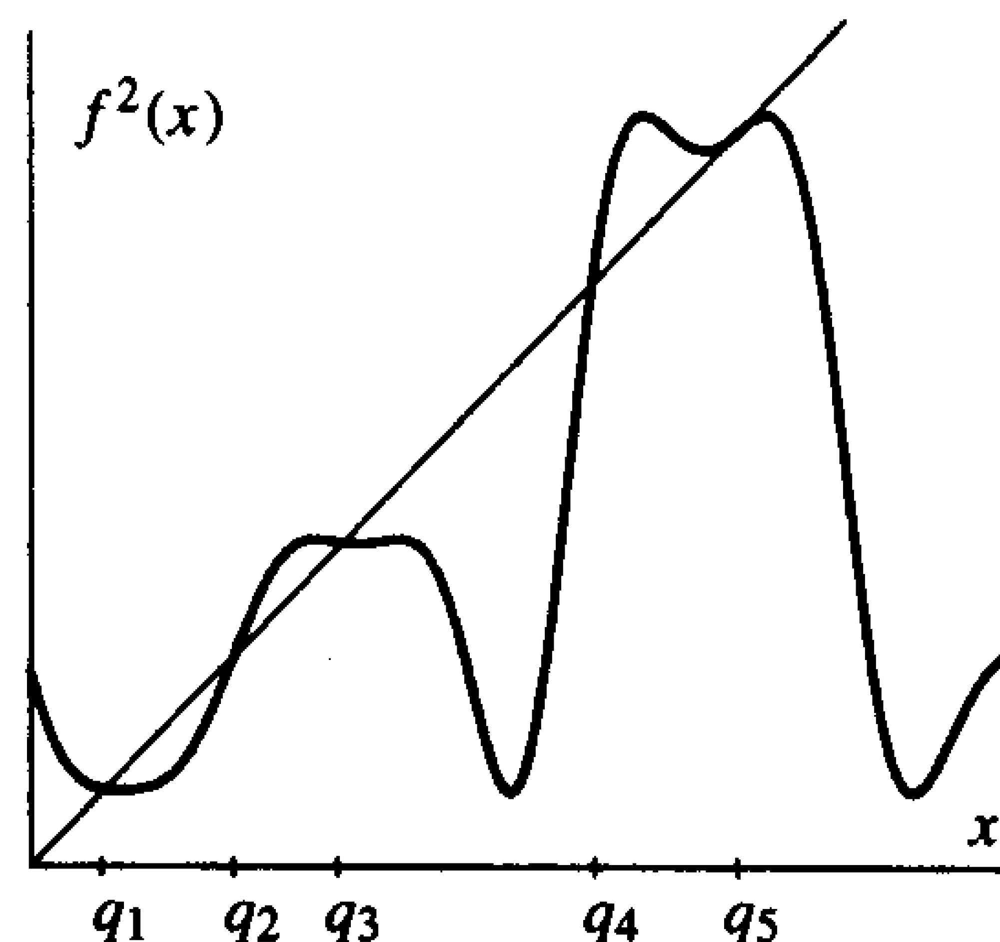


图 9.8.1

9.3.13 考虑函数$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^3$.

a. 找出所有不动点并确定它们是吸引的、排斥的或其他情况.

362

b. 利用图像迭代法确定两个不动点间任意点的动力学行为.

c. 大于或小于所有不动点的点有何动力学性质?

9.3.14 令$p(x)=(x-x_0)^k g(x)$，其中$k>1$，$g(x_0)\neq 0$，设$p(x)$，$g(x)$都有二阶连续导数，证明牛顿映射关于p的导数在x_0处为$(k-1)/k$，从而x_0是N_p吸引的不动点.

9.3.15 考虑$f(x)=x^3-5x$，$N_f(x)$是牛顿映射.

a. 验证$x=0$，$\pm\sqrt{5}$是N_f的不动点，且都是吸引的.

b. 验证N_f有2-周期轨道± 1，$N_f(1)=-1$，$N_f(-1)=1$，证明它是排斥的.

c. 证明区间$(\sqrt{5/3},\ \infty)$位于$\sqrt{5}$的吸引域，类似地，区间$(-\infty,\ -\sqrt{5/3})$位于$-\sqrt{5}$的吸引域；注意到区间$(-\sqrt{5/3},\ -1)$和$(1,\ \sqrt{5/3})$中几乎所有点都属于两个吸引域之一，但我们并不要求证明这一点.

d. 证明0的吸引域包含区间$(-1,\ 1)$，提示：把$N(x)$和$-x$画在同一个图中，$N(x)$和$-x$在0和± 1处相交，证明当时$0<x<1$有$-x<N(x)<0$，因此$|N(x)|<|x|$；同理当$-1<x<0$时有$0<N(x)<-x$，因此$|N(x)|<|x|$，再利用$N(x)$和x的图像计算$(-1,\ 1)$中点的迭代，由前面的估计可知这些点的迭代虽然左右摇摆但收敛于0.

e. 区间$(-\sqrt{5/3},\ -1)$和$(1,\ \sqrt{5/3})$中点有何动力学性质？注意其中一些点位于$\pm\sqrt{5}$的吸引域中.

9.3.16 考虑函数$f(x)=\cos(x)-x$，x是弧度，(利用计算器或计算机)计算从$x_0=0$开始的牛顿映射的迭代，并估计满足$\cos(x^*)=x^*$的点x^*，要精确到小数点后四位.

9.3.17 假设$f(x)$满足$f(a)=a$，$f'(a)=1$，$f''(a)=0$，

a. 证明当$f'''(a)<0$时a是吸引的不动点.

b. 证明当$f'''(a)>0$时a是排斥的不动点.

9.3.18 设$\boldsymbol{F}$是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的一个压缩(即存在$0<r<1$使得对任意$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$属于$\mathbb{R}^n$都有$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})|\leqslant r|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$)，对任意点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，定义$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x}_0)$.

a. 证明

$$|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|\leqslant r|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}|,$$

并归纳出

$$|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|\leqslant r^k|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|.$$

b. 证明

$$|\boldsymbol{x}_{k+j}-\boldsymbol{x}_k|\leqslant\frac{r^k}{1-r}|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|.$$

c. (b)表明$\mathbb{R}^n$中的序列$\boldsymbol{x}_k$是柯西序列，从而$\boldsymbol{x}_k$收敛，设其极限点为$\boldsymbol{x}^*$，因为$\boldsymbol{x}_k$和$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)$都收敛于$\boldsymbol{x}^*$，所以$\boldsymbol{x}^*$是$\boldsymbol{F}$的不动点.

363

d. 证明$\boldsymbol{F}$至多有一个不动点.

9.4 周期汇施瓦茨导数

9.4.1 确定下列函数的施瓦茨导数：

a. $f(x)=ax^2+bx+c$

b. $g(x)=x^3+\frac{1}{2}x$

c. $h(x)=x^n$，$n\geqslant 3$

它们的施瓦茨导数常为负吗？

9.4.2 令 $g(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{7}{5}x$，它有不动点 $x=0$，$\pm\sqrt{6}$、2-周期轨道 ± 1、临界点 $\pm\sqrt{7/6}$.

a. 计算 g 的施瓦茨导数.

b. 点 $x_0=\sqrt{7/6}$属于哪条轨道的吸引域？$x_0=-\sqrt{7/6}$呢？提示：由 $g(-x)=-g(x)$可知 g 是奇函数，因此

$$g^j(-\sqrt{7/6})=-g^j(\sqrt{7/6}),\quad \text{且}\quad g((-\sqrt{6},\sqrt{6}))\subset(-\sqrt{6},\sqrt{6}).$$

9.4.3 令 $p(x)$是一个四次多项式，设 $p'(x)$有三个互不相同的实根，即

$$p'(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3),$$

其中 $a_i\neq a_j$，$i\neq j$.

a. 证明

$$p''(x)=\frac{p'(x)}{x-a_1}+\frac{p'(x)}{x-a_2}+\frac{p'(x)}{x-a_3}\quad \text{且}$$

$$p'''(x)=\frac{2p'(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{2p'(x)}{(x-a_1)(x-a_3)}+\frac{2p'(x)}{(x-a_2)(x-a_3)}.$$

b. 证明 $p(x)$的施瓦茨导数有如下形式：

$$S_p(x)=-\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{x-a_i}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{x-a_i}\right)^2.$$

9.4.4 令 $p(x)$是一个 $n+1$ 次多项式，设 $p'(x)$有 n 个互不相同的实根，即

$$p'(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=(x-a_1)\cdots(x-a_n),$$

其中 $a_i\neq a_j$，$i\neq j$.

a. 证明

$$p''(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{p'(x)}{x-a_i}\quad \text{且}$$

$$p'''(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{p'(x)}{(x-a_i)(x-a_j)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\frac{2p'(x)}{(x-a_i)(x-a_j)}.$$

上一个习题给出了 $n=3$ 的情况.

364

b. 证明 $p(x)$的施瓦茨导数有如下形式：

$$S_p(x)=-\sum_{i}\left(\frac{1}{x-a_i}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{i}\frac{1}{x-a_i}\right)^2,$$

因此它是常负的.

9.4.5 设函数 $f(x)$的施瓦茨导数在(a,b)上常负，证明对任意 $x\in(a,b)$或者 $f''(x)\neq 0$ 或者 $f'''(x)\neq 0$.

9.4.6 考虑三次多项式

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

其中 $a>0$.

a. 令 $z=x+\frac{b}{3a}$，证明

$$ax^3+bx^2+cx+d=az^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)z+r=g(z),$$

r 是某个常数.

b. 证明 $g'(z)=0$ 有两个实根当且仅当 $c<b^2/(3a)$，其中 $g(z)$ 如(a)所示.

c. 证明当 $c<b^2/(3a)$ 时，任意满足 $g'(z)\neq 0$ 的 z 都成立 $S_g(z)<0$.

d. 证明若 f 有两个临界点则其施瓦茨导数为负.

9.5　周期点的分支

9.5.1　令 $E_\mu(x)=\mu e^x$，证明函数族 E_μ 在 $\mu=\frac{1}{e}$ 时经历一个切线分支，可按如下步骤证明：

a. 画出对角线和 $\mu<1/e$，$\mu=1/e$ 及 $\mu>1/e$ 时 E_μ 的图像.

b. 计算定理 9.5.2 假设中出现的偏导数.

c. 不动点是在 $\mu<1/e$ 还是 $\mu>1/e$ 时出现？

9.5.2　令 $f_\mu(x)=\mu x-x^3$，在 $\mu=-1$ 时会出现哪种分支？检验它的导数是否满足定理 9.5.2 或定理 9.5.4 的假设.

9.5.3　令 $f_\mu(x)=\mu+x^2$.

a. 找出此函数族经历切线分支的分支值和分支点，并检验定理 9.5.2 的假设.

b. 找出此函数族经历倍周期分支的分支值和分支点，并检验定理 9.5.4 的假设.

9.5.4　令 $g_a=ax(1-x)$（逻辑斯谛映射），利用计算机确定当 $a=3.5$，3.566，3.58，3.82，3.83 和 3.86 时 0.5 是否位于某条吸引的周期轨道的吸引域中或属于一个更复杂的集合. 提示：先迭代若干次（比如 200 次），但不要画在迭代图像上，然后画出后面的 256 次迭代，若同时还能把这些迭代值打印出来，则有助于通过比较迭代值，更加精确估计出周期轨道的周期；如果迭代图像被许多线段填充，其中这些线段或者充满整个空间或者不重复，则说明这条迭代轨道不收敛于周期汇而是趋向于一个更复杂的集合.

9.5.5　令 $b_0=3$，当 $k\geq 1$ 时令 $b_k=1+\sqrt{3+b_k}$，再令 $b_\infty=\lim_{k\to\infty}b_k$，已经证明 $b_k\approx a_k$ 且 $b_\infty\approx a_\infty$，其中 a_k 和 a_∞ 是逻辑斯谛族方程的分支值序列.

a. b_∞ 必满足哪个二次方程？b_∞ 为何值？

b. 证明 $\lim_{k\to\infty}c_k=1+\sqrt{17}$，其中

365

$$c_k=\frac{b_k-b_{k-1}}{b_{k+1}-b_k}.$$

9.6　共轭

9.6.1　令 $f_a(x)=1-ax^2$，$g_b(x)=y^2-b$，找出它们之间的共轭映射 $y=C_m(x)$，a 和 b 的哪些值相对应？提示：0 是两个映射的临界点，即 $f_a'(0)=0=g_b'(0)$，试找一个线性函数 $y=C_m(x)=mx$ 使得 $C_m(f_a(x))=g_b(C_m(x))$.

9.6.2　令 $f(x)=x^3$，$g(y)=\frac{1}{4}y^3+\frac{3}{2}y^2+3y$，试确定使 f，g 共轭的仿射映射 $y=C(x)=ax+b$. 提示：f 有不动点 -1，0 和 1，g 有不动点 -4，-2 和 0.

9.7　应用

9.7.1　考虑 Ricker 种群增长模型 $R(x)=axe^{-bx}$，其中 a 和 b 都是正数.

a. 找出 $a>1$，$b>0$ 时的不动点并确定其稳定性.

b. 当参数在某一范围内时，函数的第二个不动点 $x^*>0$ 是吸引的，证明它的吸引域是 $x>0$.

c. 证明当 $a>0$，$b>0$ 时函数的施瓦茨导数是负的.

9.7.2 考虑 $b=1$ 时的 Hassel 种群增长模型 $F(x)=\frac{rx}{1+ax}$，其中 $r>1$，$a>0$.

a. 证明它只有唯一正不动点 x^*.

b. 证明 x^* 的吸引域恰是所有正数集，即 $\mathcal{B}(x^*)=\{x:x>0\}$.

9.7.3 (Kaplan 和 Glass[**56**])下面是 Belair 和 Glass 提出的周期受激生物振子的数学模型：

$$f(\phi)=\begin{cases}6\phi-12\phi^2 & 0\leqslant\phi\leqslant 0.5\\ 12\phi^2-18\phi+7 & 0.5\leqslant\phi\leqslant 1.\end{cases}$$

a. 画出 $f(\phi)$ 的简图，注意要画出极大值点和极小值点，并计算出这些极值.

b. 找出不动点并确定其稳定性.

c. 利用 f 的图像找出 2-周期轨道，并分析它的稳定性.

9.7.4 考虑函数

$$f(x)=\frac{Rx}{1+\left(\frac{x}{\theta}\right)^n},$$

其中参数 $R>1$，$n\geqslant 2$，$\theta>1$，这是 Kaplan 和 Glass[**56**]给出的细胞核分裂率的模型.

a. 画出 f 在 $x\geqslant 0$，$R=2$，$n=3$，$\theta=5$ 的简图，注意要画出临界点，其中 $f'(x)=0$.

b. 确定不动点在 $x=0$ 处的稳定性.

c. 当 $R=2$ 时找出第二个不动点并确定其稳定性，答案一定依赖于 n.

9.7.5 考虑函数 $f(x)=bx^re^{-sx}$，b，r，$s>0$，与 9.7.3 节中血液模型的不动点相比较，如何分析此函数的不动点？

366

第 10 章　一维映射的迭路

第 9 章利用迭代图示法或代数法找周期点. 本章首先利用周期点的转换图证明各种周期轨道的存在性，接下来的几节利用类似的方法证明不变集上其他更为复杂的动力学性质的存在性. 10.2 节证明帐篷映射 T 与逻辑斯谛映射 G 任意接近于区间[0, 1]内各点的轨道的存在性. 用来寻找上述性质的轨道的工具被称为*符号动力学*(symbolic dynamics)，这是因为我们利用符号串来寻找以特定序运行于一系列区间的轨道. 这一方法也给出了证明映射 T 和映射 G 的周期点存在性的另一个途径. 事实上，10.3 节利用符号动力学证明了存在这样的周期点，它任意接近于[0, 1]内的各点.

10.4 节利用符号动力学证明几个这样的映射有一种称为对初始值的敏感依赖性的性质。这一性质是研究通常所说的混沌动力学的关键，在第 11 章中会具体讨论后一个话题.

10.5 节将符号动力学用于不变集，这些不变集有很多点，但又有很多间隙，这些集被称为康托尔集. 10.6 节将这一方法用于研究只容许某些符号串的映射，称其为子位移.

所有这些部分都涉及寻找不变集的某些结构，这些结构较周期轨更为复杂，过去常将这方面称为“寻找混沌之序”.

10.1　周期点的转换图方法

我们已找到多种映射的周期点. 对直线上的映射而言，对只能作为周期出现的周期之集有些限制条件，一般结果是 Sharkovskii 定理[**95**]，这将在 10.1.1 节中给出. 该定理的一种特例是由 J. Yorke 和 T. Y. Li [**66**] 证明的，并引入了“混沌”一词. 但具有讽刺意味的是，A. N. Sharkovskii 所发表的更一般的论文比这一特例早 11 年，而 Li 和 Yorke 的论文发表在美国一份发行量不大的杂志上. 虽然如此，但仍产生了重要的影响，因为它不但使 Sharkovskii 的结果为世人所知，而且大大地推动了寻找应用中确定性系统混沌行为的研究.

本节还将介绍符号动力学的一些知识. 我们证明具有一给定迭路(itinerary)的轨道的存在性，所谓某轨道的迭路即该轨道一定通过的一列区间，每个区间用一个符号表示. 对任意的容许符号串(例如，对任意的容许区间串)，存在以预定方式通过这些区间的轨道. 本节利用这一方法得到周期轨. 后面几节利用这种方法去求稠密地绕过区间的非周期轨. 总之，符号动力学的内容在本节及 10.3 节和 10.5 节中都有介绍.

第一个结果是关于不动点存在性的基本引理，基于基本引理可得下面的一般性结论：部分(a)证明不动点的存在性，部分(b)用于归纳式证明周期点的存在性.

引理 10.1.1　*设 f 是从闭区间 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个连续函数. 若 $f([a, b]) \supset [a, b]$，则 (a) f 在 $[a, b]$ 内有不动点. 而且，(b) 存在子区间 $\boldsymbol{J} = [a_1, b_1] \subset [a, b]$ 使得 $f(\boldsymbol{J}) = [a, b]$，并且端点映射到端点，即 $\{f(a_1), f(b_1)\} = \{a, b\}$ (即 (i) $f(a_1) = a$，$f(b_1) = b$，或 (ii) $f(a_1) = b$ 且 $f(b_1) = a$).*

证明　因为$f([a,\ b])\supset[a,\ b]$，则存在 a_0 和 b_0 使得$f(a_0)=a$，$f(b_0)=b$. 具体地说，如图 10.1.1所示，设 $b_0<a_0$，则令 $b_1\geqslant b_0$ 是满足 $x<a_0$ 和$f(b_1)=b$ 的最大的数，因此$f(x)<b(b_1<x\leqslant a_0)$，然后设 $a_1\leqslant a_0$ 是满足 $x>b_1$ 和$f(a_1)=a$ 的最小的数，所以，$a<f(x)<b(b_1<x\leqslant a)$. 由中值定理可知，$f([b_1,\ a_1])$ 必取遍 a 和 b 之间的所有值，即$f([b_1,\ a_1])=[a,\ b]$. 设 $g(x)=f(x)-x$，由 $f(a_1)=a\leqslant a_1$ 可知 $g(a_1)\leqslant 0$，同时由 $f(b_1)=b\geqslant b_1$ 可知 $g(b_1)\geqslant 0$. 对 g 再次使用中值定理可知存在 x^* 使得 $g(x^*)=0$，所以$f(x^*)=x^*$，证毕. ■

368

图 10.1.1　引理 10.1.1 的子区间

以下试图利用上面的引理求周期点. 通常先从有限多个区间开始，而后确定每次迭代轨道所在的区间(即确定迭路). 转换图给出了供选的容许区间序列. 在给出一般定义之前先给出三个例子.

例 10.1.2　设 $G(x)=4x(1-x)$是逻辑斯谛映射，参数取为4. 令 $\boldsymbol{I}_L=[0,\ 0.5]$和 $\boldsymbol{I}_R=[0.5,\ 1]$表示左子区间和右子区间，则

$$G(\boldsymbol{I}_L)=[0,1]=\boldsymbol{I}_L\cup\boldsymbol{I}_R,$$
$$G(\boldsymbol{I}_R)=[0,1]=\boldsymbol{I}_L\cup\boldsymbol{I}_R.$$

由于每一个区间都覆盖这两个区间，可做一个图，它有两个顶点(分别用 L 和 R 表示)和从一个顶点到其自身或到另一顶点的有向边. 参见图 10.1.2. 定理 10.1.8 证明了这一转换图暗示着 G 有所有周期的周期点. ■

例 10.1.3　设f如图 10.1.3 所示，其中三个子区间用 $\boldsymbol{I}_L$，$\boldsymbol{I}_C$ 和 $\boldsymbol{I}_R$ 表示，则

$$f(\boldsymbol{I}_L)\supset\boldsymbol{I}_R,$$
$$f(\boldsymbol{I}_C)\supset\boldsymbol{I}_C\cup\boldsymbol{I}_L$$

和

$$f(\boldsymbol{I}_R)\supset\boldsymbol{I}_L.$$

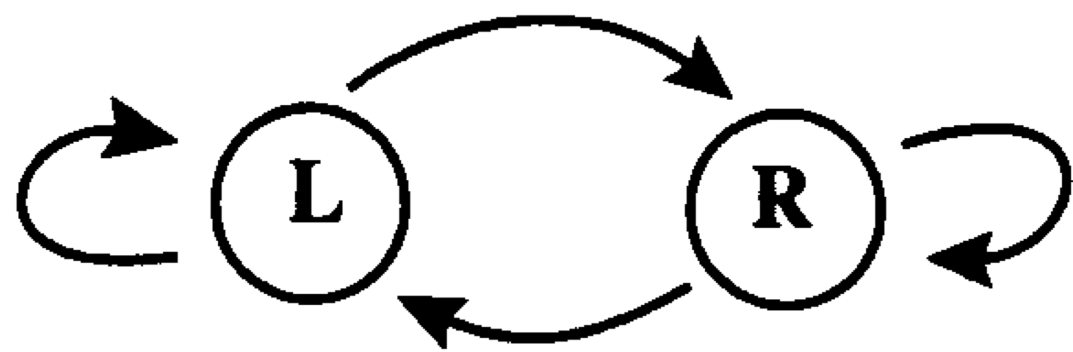


图 10.1.2　例 10.1.2 的转换图

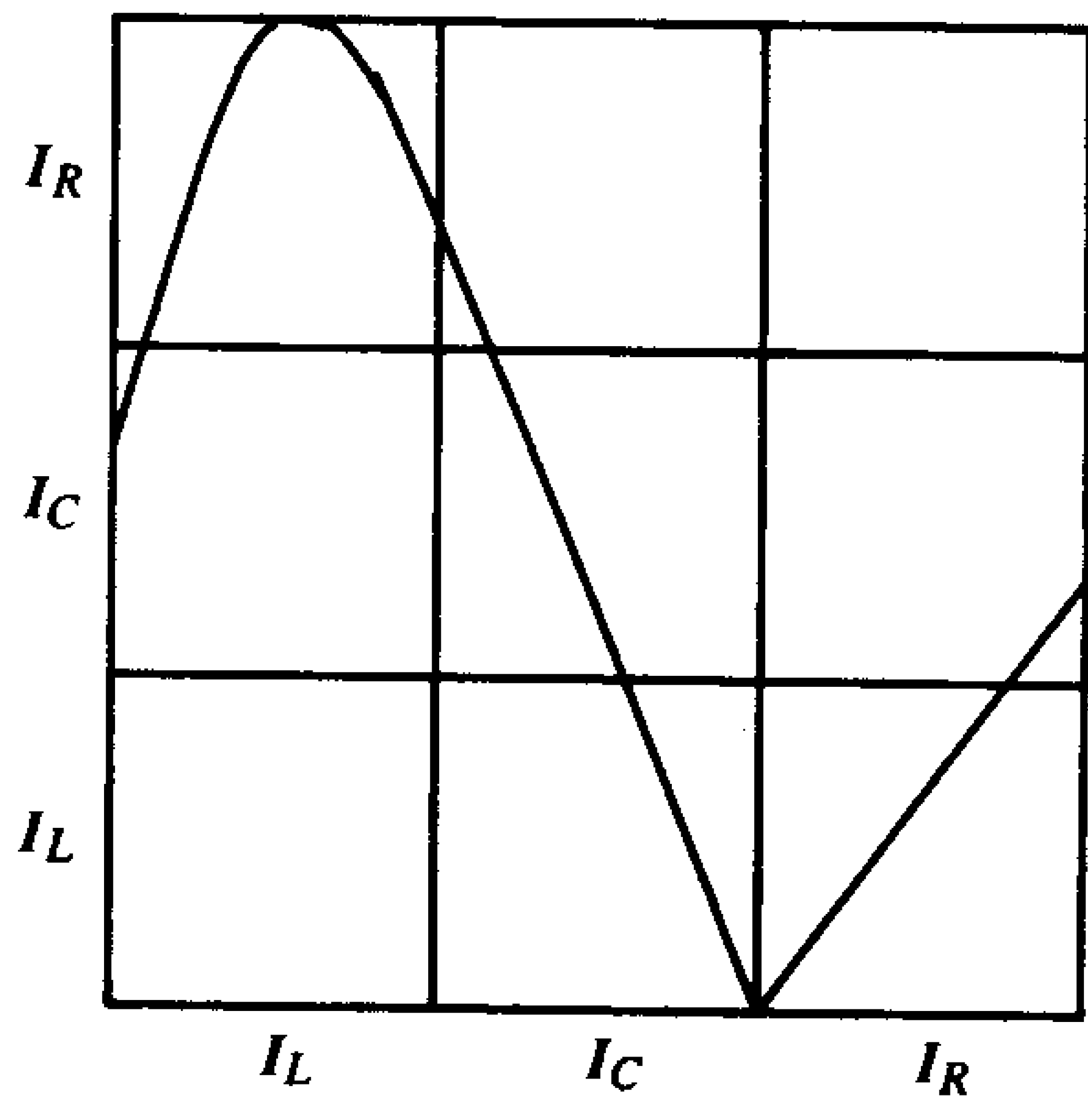


图 10.1.3　例 10.1.3 的函数图

因此，转换图有从 L 到 R，从 C 到 C，从 C 到 L 和从 R 到 L 的方向，参见图 10.1.4. 由引理 10.1.1 可知，区间 $\boldsymbol{I}_C$ 内存在一个不动点. 又由下面的定理 10.1.8 可知，有交替经过区间 $\boldsymbol{I}_L$ 和 $\boldsymbol{I}_R$ 的 2-周期轨道. ■

369

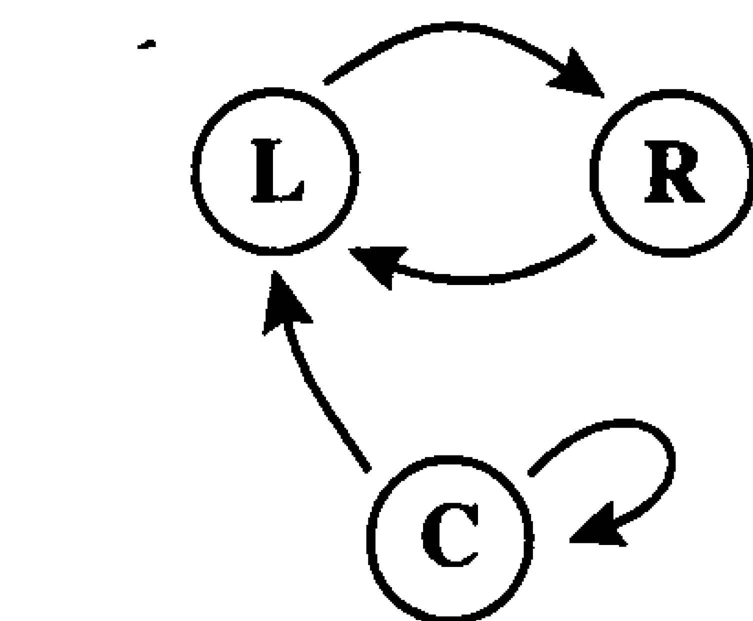


图 10.1.4　例 10.1.3 的转换图

例 10.1.4　当 $a=3.839$ 时，逻辑斯谛映射 $g_a(x)=ax(1-x)$ 有两条 3-周期轨道. 以 $x_0\approx0.1498$，$x_1\approx0.4891$，$x_2\approx0.9593$ 为点的轨道是吸引的，而以 $y_0\approx0.1690$，$y_1\approx0.5392$，$y_2\approx0.9538$ 为点的轨道是排斥的. 令 $g(x)=g_{3.839}(x)$，令 $\boldsymbol{I}_L=[x_0,\ x_1]$ 和 $\boldsymbol{I}_R=[x_1,\ x_2]$ 为端点在 3-周期轨道上的区间，由端点的迭代可得

$$g(\boldsymbol{I}_L)\supset[x_1,x_2]=\boldsymbol{I}_R$$

和

$$g(\boldsymbol{I}_R)\supset[x_0,x_2]=\boldsymbol{I}_R\cup\boldsymbol{I}_L.$$

做一个图，其顶点用 L 和 R 表示. 若 $g(\boldsymbol{I}_i)\supset\boldsymbol{I}_k$，就画一个从符号 i 到 k 的箭头，将它们连接起来，那么从 L 到 R，从 R 到 R 和从 R 到 L 都存在一个箭头，参见图 10.1.5，在叙述定理 10.1.8 的内容后我们证明这一转换图暗示着 g 有所有周期的周期点. ■

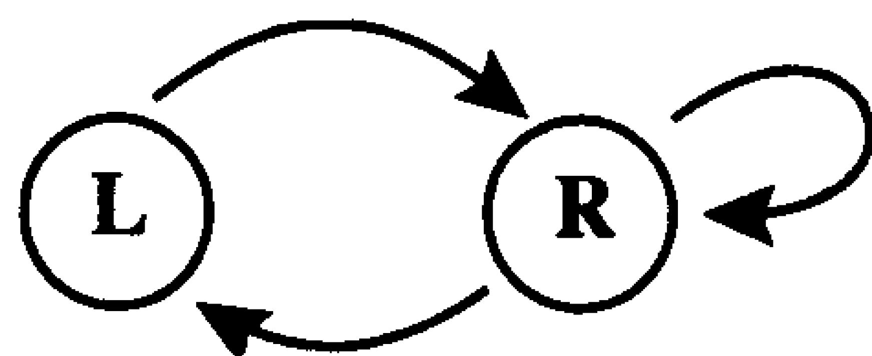


图 10.1.5　例 10.1.4 的转换图

下面的定义可应用于像前面两个例子那样的情况. 因为区间数是一任意数 N，这里用从 1 到 N 的数字而非 L、C 和 R 这些字母作符号(有时也用从 0 到 $N-1$ 的数字作符号).

定义 10.1.5　设 f 是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的连续函数. 基于该函数的特点,选择有限闭且有界的区间集 $\boldsymbol{I}_1=[a_1,b_1],\cdots,\boldsymbol{I}_N=[a_N,b_N]$,且其相应的开区间是不相交的,即对任意 $i\neq j$ 都有 $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$. 因为开区间 (a_i,b_i) 为闭区间 $\boldsymbol{I}_i$ 的内部,故常用 $\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_i)$ 表示. 做一个图,其顶点用 $\{1,\cdots,N\}$ 表示,当且仅当 $f(\boldsymbol{I}_i)\supset\boldsymbol{I}_k$ 时,用箭头(有向边)将符号 i 和 k 连接起来. 这一含有顶点并用箭头把顶点连接起来的图被称为所给函数和区间的转换图(transition graph).

注 10.1.6　这里由顶点和连接顶点的有向边所组成的图是从图论的角度来说的，并不是以前所说诸如 $y=x^2$ 的图.

370

定义 10.1.7　设函数 f 和有界闭区间 $\boldsymbol{I}_1=[a_1,\ b_1]$，$\cdots$，$\boldsymbol{I}_N=[a_N,\ b_N]$ 与定义 10.1.5 中的相同. 用这些区间做一区间串，其中某一给定区间可能多次用到，用 $\boldsymbol{I}_s$ 表示给定的区间，其下标用 s 来表示，则 s 选自 $\{1,\ \cdots,\ N\}$. 因此，称转换图的顶点集 $\{1,\ \cdots,\ N\}$ 为符号集(set of symbols)，其中的元素被称为符号(symbol). 对给定的符号串 $s_0\cdots s_n$，我们要寻找一点 x 使得 $f^j(x)\in\boldsymbol{I}_{s_j}$，$0\leqslant j\leqslant n$. 称满足 $f(\boldsymbol{I}_{s_{j-1}})\supset\boldsymbol{I}_{s_j}$，$1\leqslant j\leqslant n$ 的符号串 $s_0\cdots s_n$，$s_j\in\{1,\ \cdots,\ N\}$，为容许符号串(allowable string of symbol). 由转换图的定义可知，符号串 $s_0\cdots s_n$ 是容许的当且仅当转换图中有一始于各顶点 s_j 沿着有向箭头且按预定顺序运动的道路. 当 $s_n=s_0$ 时，称该容许符号串 $s_0\cdots s_n$ 为周期的(periodic). 假设 $n=mp$，$p>1$ 且符号串 $s_0\cdots s_{n-1}$ 正好是由符号串 $s_0\cdots s_{m-1}$ 重复 p 次得到的，即 $s_0\cdots s_n=s_0\cdots s_{m-1}\cdots s_0\cdots s_{m-1}s_n$，则该容许周期符号串 $s_0\cdots s_n$ 称为可约的(reducible). 满足 $s_0=s_n$ 的非可约容许周期串 $s_0\cdots s_n$ 称为不可约的(irreducible)，并且称 n 为最

小周期.

下面的定理表明对任意容许符号串 $s_0\cdots s_n$，都存在一点 x 使得当 $0\leqslant j\leqslant n$ 时 $f^j(x)$ 位于区间 $\boldsymbol{I}_{s_j}$ 中. 在叙述时常用 $f^{-j}(\boldsymbol{I}_{s_j})$ 表示集合 $\{x: f^j(x)\in \boldsymbol{I}_{s_j}\}$.

定理 10.1.8　设 $\boldsymbol{I}_1=[a_1,b_1],\cdots,\boldsymbol{I}_N=[a_N,b_N]$ 是满足 $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing, i\neq j$ 的有限个闭的且有界的区间. 令 $s_0\cdots s_n$ 是一个容许符号串,因此每一个 j 是符号集 $\{1,\cdots,N\}$ 中的元素且在转换图中有从 s_{j-1} 到 s_j 的有向边,其中 $1\leqslant j\leqslant n$.

(a) 令

$$\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_n}=\{x: f^j(x)\in \boldsymbol{I}_{s_j}, \text{对 } 0\leqslant j\leqslant n\}$$
$$=\bigcap_{0\leqslant j\leqslant n} f^{-j}(\boldsymbol{I}_{s_j}).$$

则 $\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_n}\neq\varnothing$.

(b) 存在一点 x^* 使得 $f^j(x^*)\in \boldsymbol{I}_{s_j}$，$0\leqslant j\leqslant n$.

(c) 若符号串 $s_0\cdots s_n$ 是满足 $s_0=s_n$ 的周期串，则可选(b)中的点 x^* 使得 $f^n(x^*)=x^*$，那么 x^* 的周期必被 n 整除.

(d) 设符号串 $s_0\cdots s_n$ 是周期的，且 n 是该符号串的最小周期(即该符号串是不可约的)，若点 x^* 位于开区间 $\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_{s_0})$ 内，则 x^* 有最小周期 n.

注 10.1.9　(d)中 x^* 位于开区间 $\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_{s_0})$ 内的假设一般是满足的，原因是位于端点的任意周期点的周期都不可能被 n 整除.

证明　(a) 令 $\boldsymbol{J}_n=\boldsymbol{I}_{s_n}$，由引理 10.1.1(b) 可知在 $\boldsymbol{I}_{s_{n-1}}$ 内存在子区间 $\boldsymbol{J}_{n-1}$ 使得 $f(\boldsymbol{J}_{n-1})=\boldsymbol{J}_n=\boldsymbol{I}_{s_n}$；利用归纳可知在 $\boldsymbol{I}_{s_{n-j}}$ 内含有一子区间 $\boldsymbol{J}_{n-j}$ 使得 $f(\boldsymbol{J}_{n-j})=\boldsymbol{J}_{n-j+1}$，$j=1,\cdots,n$；取区间 $\boldsymbol{J}_0$，利用归纳法可得

$$f^j(\boldsymbol{J}_0)=\boldsymbol{J}_j\subset \boldsymbol{I}_{s_j}$$

和

$$f^n(\boldsymbol{J}_0)=\boldsymbol{I}_{s_n}.$$

从其构造可知，子区间 $\boldsymbol{J}_0$ 是非空的且 $\boldsymbol{J}_0\subset \boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_n}$，即(a)得证.

(b) 由(a)可知区间 $\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_n}$ 是非空的且其内的任意点都满足(b)的条件.

(c) 如(a)那样构造 $\boldsymbol{J}_0\subset \boldsymbol{I}_{s_0}$ 使得 $f^n(\boldsymbol{J}_0)=\boldsymbol{I}_{s_n}=\boldsymbol{I}_{s_0}\supset \boldsymbol{J}_0$. 对 f^n 应用引理 10.1.1(a) 可知存在 $x^*\in \boldsymbol{J}_0$ 使得 $f^n(x^*)=x^*$. 区间 $\boldsymbol{J}_0$ 的其他性质由其构造可得.

371

(d) 因为具有较低周期的区间并不重复且 x^* 并不是端点，所以 x^* 的周期必为 n. ■

注 10.1.10　在列举周期轨的符号串时，往往写出符号的无穷序列而不是定理中所用的有限符号序列. 在上面的定理中，如 $s_0s_1s_2s_3=RRLR$ 的符号串与 3-周期点相对应. 在高阶迭代下，其轨道继续经过同样的区间串. 因此，可用无穷符号序列表示周期点，并称之为该点的迭路. 对上面的例子我们记

$$s_0s_1\cdots=(RRL)^\infty=RRLRRLRRLRRL\cdots,$$

因为 $f^j(x_0)\subset \boldsymbol{I}_{s_j}$，$j\geqslant 0$，也称有限符号串 RRL 为字串(word)或串(string). 为了使无穷序列 $\boldsymbol{w}^\infty$ 是容许的，$\boldsymbol{w}$ 内的第一个符号必须紧接 $\boldsymbol{w}$ 的最后一个符号，其中 $\boldsymbol{w}$ 为有限符号串. 因此，对

于串 $w=RRL$，为了使 w^{∞} 是容许序列，重要的是第一个符号 R 能紧接最后一个符号 L. 在 10.3 节中，无穷符号序列(一个迭路)可用于表示周期点，也可用于表示非周期点，所以此处开始用这一符号.

我们可将前面的定理应用于有 3-周期点的函数中以得到下面由 T. Li 和 J. Yorke 得到的结果.

命题 10.1.11(Li 和 Yorke) *设 f 是从 $\mathbb{R}$ 到其自身的连续函数.*

(a)若 f 有 3-周期点，则它有所有周期的周期点.

(b)设存在一点 x_0 使得(i)$f^3(x_0)\leqslant x_0<f(x_0)<f^2(x_0)$ 或(ii)$f^3(x_0)\geqslant x_0>f(x_0)>f^2(x_0)$，则 f 有所有周期的周期点.

证明 (a)根据直线上的顺序，令 x_1 为轨道上位于其他两点之间的点，则 $f(x_1)$ 必为轨道左侧或右侧的点. 设它是轨道右侧的点，即 $f(x_1)=x_2>x_1$.（另一种情况可利用类似的方法通过直线上相反的顺序得到.）则 $f(x_2)$ 必为轨道左侧的第三个点，$f(x_2)=x_0<x_1$，$f(x_0)=x_1$. 周期为 3 的函数图参见图 10.1.6.

令 $\boldsymbol{I}_L=[x_0, x_1]$ 为左区间，$\boldsymbol{I}_R=[x_1, x_2]$ 为右区间，由端点的迭代可得

$$f(\boldsymbol{I}_L)\supset[x_1,x_2]=\boldsymbol{I}_R$$

和

$$f(\boldsymbol{I}_R)\supset[x_0,x_2]=\boldsymbol{I}_R\cup\boldsymbol{I}_L.$$

图 10.1.5 给出了 $\boldsymbol{I}_L=[x_0, x_1]$ 和 $\boldsymbol{I}_R=[x_1, x_2]$ 的转换图，表 10.1.1 给出了与所给周期的周期点相对应的符号序列. 因为区间边界上的点的周期都为3，所以定理 10.1.8 中给出的点必有表中所标的周期. 因为所有周期已在表中列出，所以该函数必有所有周期的周期点.

结论(b)的证明同上.

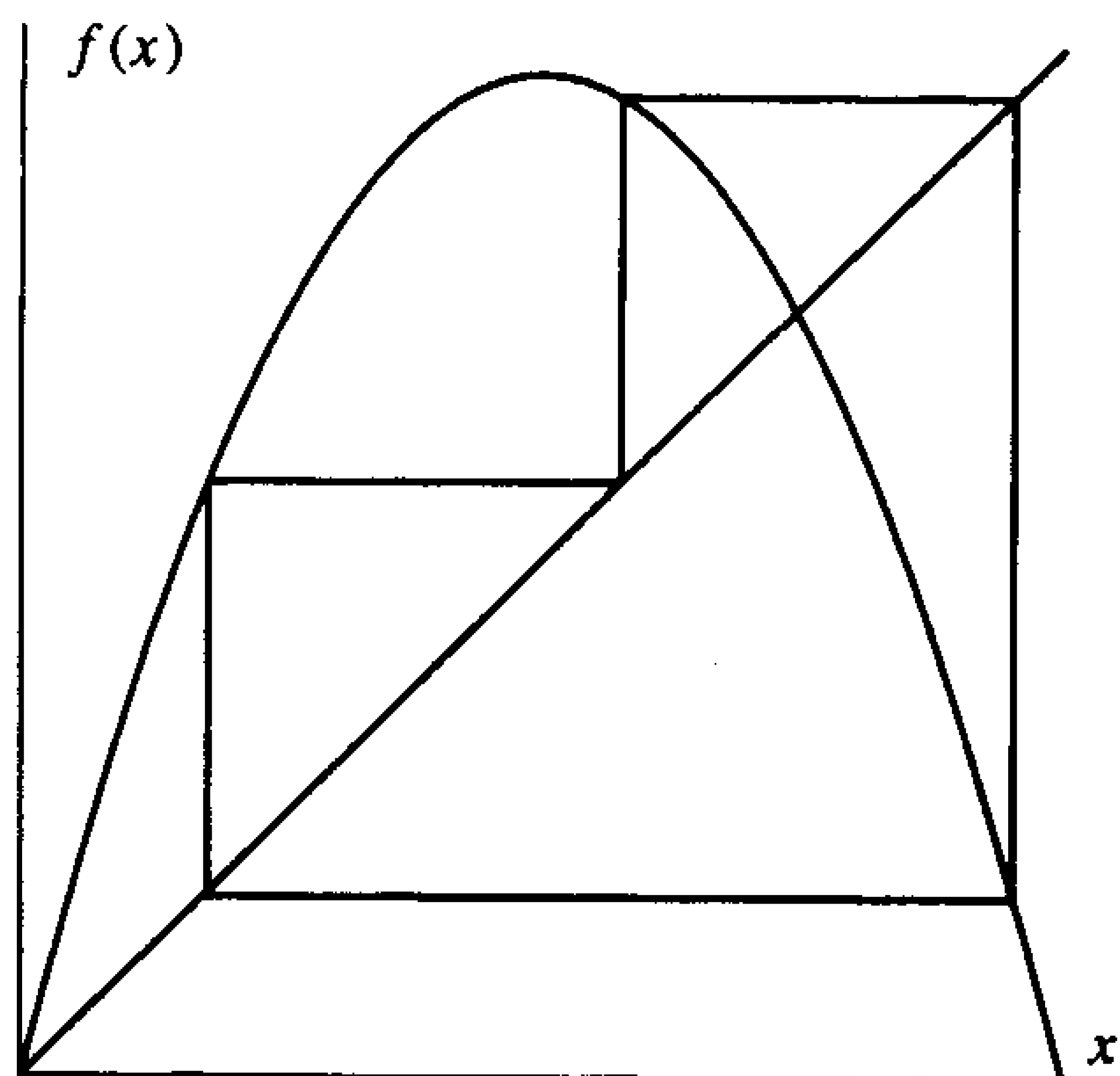


图 10.1.6 利用阶梯图表示的 3-周期轨道图

表 10.1.1 有 3-周期点的函数的周期符号序列

n	符号序列
1	R^{∞}
2	$(RL)^{\infty}$
3	$(RRL)^{\infty}$
n	$(R^{n-1}L)^{\infty}$

■

Sharkovskii 定理

给出 Sharkovskii 定理之前必须先定义正整数的特殊排序. 这里只给出证明的主要思路，其中包括对定理 10.1.8 的巧妙运用. 全部证明过程请参阅[**87**].

先看一下由哪些周期可得到其他周期．对函数f，令

$$\mathcal{P}(f) = \{k : f\text{有 }k\text{-周期点}\}.$$

因此，我们已经证明对连续函数而言，若$3 \in \mathcal{P}(f)$，则$\mathcal{P}(f)$是所有正整数集.

定义 10.1.12　我们要引入正整数的一种排序，它们都可能是周期，称为 Sharkovskii 排序 (Sharkovskii ordering). 符号 $m \triangleright n$ 表示若存在 m-周期点则必存在 n-周期点，因此对任意正整数 n 有 $3 \triangleright n$. 正确的排序如下所示，令$\mathcal{J}$为大于 1 的所有奇数. 这些奇整数$\mathcal{J}$以 Sharkovskii 排序列出，与其在直线上的出现顺序相反：

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \cdots.$$

接下来，将所有奇数乘以 2 所得整数添加到列表中，然后将所有奇数乘以 2^2 也添加到列表中，依此逐次增加的 2 的幂，乘以所有奇数，并添加到列表中，即

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots$$
$$\triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright 2^k \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^{k+1} \cdot 3 \triangleright 2^{k+1} \cdot 5 \triangleright 2^{k+1} \cdot 7 \triangleright \cdots.$$

最后，2 的所有幂都按递减顺序添加到列表中：

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright 2^k \cdot 7 \triangleright \cdots$$
$$\cdots \triangleright 2^{k+1} \triangleright 2^k \triangleright 2^{k-1} \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

372
≀
373

这样将所有的正整数列举出来，下面的定理表明：若 $n \in \mathcal{P}(f)$ 且 $n \triangleright k$，则 $k \in \mathcal{P}(f)$.

定理 10.1.13(Sharkovskii)　令f是从$\mathbb{R}$ 到其自身的连续函数. 设f有一个 n-周期点且 $n \triangleright k$，则f有一个 k-周期点，因此，若 $n \in \mathcal{P}(f)$ 且 $n \triangleright k$，则 $k \in \mathcal{P}(f)$.

这里不证明该一般性定理，只给出几种特例.

在 Sharkovskii 的最初证明后，还有很多其他证明(例如 Block、Guckenheimer、Misiurewicz 和 Young[**17**]的证明)，其证明思路是：若有以奇数 n 为周期的点，则可能存在另外一个 n-周期点，其在实轴上的排序非常简单，称这些周期点为 Stefan 环(Stefan cycle).

定义 10.1.14　一个 Stefan 环是以奇数 n 为周期的轨道，其迭代 $x_j = f^j(x_0)$ 在直线上的顺序满足

$$x_{n-1} < \cdots < x_4 < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < \cdots < x_{n-2},$$

或正好为反序

$$x_{n-2} < \cdots < x_3 < x_1 < x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{n-1}.$$

3-周期轨道总是 Stefan 环. 下面的例子考虑的是 7-周期情形.

例 10.1.15　设f是从$\mathbb{R}$ 到它自身的连续函数且有 7-周期 Stefan 环. 令 $x_j = f^j(x_0)$，则

$$x_6 < x_4 < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < x_5,$$

且 $x_7 = x_0$. 令 $\boldsymbol{I}_1 = [x_0, x_1]$，$\boldsymbol{I}_2 = [x_2, x_0]$，$\boldsymbol{I}_3 = [x_1, x_3]$，$\boldsymbol{I}_4 = [x_4, x_2]$，$\boldsymbol{I}_5 = [x_3, x_5]$和$\boldsymbol{I}_6 = [x_6, x_4]$. 则

$$f(\boldsymbol{I}_1) \supset \boldsymbol{I}_1 \cup \boldsymbol{I}_2,$$
$$f(\boldsymbol{I}_2) \supset \boldsymbol{I}_3,$$
$$f(\boldsymbol{I}_3) \supset \boldsymbol{I}_4,$$

$$f(\boldsymbol{I}_4) \supset \boldsymbol{I}_5,$$
$$f(\boldsymbol{I}_5) \supset \boldsymbol{I}_6$$

和

$$f(\boldsymbol{I}_6) \supset \boldsymbol{I}_1 \cup \boldsymbol{I}_3 \cup \boldsymbol{I}_5.$$

具有上述性质的一个可能函数f的曲线图及其转换图参见图10.1.7和图10.1.8.

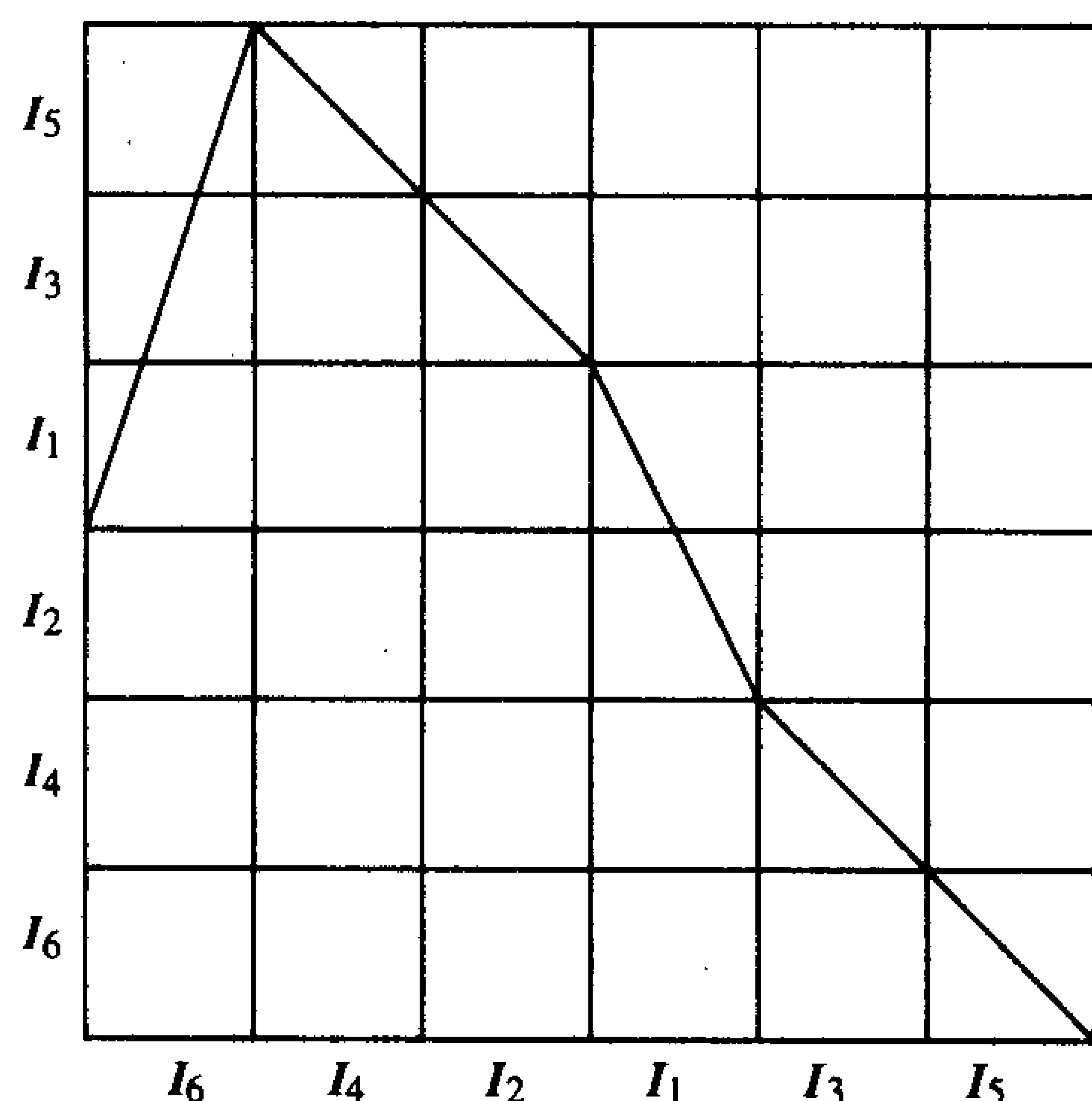


图10.1.7　例10.1.15：函数f的曲线图

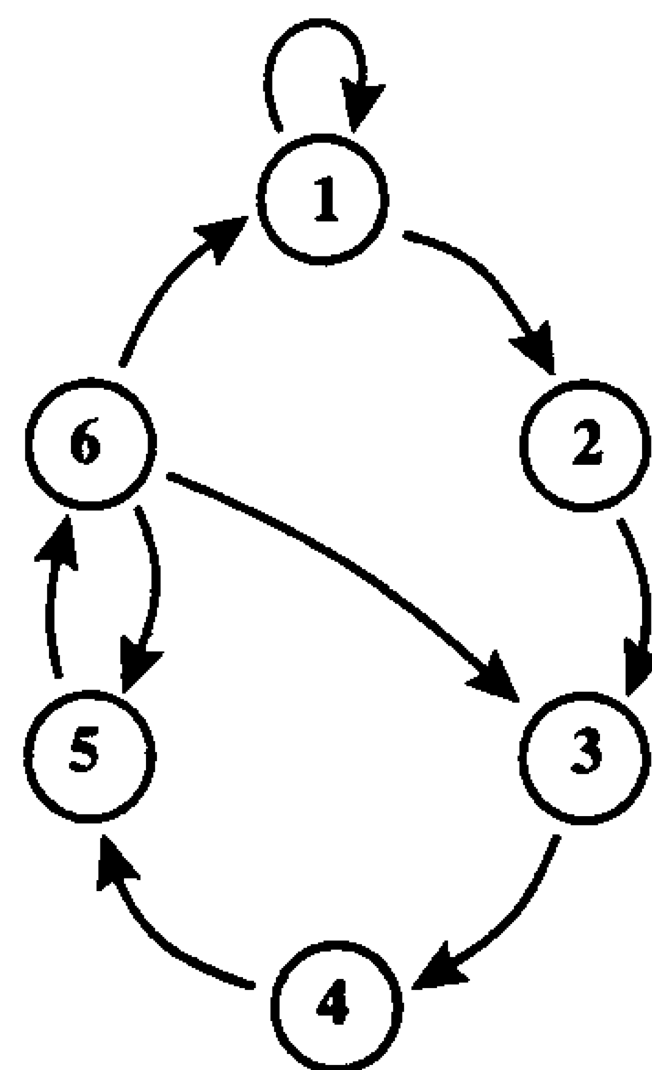


图10.1.8　例10.1.15：函数f的转换图

表10.1.2给出了各种可能的周期符号序列，特别是它表明了$\mathcal{P}(f)$除了可能不包含3和5之外，其必包含其他所有正整数. 事实上，若f是x_i的线性函数，则$\mathcal{P}(f)=\{k: 7 \rhd k\}=\{k: k\neq 3, 5\}$.

表10.1.2　例10.1.15中函数f 7-周期Stefan环的周期符号

n	符号序列	周期是否存在
1	1^∞	是
2	$(56)^\infty$	是
3	无	否
4	$(3\,456)^\infty$	是
5	无	否
6	$(123\,456)^\infty$	是
n	$(1^{n-5}23\,456)^\infty$	是

■

Stefan环注重奇数周期点部分的证明，另一部分的证明需考虑不动点和以2的幂为周期的点. 下面命题证明的是基于Barton和Burns的文章[**12**]. (部分(a)的证明在其论文发表前就已为世人所熟知.)

命题10.1.16　令f是$\mathbb{R}$上的一个连续函数.

(a)若f有任意周期的周期点，则f有不动点.

(b)若f有一个非不动点的周期点，则f有2-周期点.

(c) 若 f 有 2^n-周期点，则对任意 $0\leqslant k\leqslant n$，f 有 2^k-周期点.

我们将在本章末的 10.8 节中给出证明，同时也对这一主要定理证明的其他一些方面进行了进一步探讨.

下面的例题告诉我们如何利用有其他周期的函数来构造具有特定周期的函数.

例 10.1.17(倍周期)　这个例子要说明如何把一个从[0，1]到其自身的函数 f 构造为[0，1]上的新函数 g 使得

374～375

$$\mathcal{P}(g) = \{1\} \cup 2\,\mathcal{P}(f) \tag{10.1.1}$$

(即 g 有一不动点且其周期点的周期均为 f 的周期点的周期的两倍).

对于函数 f，则

$$\frac{1}{3}f(3x)$$

形似于函数 f，但只有函数 f 的三分之一大．定义函数 g：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}f(3x) & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3} \\ [2+f(1)]\left(\dfrac{2}{3} - x\right) & \dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{3}. \\ x - \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

参见图 10.1.9.

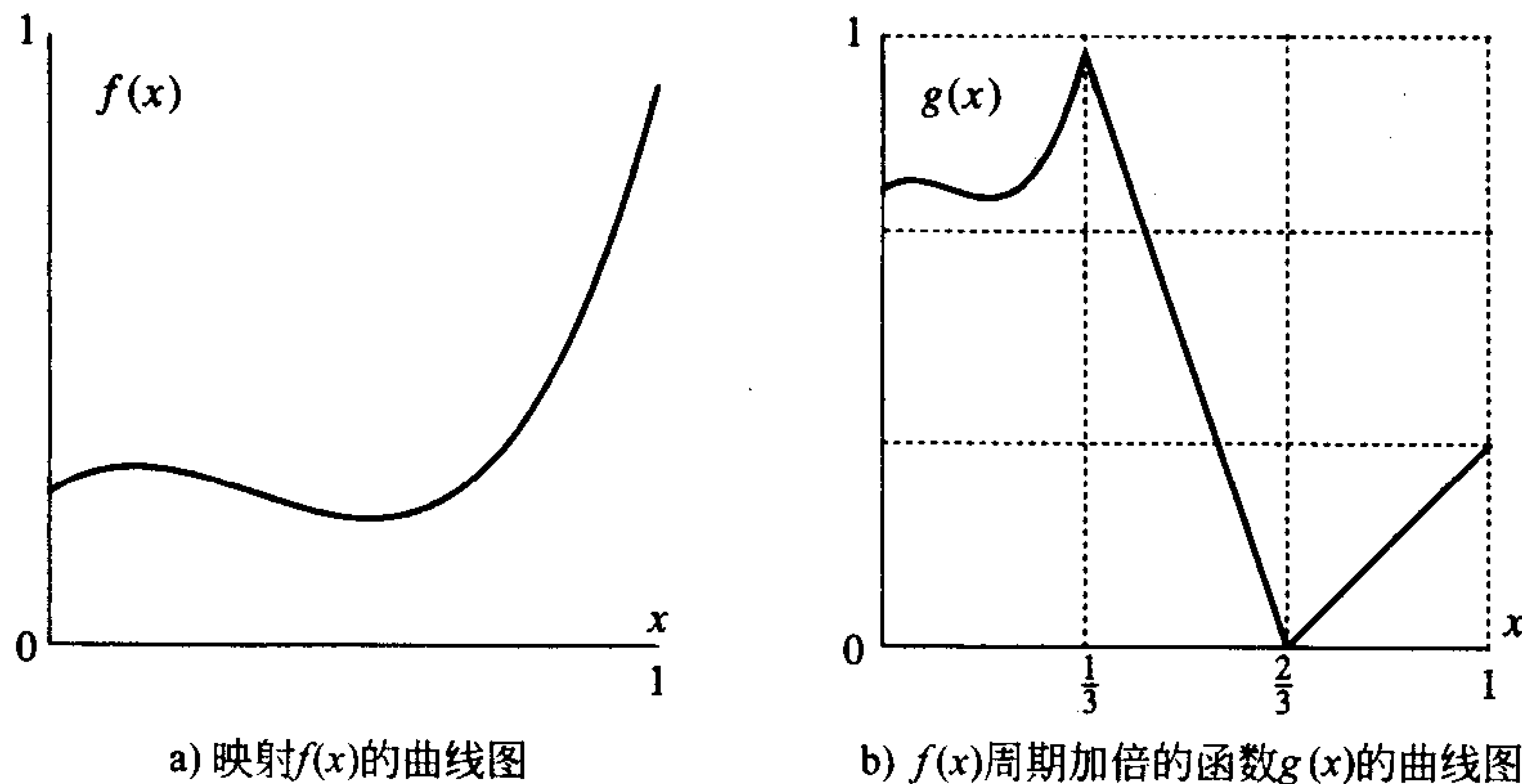


图　10.1.9

g 是区间[1/3，2/3]到自身的一个映射，所以 g 在[1/3，2/3]内有不动点．没有其他区间映到[1/3，2/3]，所以这一区间内没有其他周期点.

在函数 g 下两区间[0，1/3]和[2/3，1]可交换，即

$$g([0,1/3]) \subset [2/3,1]$$

和

$$g([2/3,1]) = [0,1/3],$$

376

所以这两个区间内的所有周期点的周期必为 2 的倍数．在[0，1/3]上，

$$g^2(x) = g\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}f(3x)\right)$$
$$= \frac{1}{3}f(3x),$$

只是 f 的小尺度再现（复制品），因此，g^2 在[0，1/3]上的周期与函数 f 的周期相同．这同样适用于 g^2 在区间[2/3，1]上的情形．所以 g 从[0，1/3]或[2/3，1]上出发的点的周期正好都是函数 f 的周期的两倍．这就完成了函数 g 的周期的证明．■

10.2　拓扑传递性

本节开始考虑一类映射，它有接近于区间中任一点的轨道．下一节利用符号动力系统证明该性质．为准确起见，在这一节中给出集合中稠密子集的定义．因为我们总是考虑点集到其自身的映射，故下面先给出不变集的定义．若一个映射在不变集上有稠密轨，则称该映射是拓扑传递的．所用例子是一个在区间上为拓扑传递的双倍映射，将利用二进制数来证明双倍映射的拓扑传递性．

稠密集

定义 10.2.1　*集合 $A\subset[a, b]$ 在闭区间 $[a, b]$ 内是稠密的(dense)是指在 $[a, b]$ 内每一点 z 的任意邻域内都有 A 中某点，换言之，对 $[a, b]$ 内的每一点 z 和任意的 $\varepsilon>0$ 都有*

$$(z-\varepsilon, z+\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$$

(即 $(z-\varepsilon,\ z+\varepsilon)$ 包含 A 中的一点)．

例 10.2.2　令$\mathbb{Q}$是一有理数集，$\mathbb{Q}^c=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$是无理数集，则$\mathbb{Q}\cap[0,1]$和$\mathbb{Q}^c\cap[0,1]$在[0,1]内是稠密的，也就是说，存在任意接近于任何数的有理数和无理数．

为证明有理数在[0，1]内是稠密的，取任意数 x 的十进制展开：

$$x = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_j}{10^j},$$

其中，每个 d_j 是集合{0，1，…，9}中的元素．对任意有限的 n，截断展开

$$x_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{10^j}$$

是有理数，而且在 x 的 10^{-n} 邻域内．这就证明有理数是稠密的．

也可证明无理数是稠密的，只要证明任意数 x 可由 $\sqrt{2}p/q$ 逼近，其中 p 和 q 都是整数．■

例 10.2.3　考虑集合

377

$$S=\left\{\frac{p}{2^{100}}: 0\leqslant p\leqslant 2^{100}\text{ 为整数}\right\}.$$

该集合与[0，1]内任一点的距离都小于 2^{-101}，但该距离并不是任意小．特别地，集合 S 并不与整个开区间 $(0,\ 2^{-100})$ 相交，因此该集合在区间[0，1]内不是稠密的．■

二进制展开

[0，1]内的任一点 x 可表示为二进制展开(binary expansion)：

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j},$$

其中，每个 a_j 为 0 或 1. 如同十进制展开，一些数有两个二进制展式：以 1 的无穷串结束的二进制展式所表示的数等于把该串前面的 0 换为 1 而串中所有的 1 换为 0 的数，即

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}.$$

例如，

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}\right) = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}.$$

若先从一重复的二进制展式开始，则可得到它所代表的数，例如

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

若从[0, 1]内的数 x 开始考虑，则可按下法求其二进制展式：2 乘以 x 并令 a_1 为 $2x$ 的整数部分，f_1 为其分数部分，即 $2x = a_1 + f_1$；再用 2 乘以 f_1 并令 a_2 为 $2f_1$ 的整数部分，f_2 为其分数部分，即 $2f_1 = a_2 + f_2$；利用归纳法可以得到 a_j 和 f_j. 考虑 4/7 的情形：

$2 \cdot 4/7 = 8/7 = 1 + 1/7$,　　$a_1 = 1$ 和 $f_1 = 1/7$,

$2 \cdot 1/7 = 0 + 2/7$,　　$a_2 = 0$ 和 $f_2 = 2/7$,

$2 \cdot 2/7 = 0 + 4/7$,　　$a_3 = 0$ 和 $f_3 = 4/7$,

$2 \cdot 4/7 = 8/7 = 1 + 1/7$,　　$a_4 = 1$ 和 $f_4 = 1/7$,　　378

而且 $a_{1+3j} = 1$ 和 $a_{2+3j} = a_{3j} = 0$ 会重复出现，因此

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4}{7}.$$

三进制展开

同理可知，[0, 1]内的任意数 x 可表示为三进制展开(ternary expansion)：

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j},$$

其中，每个 a_j 是0，1或2. 以2的无穷串结束的三进制展式与将该串前面一项加1并用0代替该串中所有的2所得的三进制展式相同，即

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_j}{3^j}+\frac{a_n}{3^n}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{2}{3^j}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_j}{3^j}+\frac{a_n+1}{3^n}.$$

计算过程与二进制数类似.

不变集和拓扑传递

因为要考虑在某集合中是稠密的轨道，而此集合是某映射映其到自身的，所以先给出不变集的定义. 这一节考虑的空间一般都是[0, 1]区间，但先给出一般空间 X 上的不变集的定义.

定义 10.2.4 令 f 是从集合 X 到其自身的函数. 称 X 的子集 A 是不变的(invariant)，如果(i)若 $x\in A$，则 $f(x)\in A$，(ii)对于 A 内的任一点 b，A 内都存在一点 a 使得 $f(a)=b$(即 $f(A)=A$). 称 X 的子集 A 是正不变的(positively invariant)是指若 $x\in A$，则 $f(x)\in A$(即 $f(A)\subset A$).

定义 10.2.5 从空间 X 到其自身的映射 f 称为拓扑传递的(topologically transitive)如果存在一点 x^* 使得轨道 $\mathcal{O}_f^+(x^*)$ 在 X 内是稠密的.

双倍映射

这一节要利用二进制展式证明双倍映射(doubling map) $D(x)=2x(\text{mod } 1)$ 是拓扑传递的. 考虑数

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{2^j},$$

其中，每个 a_j 是0或1. 利用这个表示法可得

379

$$D\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{2^j}\right)=a_1+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{a_j}{2^{j-1}}(\text{mod } 1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{2^k}.$$

第 n 次迭代只是将该展开式平移了 n 个位置：

$$D^n\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{2^j}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+n}}{2^k}.$$

若点 x 的展开式中每 n 个位置重复一次，则对所有的 j 都满足 $a_{j+n}=a_j$，所以 $D^n(x)=x$ 且 x 是 n-周期点.

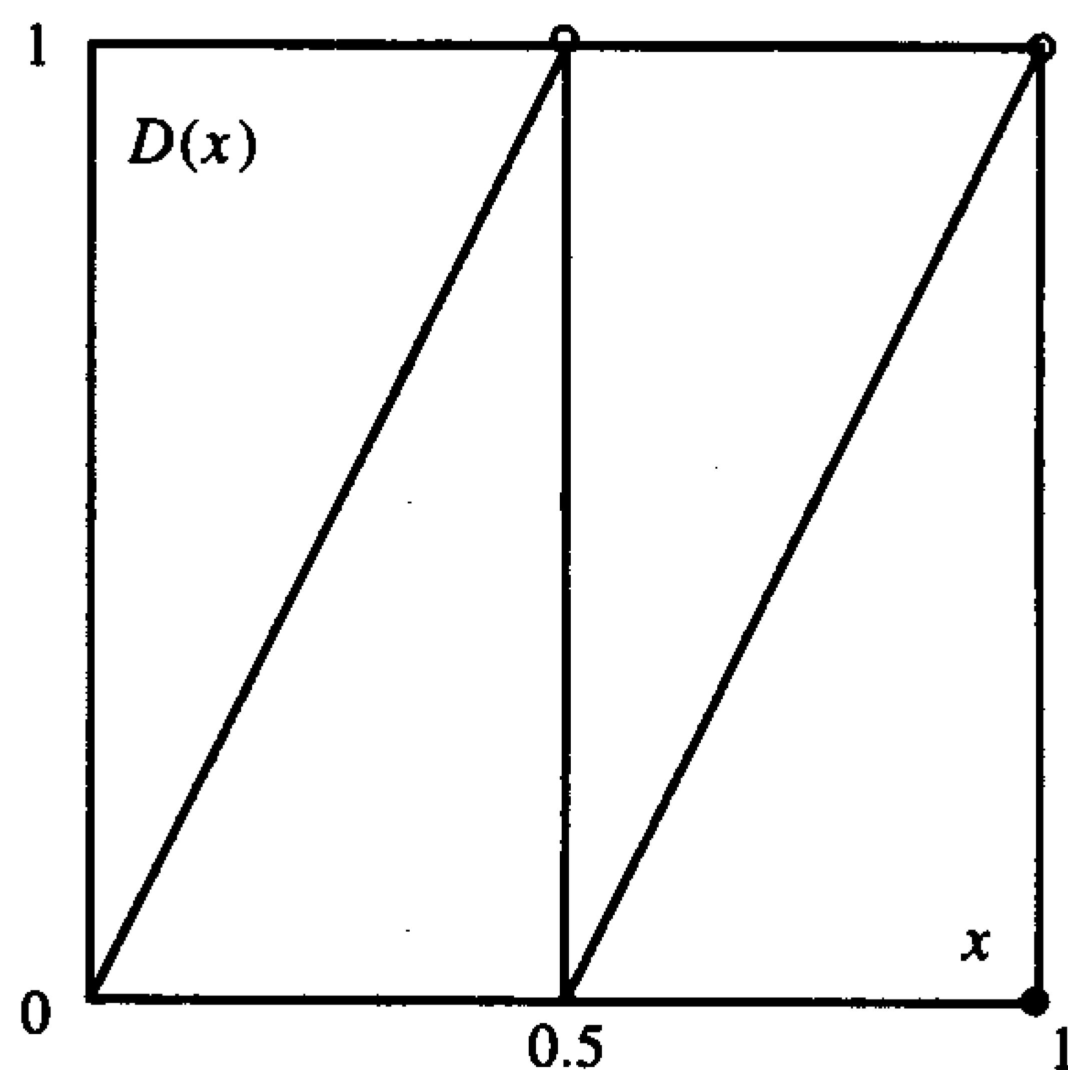


图 10.2.1 双倍映射曲线

一个数展开式中的前 n 次位置也确定了长度为 2^{-n} 且含有 x 的子区间；若 $x=\sum_{j=1}^{\infty}a_j/2^j$ 且 $x_n=\sum_{j=1}^{n}a_j/2^j$，则 $x_n\leqslant x\leqslant x_n+2^{-n}$.

现在就来证明在[0, 1]内有一点使 D 过该点的轨道在[0, 1]内是稠密的(见图 10.2.1).

定理 10.2.6 双倍映射 D 在[0, 1]上是拓扑传递的. 换言之，在[0, 1]内存在一点 x^* 使得在映射 D 下 x^* 的轨道在[0, 1]内是稠密的(即过 x^* 的轨道任意接近[0, 1]内的每一点).

证明 利用二进制展式来描述点 x^*. 令 $b_1^*=0$ 且 $b_2^*=1$，这就给出两个可能的字节. 然后令 $b_3^*b_4^*=00$，$b_5^*b_6^*=10$，$b_7^*b_8^*=01$ 和 $b_9^*b_{10}^*=11$(注意：所有长度为2的字节串都已列举

出来了). 在第三个阶段，利用从 b_{11}^* 到 b_{34}^* 列出所有长度为 3 的字节串：000，100，010，110，001，101，011 和 111. 依次利用归纳法就可在第 j 个阶段列出所有长度为 j 的字节串. 令点 x^* 有这种二进制表示，即

$$x^* = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j^*}{2^j}.$$

可以断言 x^* 的轨道可任意接近[0, 1]内的每个点. 取任意点 x 的二进制表示 $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j/2^j$. 对于任意的 k, 前 k 个字节 $a_1a_2\cdots a_k$ 作为 x^* 的字节串出现, 也就是说, 对某个 m 和 $1 \leqslant j \leqslant k$ 有 $a_j = b_{j+m}^*$. 则 $D^m(x^*)$ 的二进制表示的前 k 个字节与 x 中的一致, 而且

380

$$|D^m(x^*) - x| = \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{b_{j+m}^* - a_j}{2^j}\right| \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2^k}.$$

因此，x^* 的轨道与 x 的距离不超过 2^{-k}，因为 2^{-k} 是任意小的，原结论得证. ■

尽管到第 11 章才证明下面例题有稠密轨迹，但因书中多次用到，所以现在就给出它.

例 10.2.7　令 α 是无理数(例 $\alpha = \sqrt{2}/2$). 令 R_α 为这样的"旋转"，其转角为区间[0, 1]上全角的 α 百分比，即

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1.$$

将此区间取模 1 后视为圆周，即使这种恒等尚未正式定义，则

$$R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod 1.$$

例 11.1.4 将证明轨道 $\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(0)$ 在[0, 1]上是稠密的. ■

10.3　符号序列

10.1 节中通过设定的迭路，即它们经过的区间序列，证明了周期点的存在性. 这一节将利用无限符号序列将这一思路推广到非周期的迭路和轨道. 特别证明了帐篷映射和逻辑斯谛映射是拓扑传递的(即它们有在整个区间上稠密的轨道).

帐篷映射

考虑帐篷映射. 它把[0, 0.5]和[0.5, 1]都映射到[0, 1]上，这一点与双倍映射非常相似，即 $T[0, 0.5] = [0, 1] = T[0.5, 1]$；二者的不同在于帐篷映射在后半区间[0.5, 1]上是递减的；因此，代替二进制数，每一点可用它所经过的区间序列来刻画.

先对这两个子区间引入符号. 这些符号在二进制展开式中起 0 和 1 的作用. 用 L 表示左区间下标，用 R 表示右区间下标，并定义

$$\boldsymbol{I}_L = [0, 0.5]$$

和

$$\boldsymbol{I}_R = [0.5, 1].$$

参见图 10.3.1(后面常把 0 和 1 用作符号). 这些区间的长度均为 1/2. 区间 J 的长度用 $\lambda(J)$ 表示，其中 λ 是小写的希腊字母.

381

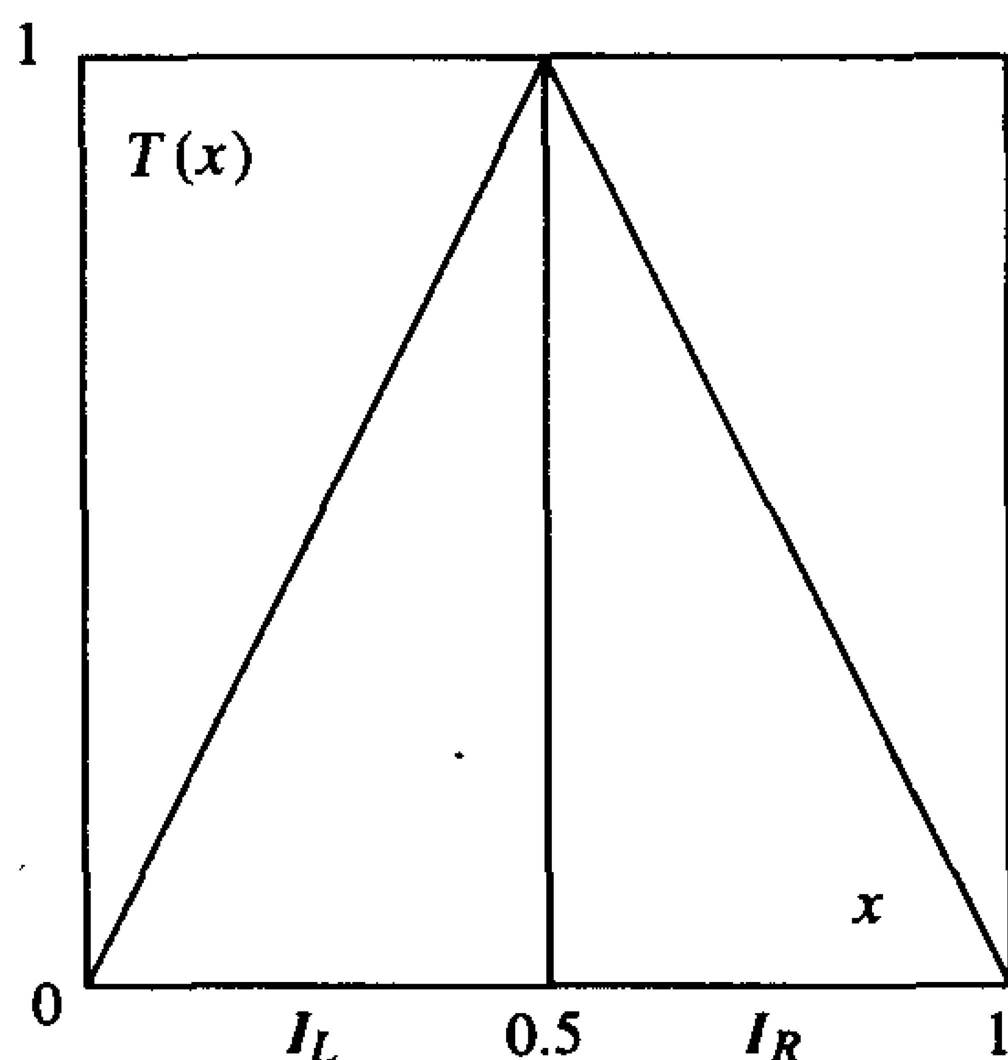


图 10.3.1　帐篷映射 T 的区间图

对于点 x，可以指定 $\{L, R\}$ 的一符号序列，令

$$s_j = \begin{cases} L & 若\ T^j(x) \in I_L = [0,0.5] \\ R & 若\ T^j(x) \in I_R = [0.5,1]. \end{cases}$$

令

$$h(x) = s = s_0 s_1 \cdots s_n \cdots$$

是 L 或 R 的无限符号序列. 称映射 h 为迭标映射(itinerary map)，而 $h(x)$ 给出了点 x 的迭路. 符号选择时出现的唯一不确定之处是当 $T^k(x)=0.5$ 时，s_k 是 L 还是 R. 然而若 $T^k(x)=0.5$，则 $T^{k+1}(x)=1$，$T^i(x)=0$，$i \geqslant k+2$，所以 $s_{k+1}=R$，$s_i=L$，$i \geqslant k+2$. 因此，对任意有限符号串 w，$wLRL^\infty$ 和 $wRRL^\infty$ 都可以用来指同一点. (这是由于数的十进制表示和二进制表示的不唯一性.)称所有可能的符号序列之集为位移空间(shift space). 当有两个符号且所有转换是允许的时，该位移空间用 Σ_2^+ 表示，2 表示有两个符号 L 和 R；加号表示这些符号是对所有 $j \geqslant 0$ 有定义. 令 σ 是从 Σ_2^+ 到其自身的映射，称为位移映射(shift map)，它是所有的符号都向左移动一位的映射，即

$$\sigma(s_0 s_1 \cdots s_n \cdots) = s_1 s_2 \cdots s_n \cdots,$$

所以 $\sigma(s)=s'$，其中 $s_j'=s_{j+1}$. 因此 σ 略去了符号 s_0 并且使其他所有符号移动一位. 若 $h(x)=s=\{s_j\}_{j\geqslant 0}$，则点 $T(x)$ 的第 j 次迭代在区间 $I_{s_{j+1}}$ 内，且 $h(T(x))=\sigma(s)$(即 $T(x)$ 的迭路是 σ 作用在符号 $h(x)=s$ 的位移)，或者说

$$h(T(x)) = \sigma(h(x)).$$

因此，h 满足 T 和 σ 的共轭方程.

为了解具有某些类型轨道的点与符号间的关系，令

$$I_{s_0 \cdots s_n} = \{x : T^j(x) \in I_{s_j}, 0 \leqslant j \leqslant n\}$$

$$= \bigcap_{j=0}^{n} T^{-j}(I_{s_j})$$

382

是与固定有限符号串相关的区间. 若 $x \in I_{s_0 \cdots s_n}$，则 $T^{j-1}(T(x)) \in I_{s_j}$，$1 \leqslant j \leqslant n$，所以 $T(x) \in I_{s_1 \cdots s_n}$.

区间 $[0, 1/4] \subset I_L$ 被 T 映射到 $I_L=[0, 1/2]$，所以

$$I_{LL} = \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

类似地，$[1/4, 1/2] \subset I_L$ 被映射到 $I_R=[1/2, 1]$，所以

$$I_{LR} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

因为限制到 $I_L=[0, 1/2]$ 的映射 T 是递增的，所以它在第二组符号上再现 I_L 和 I_R 的顺序，即先是 I_{LL}，然后是 I_{LR}. 同理，$[1/2, 3/4] \subset I_R$ 被映射到 $I_R=[1/2, 1]$，$[3/4, 1] \subset I_R$ 被映射

到$I_L=[0,\ 1/2]$，因此

$$I_{RR}=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$$

和

$$I_{RL}=\left[\frac{3}{4},1\right].$$

由于限制到$I_R=[1/2,\ 1]$上映射T是递减的，所以它在第二组符号上颠倒了I_L和I_R的顺序，即先是I_{RR}，然后是I_{RL}. 含两符号的每个区间长度都为2^{-2}，即$\lambda(I_{s_0s_1})=2^{-2}$. 参见图 10.3.2.

为了确定三符号区间的顺序，沿图中的第二轴放置两符号区间. 参见图 10.3.3. 帐篷映射T限制在$I_L=[0,\ 0.5]$上是递增的，所以在首个符号为L的三符号区间中它再现了I_{LL}，I_{LR}，I_{RR}和I_{RL}的顺序：

$$I_{LLL},I_{LLR},I_{LRR},I_{LRL}.$$

另一方面，映射T限制在$I_R=[0.5,\ 1]$上是递减的，所以它将首个符号为R的三符号区间的顺序颠倒了过来：

$$I_{RRL},I_{RRR},I_{RLR},I_{RLL}.$$

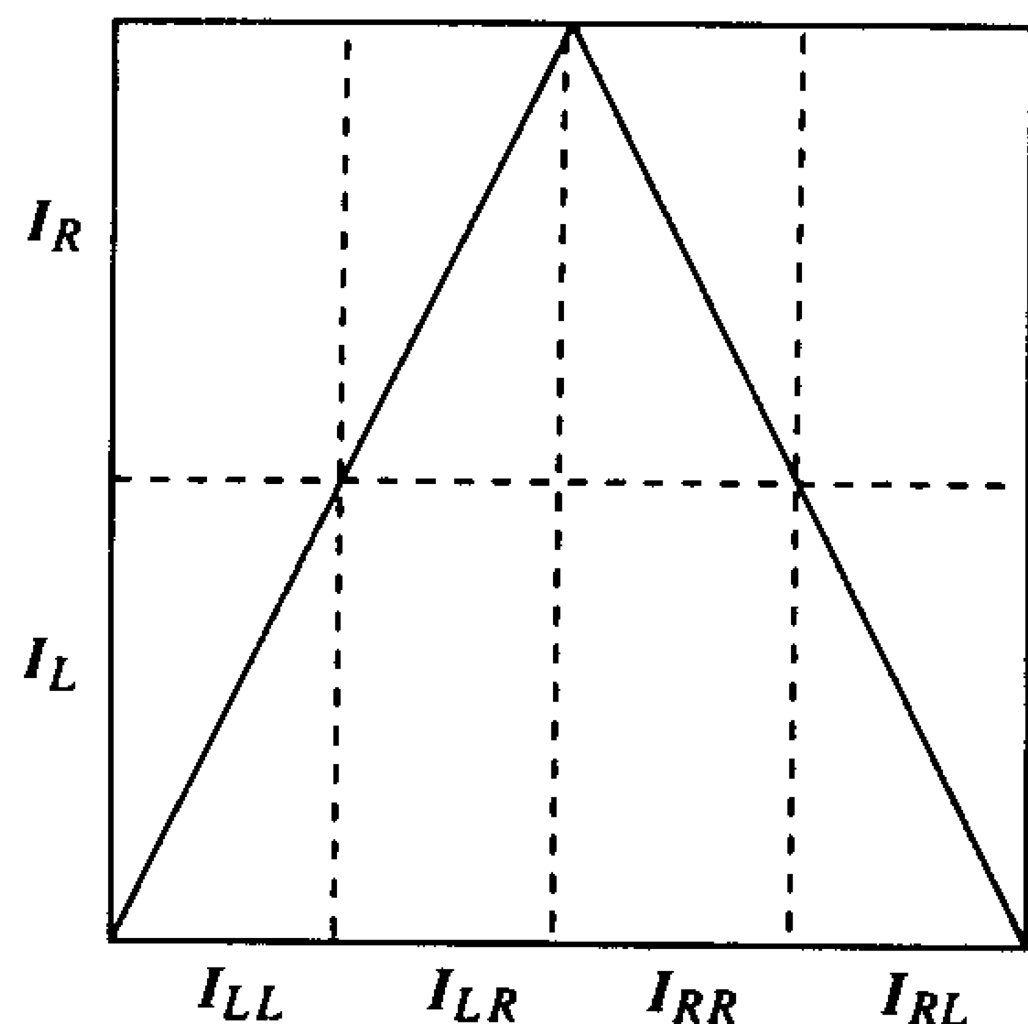


图 10.3.2　含两符号之串的区间

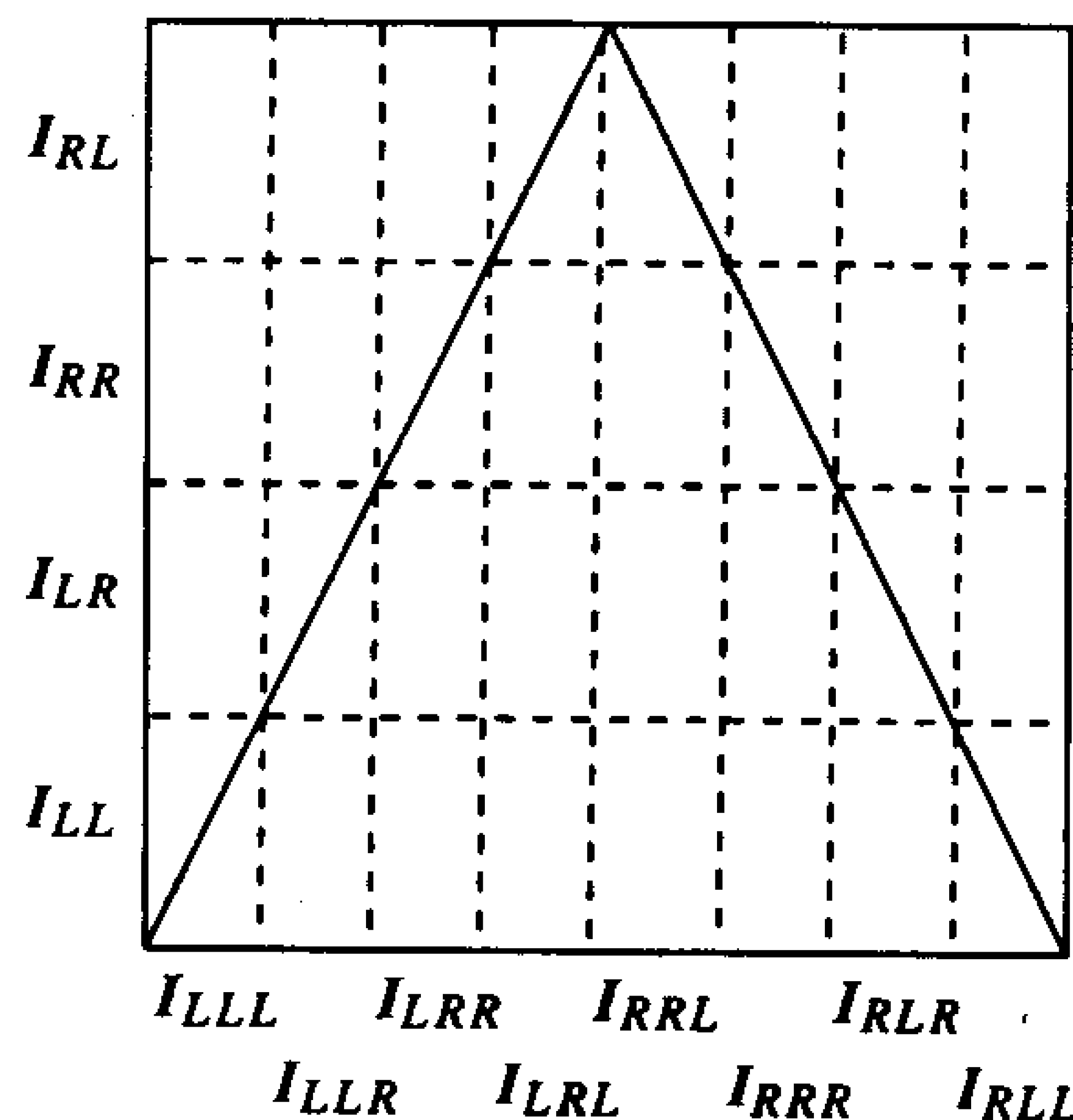


图 10.3.3　三符号之串的区间

383

三符号区间的长度均为2^{-3}，即$\lambda(I_{s_0s_1s_2})=2^{-3}$. 这 8 个区间可将[0, 1]覆盖，或

$$[0,1]=\bigcup_{s_0,s_1,s_2}I_{s_0s_1s_2}.$$

如此类推，可发现各长度的区间的顺序是可确定的. n 个符号的区间$I_{s_0\cdots s_{n-1}}$的长度均为2^{-n}，即$\lambda(I_{s_0\cdots s_{n-1}})=2^{-n}$. 2^n 个区间可将[0, 1]覆盖，或

$$[0,1]=\bigcup_{s_0,\cdots,s_{n-1}}I_{s_0\cdots s_{n-1}}.$$

最后看无限符号串能确定唯一点的原因. 正如利用无限十进制展开可表示一点一样，通过映射在迭代下经过的区间列可知一符号序列能够确定一点.

由上面的构造可知区间$I_{s_0\cdots s_n}$套在一起，即

$$I_{s_0} \supset I_{s_0 s_1} \supset \cdots \supset I_{s_0 \cdots s_{n-1}} \supset I_{s_0 \cdots s_n}.$$

因为这些区间是闭的，所以它们的交集非空.（对有界闭集之交集的更多论述见附录 B.）特别地，若区间 $I_{s_0 \cdots s_n}$ 的左端点和右端点分别为 a_n 和 b_n，则

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0.$$

左端点序列 a_n 是递增的且有上界 b_0（或 b_n 中的任意一个），所以它必收敛于一点 a_∞；右端点序列 b_n 是递减的且有下界 a_0，所以必收敛于一点 b_∞ 且 $a_\infty \leqslant b_\infty$. 对每一个 n 和 $j \geqslant n$，都有 $a_n \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant b_n$，因此 $a_n \leqslant a_\infty \leqslant b_\infty \leqslant b_n$. $I_{s_0 \cdots s_n}$ 两端点间的距离是 2^{-n-1}，且对所有的 n 都有 $b_\infty - a_\infty \leqslant b_n - a_n = 2^{-n-1}$，所以 $a_\infty = b_\infty$ 且交集是单点. 因此，无限符号序列可确定唯一一点，用 $k(s)$ 表示. 映射 k 是迭标映射 h 的逆，它将序列空间 Σ_2^+ 映射到区间 $[0, 1]$.

384

上面的结论可总结为下面的定理.

定理 10.3.1　设 h 是帐篷映射的迭标映射. 令 $s \in \Sigma_2^+$ 是 L 和 R 的任意符号序列.

(a) 则在 $[0, 1]$ 内存在唯一一点 $x_0 = k(s)$ 使得对所有 j，$T^j(x_0) \in I_{s_j}$，或

$$\{x_0\} = \bigcap_{j=0}^{\infty} T^{-j}(I_{s_j}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_0 \cdots s_{n-1}}.$$

(b) 映射 k 与 h 互为逆映射，即 $k \circ h(x_0) = x_0$. 另一方面，除了可能对某一 j 有 $T^j(k(s)) = 0.5$（即对某一有限非空字串 w 有 $s = wRL^\infty$）之外，都有 $h \circ k(s) = s$.

(c) 映射 k 是位移映射 σ 和帐篷映射 T 间的一个半共轭. 即

$$T \circ k(s) = k \circ \sigma(s).$$

（因其不是一对一的，所以它是一个半共轭而非共轭.）

证明　(a) 的结论可由定理前的讨论得知. (b) 由构造可知这些映射是可逆的.

(c) 令 $x_0 = k(s)$，则 $T^j(T(x_0)) \in I_{s_{j+1}}$，$j \geqslant 0$，故 $T(x_0) = k(\sigma(s))$. ■

注 10.3.2　上述定理中的映射 k 的构造是很关键的. 特别地，这种方法也给出了证明映射 T 存在周期点的另一种方法. 在应用映射 k 证明周期点的存在性、拓扑传递性和对初始值的敏感依赖性时，其重要性就更为明显.

前面探讨了有限符号串区间 $I_{s_0 \cdots s_{n-1}}$，所得定理指出一无限符号序列决定唯一一点，该点以此序列为迭路.

利用无限符号序列确定一点与利用无限二进制（或十进制）展开式确定一点很相像，这在讨论双倍映射时已出现过. 二者的不同在于符号序列与迭路或点的轨道有关，不仅仅与点在直线上的位置有关.（对双倍映射来说，位置和迭路从本质上来说是联系在一起的.）

定理 10.3.3　令 k 是属于上一定理中帐篷映射 T 的从 Σ_2^+ 到 $[0, 1]$ 的映射. 令 h 是其迭标映射.

(a) 若 $s = (s_0 \cdots s_{n-1})^\infty$ 是 n-周期符号序列（即位移映射 σ 的 n-周期点），则 $k(s)$ 是 T 的 n-周期点. 若 s 是最终 n-周期符号序列，则 $k(s)$ 是 T 的最终 n-周期点.

(b) 若 x_0 是 T 的 n-周期点，则 $h(x_0)$ 是 σ 的 n-周期点. 若 x_0 是 T 的最终 n-周期点，则 $h(x_0)$ 是 σ 的最终 n-周期点.

(c) T 的周期点在[0, 1]内是稠密的.

证明　(a)若映射 k 是一对一的，则(a)、(b)可由命题 9.6.7 得出. 然而 k 非一对一的情况仅仅涉及过 0.5 的点，且它们的轨道为非周期轨. 因此，(a)和(b)实际上可由前面的结论得出. 具体证明过程留给读者.

(c)设 x_0 是[0, 1]内的任意点. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 n 使得 $2^{-n}<\varepsilon$，则对某一有限串 $\mathbf{w}=s_0\cdots s_{n-1}$ 有

$$x_0 \in \boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_{n-1}}$$

385

令 $\mathbf{s}$ 是反复重复 $\mathbf{w}$ 的无限序列：

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{w}^{\infty} = \mathbf{www}\cdots \\ &= s_0\cdots s_{n-1}s_0\cdots s_{n-1}s_0\cdots s_{n-1}\cdots.\end{aligned}$$

令 $p=k(\mathbf{s})$，则 p 是周期的. x_0 和 p 都在长度为 2^{-n} 的同一区间内，因此 $|x_0-p|\leqslant 2^{-n}<\varepsilon$. 这就证明存在任意接近 x_0 的周期点. ■

最后利用符号动力学证明帐篷映射是拓扑传递的.

定理 10.3.4　帐篷映射 T 在区间[0, 1]上是拓扑传递的. 换言之，在[0, 1]内存在一点 x^* 使得它在帐篷映射下的轨道在[0, 1]内是稠密的.

证明　与双倍映射的证明非常相似. 令 $\mathbf{s}^*$ 是这样一个符号序列，它包括长度为 1 和长度为 2 的所有符号串，利用归纳法，对所有 n 还包括长度为 n 的所有符号串. 令 $x^*=k(\mathbf{s}^*)$，则对任意的区间 $\boldsymbol{I}_{t_0\cdots t_{n-1}}$，符号串 $t_0\cdots t_{n-1}$ 都出现在序列 $\mathbf{s}^*$ 中的某处. 于是存在 m，使 $\sigma^m(\mathbf{s})$ 的前 n 个符号为 $t_0\cdots t_{n-1}$，从而

$$T^m(x^*) \in \boldsymbol{I}_{t_0\cdots t_{n-1}}.$$

因为这些区间的长度可任意小，即 $\lambda(\boldsymbol{I}_{t_0\cdots t_{n-1}})=2^{-n}$，这表明 x^* 的轨道在区间[0, 1]内是稠密的. ■

按 10.8 节中所定义的 Σ_2^+ 上的距离或测度，前面的证明表示位移映射在 Σ_2^+ 上是拓扑传递的. □

推论 10.3.5　位移映射 σ 在 Σ_2^+ 上是拓扑传递的. 事实上，点 $\mathbf{s}^*$ 在 Σ_2^+ 上有一个稠密的轨道.

逻辑斯谛映射

当 $a=4$ 时，逻辑斯谛函数 $G(y)=g_4(y)$ 是区间[0, 1]到其自身的映射，这是因为 $G(0.5)=1$. 逻辑斯谛映射 $G(y)$ 与帐篷映射有相同的结果. 令 $\boldsymbol{I}_L$ 和 $\boldsymbol{I}_R$ 与讨论帐篷映射时出现的区间相同，参见图 10.3.4. 设符号序列为 $\mathbf{s}$，定义区间

386

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}^G_{s_0\cdots s_n} &= \{y : G^j(y) \in \boldsymbol{I}_{s_j}, 0 \leqslant j \leqslant n\} \\ &= \bigcap_{j=0}^{n} G^{-j}(\boldsymbol{I}_{s_j}).\end{aligned}$$

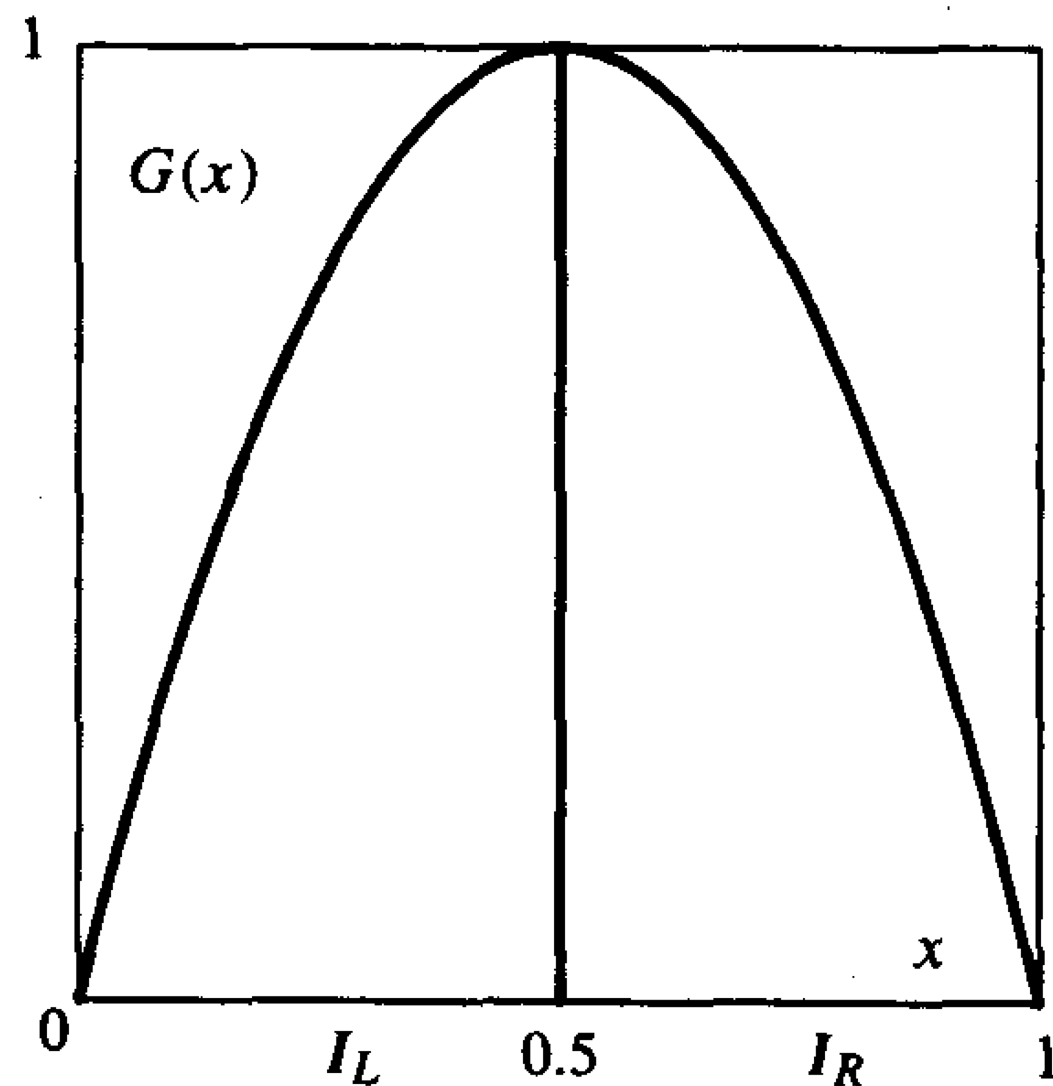


图 10.3.4　逻辑斯谛映射 $G(y)=g_4(y)$ 的区间

在命题 9.6.5 中已经证明映射

$$y = h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{2}$$

是 $T(x)$ 到 $G(y)$ 的共轭. 因为 T 和 G 之间存在满足 $h([0, 0.5]) = [0, 0.5]$ 和 $h([0.5, 1]) = [0.5, 1]$ 的共轭函数 h，所以

$$I^G_{s_0\cdots s_{n-1}} = \bigcap_{j=0}^{n-1} G^{-j}(I_{s_j}) = \bigcap_{j=0}^{n-1} h \circ T^{-j} \circ h^{-1}(I_{s_j})$$

$$= h\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j}(I_{s_j})\right) = h(I^T_{s_0\cdots s_{n-1}}),$$

其中 $I^T_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 是帐篷映射的区间．此共轭的导数是有界的，即

$$h'(x) = (\pi/2)\sin(\pi x)$$

$$|h'(x)| \leqslant \pi/2.$$

令 x_0 和 x_1 是区间 $I^T_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 的端点，所以 $|x_1 - x_0| = 2^{-n}$. 再令 $y_0 = h(x_0)$ 和 $y_1 = h(x_1)$ 是相应的区间 $I^G_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 的端点，由中值定理可知，x_0 和 x_1 之间存在一点 x_2 使得

$$y_1 - y_0 = h(x_1) - h(x_0)$$

$$= h'(x_2)(x_1 - x_0).$$

因此，区间的长度为

$$\lambda(I^G_{s_0\cdots s_{n-1}}) = |y_1 - y_0| = |h'(x_2)||x_1 - x_0|$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}|x_1 - x_0| = \pi 2^{-n-1}.$$

因为当 n 趋于无穷大时这些区间的长度趋于0，所以它们的交集是一单点，记为 $k(s)$，

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} G^{-j}(I_{s_j}) = \{k(s)\}.$$

[387] 以上结论可总结为下面的定理．

定理 10.3.6 令 h 是逻辑斯谛映射的迭标映射，$s \in \Sigma_2^+$ 是 L 和 R 的任意符号序列.

(a) 则在 $[0, 1]$ 内存在唯一一点 $x_0 = k(s)$ 使得对所有的 j 都有 $G^j(x_0) \in I_{s_j}$，即

$$\{x_0\} = \bigcap_{j=0}^{\infty} G^{-j}(I_{s_j}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_0\cdots s_{n-1}}.$$

(b) 映射 k 与 h 互为逆映射，即 $k \circ h(x_0) = x_0$. 另一方面，除了可能对某一 j 有 $G^j(k(s)) = 0.5$（即对某一有限非空字串 w 有 $s = wRL^\infty$）之外，$h \circ k(s) = s$ 也成立.

(c) 映射 k 是位移映射 σ 和逻辑斯谛映射 G 之间的一个半共轭映射，即

$$G \circ k(s) = k \circ \sigma(s).$$

(d) 若 s 是 n-周期符号序列（即是位移映射 σ 的 n-周期点），则 $k(s)$ 是 G 的 n-周期点. 若 s 是最终 n-周期符号序列，则 $k(s)$ 是 G 的最终 n-周期点.

(e) 若 y_0 是 G 的 n-周期点，则 $h(y_0)$ 是 σ 的 n-周期点. 若 y_0 是 G 的最终 n-周期点，则 $h(y_0)$ 是 σ 的最终 n-周期点.

(f) 映射 G 的周期点在 $[0, 1]$ 内是稠密的.

(g)逻辑斯谛映射 G 在$[0, 1]$上是拓扑传递的，也就是说，$[0, 1]$内存在一点 $y^* = k(s^*)$使得在帐篷映射 G 下 y^* 的轨道在$[0, 1]$内是稠密的.

具有 N 个符号的位移空间

我们已经介绍了两个符号 L 和 R 的 Σ_2^+ 空间，本节最后给出具有任意有限符号的位移空间的定义，并引入符号序列间的距离或度量. 在 10.8 节将证明距离的其他性质以及位移映射和迭标映射的连续性.

前面用 L 和 R 表示两个符号，现在用 $0, \cdots, N-1$ 表示任意有限个符号.

定义 10.3.7 考虑 N 个符号，记为$\{0, \cdots, N-1\}$，N 个符号上的位移空间 Σ_N^+ 是所有符号序列$\boldsymbol{s} = s_0 s_1 s_2 \cdots$的集合，其中每个 s_j 都是$\{0, \cdots, N-1\}$中的元素，σ 是如前面定义的从 Σ_N^+ 到 Σ_N^+ 的位移映射.

对满足 $0 \leqslant s, t \leqslant N-1$ 的两个符号 s 和 t，令

$$\delta(s,t) = \begin{cases} 0 & 若\ s = t \\ 1 & 若\ s \neq t. \end{cases}$$

对 Σ_N^+ 内的两个元素 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$，定义它们之间的距离为

$$d(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta(s_j,t_j)}{3^j}.$$

称距离函数 d 为度量(metric).

下面的命题给出了 Σ_N^+ 上的度量 d 的一些性质，也是称其为距离的原因.

命题 10.3.8 Σ_N^+ 上的度量 d 具有下列性质：

(i) $d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \geqslant 0$.

(ii) $d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}$.

(iii) $d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = d(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})$.

(iv) $d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) + d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \geqslant d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$.

388

这一命题以及下面所有结果的证明将在 10.8 节中给出.

下面的结果表明，如果两序列 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的前有限项相同，那么在上述度量意义下 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 是接近的.

命题 10.3.9 令 Σ_N^+ 是基于 N 个符号的位移空间，距离 d 如前定义，在 Σ_N^+ 内取定 $\boldsymbol{t}$，则

$$\left\{\boldsymbol{s} \in \Sigma_N^+ : s_j = t_j, 0 \leqslant j \leqslant k\right\} = \left\{\boldsymbol{s} \in \Sigma_N^+ : d(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \leqslant 3^{-k}2^{-1}\right\}.$$

命题 10.3.10 位移映射 σ 在 Σ_N^+ 上是连续的.

定理 10.3.11 Σ_N^+ 上的位移映射 σ 有如下两个性质：

(a)周期点是稠密的.

(b)位移映射 σ 在 Σ_N^+ 上是拓扑传递的.

证明思路 (a)如果 $\boldsymbol{w} = s_0 \cdots s_{n-1}$是长度为 n 的字符，则 $\boldsymbol{w}^\infty$ 是 σ^n 的不动符号串. 所有这种形式的符号序列在 Σ_N^+ 内是稠密的.

(b)定理 10.3.4 的证明中用到的符号序列 $\boldsymbol{s}^*$ 的轨道在 Σ_2^+ 内是稠密的(对 Σ_N^+ 可定义类似的序列).

■

定理 10.3.12 设 f 是 $[0, 1]$ 上的三个映射 D, T 或 G(双倍、帐篷或逻辑斯谛映射)之一. 对映射 f 而言, 令 k 是定理 10.3.1 和定理 10.3.6 中定义的从 Σ_N^+ 到 $[0, 1]$ 的映射, 则 k 是连续的.

10.4 对初始值的敏感依赖性

上一节利用符号动力学证明了区间内存在稠密轨道. 这一节介绍一个定义, 该定义与开始彼此靠近而后分开的两个轨道的性质有关. 这一性质是"混沌动力学"的核心. 首先考虑双倍映射的情形.

例 10.4.1 令 $D(x) = 2x(\bmod 1)$ 是 $[0, 1]$ 上的双倍映射, 该映射对初始值有敏感依赖性. 令 $x_0 = 1/3$ 且 $y_0 = x_0 + 0.000\,1$. 表 10.4.1 给出了这些点的前 15 次迭代以及这些迭代间的距离. 可见前 12 次迭代离得越来越远. 到第 12 次迭代时, 它们间的距离已超过 1/3. 对于第 12 次以后的迭代, 它们相距可能很近也可能很远, 并且它们的动力学行为似乎是相互独立的. 也可参见图 10.4.1 和图 10.4.2. 由图 10.4.1 可知, 点 $x_0 = 1/3$ 的周期为 2, 所以迭代反复进行; 而 $y_0 = x_0 + 0.000\,1$ 的轨道则远近游荡.

表 10.4.1 双倍映射的敏感依赖性

n	x_n	y_n	$\lvert y_n - x_n \rvert$
0	0.333 3	0.333 4	0.000 1
1	0.666 7	0.666 9	0.000 2
2	0.333 3	0.333 7	0.000 4
3	0.666 7	0.667 5	0.000 8
4	0.333 3	0.334 9	0.001 6
5	0.666 7	0.669 9	0.003 2
6	0.333 3	0.339 7	0.006 4
7	0.666 7	0. 679 5	0.012 8
8	0.333 3	0.358 9	0.025 6
9	0.666 7	0.717 9	0.051 2
10	0.333 3	0.435 7	0.102 4
11	0.666 7	0.871 5	0.204 8
12	0.333 3	0.742 9	0.409 6
13	0.666 7	0.485 9	0.180 8
14	0.333 3	0.971 7	0.638 4
15	0.666 7	0.943 5	0.276 8

■

现在给出正式定义.

定义 10.4.2 令 f 是空间 $\boldsymbol{X}$ 上的一个映射. 称此映射有对初始值 x_0 的敏感依赖性, 如果存在 $r>0$ 使得对任意的 $\delta>0$, 在 x_0 的 δ 邻域内存在 y_0(即 $\lvert y_0 - x_0 \rvert < \delta$)和迭代次数 $k>0$ 使得

$$\lvert f^k(y_0) - f^k(x_0) \rvert \geq r.$$

称此映射在一集合 $\boldsymbol{A}$ 上有对初始值的敏感依赖性, 如果在 $\boldsymbol{A}$ 内的任意点 x_0 它都有对该初始值的敏感依赖性, 并且对 $\boldsymbol{A}$ 内的任意点 x_0 都应有相同的 $r>0$.

389

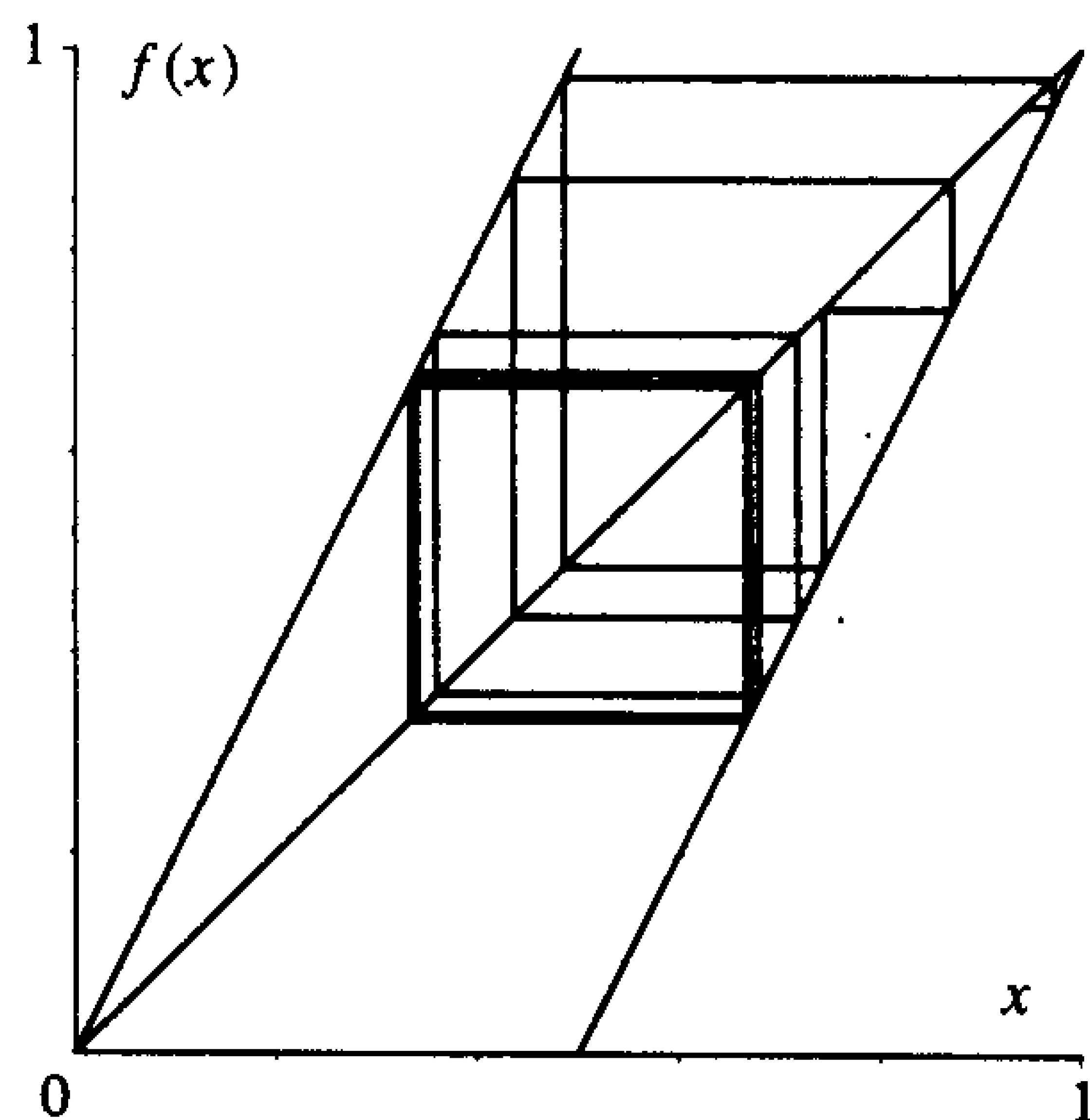


图 10.4.1　对初始值 $x_0=1/3$ 和 $y_0=x_0+0.0001$ 有敏感依赖性的双倍映射的迭代

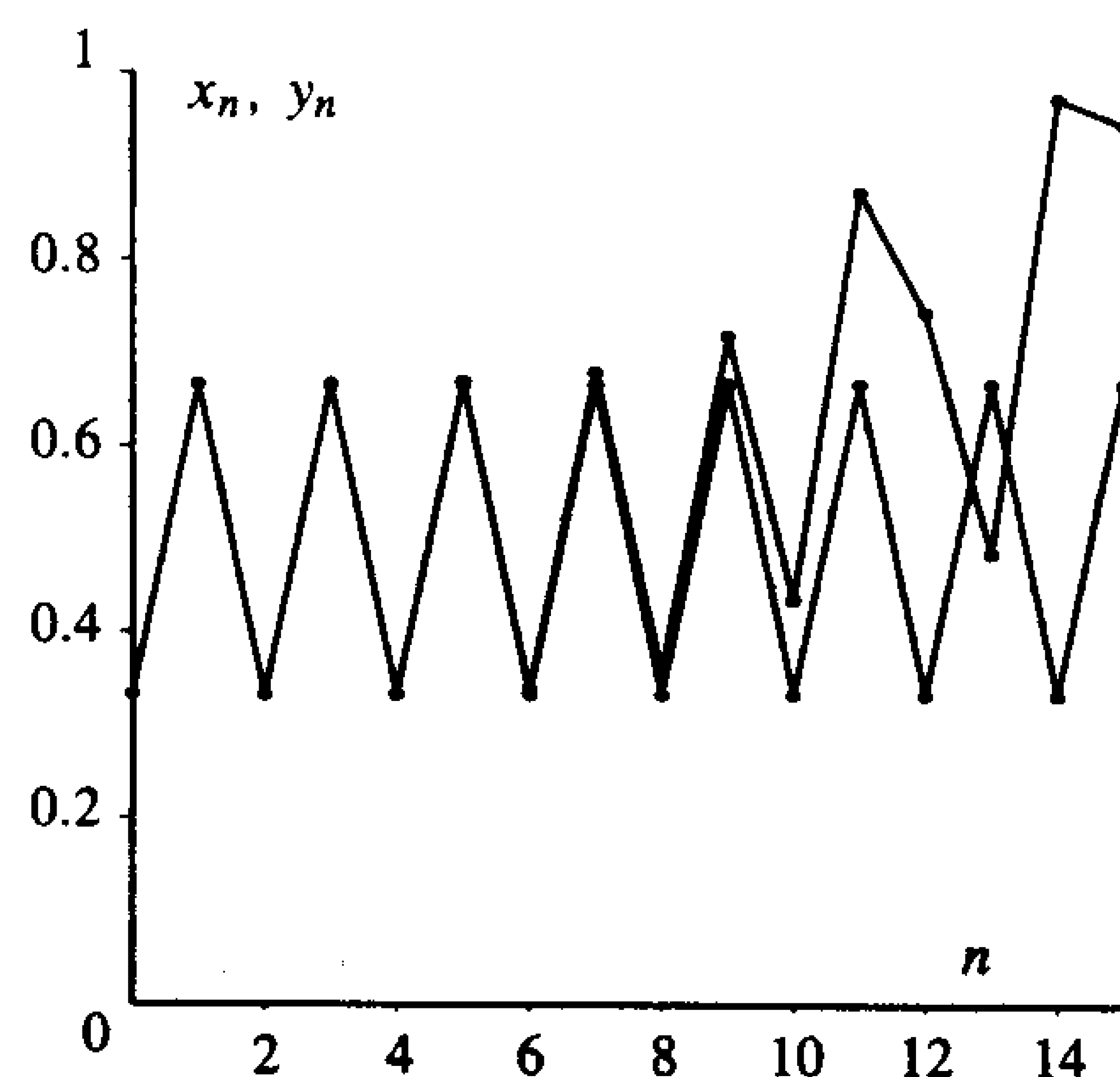


图 10.4.2　对初始值 $x_0=1/3$ 且 $y_0=x_0+0.0001$ 有敏感依赖性的倍映射的迭代图

如果集 A 是 f 的不变集，称 f 限制在集 A 上有对初始值的敏感依赖性，如果对集合 A 内任意两个不同的点 x_0 和 y_0，都存在 $r>0$ 和某一迭代次数 $k>0$ 使得

$$|f^k(y_0)-f^k(x_0)|\geq r.$$

下面要证明 D，T 和 G 在[0，1]上都有对初始值的敏感依赖性.

下面定义的“扩张”与敏感依赖性不同之处在于所有不同点对在映射作用下都是分开的.

定义 10.4.3　称映射 f 在 X 内的不变子集 A 上是扩张的(expansive)如果存在 $r>0$ 使得对于 A 内满足 $y_0\neq x_0$ 的任意点 x_0 和 y_0，都存在 k 次迭代满足

$$|f^k(y_0)-f^k(x_0)|\geq r.$$

由上述定义可知，A 上的任意扩张映射限制到 A 上有对初始值的敏感依赖性，但反之就不一定成立.

定理 10.4.4　双倍映射 D 在集合[0，1]上有对初始值的敏感依赖性，事实上，D 是扩张的.

证明　需要证明 D 是扩张常数为 $r=1/4$ 的扩张.

考虑两个区间[0，1/2)和[1/2，1)以及点{1}．下面证明若 $x<y$ 且 $y-x<1/4$ 则 $|D(y)-D(x)|\geq 2|y-x|$．分两种情况考虑：(i)x 和 y 在同一区间内和(ii)x 和 y 在不同区间内．双倍映射总可以表示为 $D(s)=2s-k$，$k=0$，1 或 2. 在情况(i)中，x 和 y 都可用相同的 k 表示，所以 $|D(y)-D(x)|=|2(y-x)|$，在这种情况下距离加倍. 在情况(ii)中，用于表示 y 的 k 值比用于表示 x 的 k 的值大 1，即 $k_y=k_x+1$ 且 $D(y)=2y-k_x-1$，所以

$$\begin{aligned}D(x)-D(y)&=2x-k_x-(2y-k_x-1)\\&=1-2(y-x)\\|D(x)-D(y)|&\geq 1-2|y-x|.\end{aligned}$$

如果

$$\begin{aligned}1-2|y-x|&\geq 2|y-x|,\\1&\geq 4|y-x|\end{aligned}$$

390~391

或

$$\frac{1}{4} \geqslant |y-x|,$$

那么就可得 $|D(x)-D(y)| \geqslant 2|y-x|$.

现在令 $x_0<y_0$ 是[0, 1]内的两点. 只要对 $0 \leqslant j<k$, $x_j=D^j(x_0)$ 和 $y_j=D^j(y_0)$ 之间的距离小于1/4, 则就有

$$\begin{aligned}|y_k-x_k| &\geqslant 2|y_{k-1}-x_{k-1}| \\ &\geqslant 2^k|y_0-x_0|.\end{aligned}$$

因为这不能对所有的 $k \geqslant 0$ 都成立, 所以最终有 $|y_k-x_k| \geqslant 1/4$.

主要思路是: 迭代相互分开直到结束在不连续点的两侧, 则它们或是已相当远离(距离为1/4), 或是下一次迭代使它们的距离至少为1/4. ■

命题 10.4.5 *帐篷映射 T 和逻辑斯谛映射 G 在集合[0, 1]上有对初始值的敏感依赖性.*

证明 两映射有对初始值的敏感依赖性的证明是类似的且 $r=\frac{1}{2}$. 下面只给出逻辑斯谛映射的证明过程.

令 x_0 是[0, 1]内的一点, $h(x_0)=s$ 是 x_0 的符号序列. 设 s 并不以所有 L 结束, 所以 x_0 最终不趋向于不动点0. x_0 最终趋向于不动点0的情况留给读者证明(可通过交换 x_0 和 y_0 的角色进行证明). 因此有无限多个 j 满足 $s_j=R$. 对给定的 $\delta>0$, 取 n 使得 $\pi/2^{n+1}<\delta$, $s_n=R$. 考虑满足 $t_j=s_j$, $0 \leqslant j<n$ 和 $t_j=L$, $j \geqslant n$ 的符号序列 $\boldsymbol{t}$. 令 $y_0=k(\boldsymbol{t})$ 是有此符号序列的点. 因 x_0 和 y_0 都在 $\boldsymbol{I}_{s_0 \cdots s_{n-1}}$ 内, 所以 $|x_0-y_0| \leqslant \pi/2^{n+1}<\delta$. 取第 n 次迭代 $h(G^n(y_0))=L^\infty$, 所以 $G^n(y_0)=0$, 而 $G^n(x_0) \in \boldsymbol{I}_R$, 因此 $G^n(x_0) \geqslant 0.5$, 故

$$|G^n(x_0)-G^n(y_0)| \geqslant 0.5.$$

这表明存在一点, 任意靠近 x_0 且使得迭代 $G^n(x_0)$ 和 $G^n(y_0)$ 之间的距离大于1/2, 也就是说, G 有对初始值的敏感依赖性. ■

帐篷映射和逻辑斯谛映射有对初始值的敏感依赖性的证明用的是符号动力学而未直接运用导数的界, 这一点与证明双倍映射时相同. 但双倍映射和帐篷映射(逻辑斯谛映射则不太明显)的一个共同特点是它们导数的绝对值都大于1(即, 区间扩大). 为了使区间[0, 1]为一个拉伸映射的前行不变集, 该映射必须如帐篷映射般折叠或如双倍映射般剪开. 在11.2节探讨混沌吸引子时会继续用到拉伸和折叠或拉伸和剪开的思想.

最后提一下, 对初始值具有敏感依赖性的映射有"蝴蝶效应", 这在本书导论的历史回顾中提到过初始值的微小变化会产生很大的不同. 洛伦兹(E. Lorenz)所以引入这一术语的原因是他想表明一只蝴蝶在一个地方拍打翅膀可能会影响另一地方一个月后的天气.

10.5 康托尔集

迄今为止, 对有不变区间的映射都运用了符号动力学, 此时不变集中所有点都不离开该区间. 在这一节考虑一些点离开该区间的情况. 结果是由无限多个点组成的一个很"小"的不变集, 但其不包括区间, 该集被称为康托尔集. 这是以一个数学家的名字命名的, 他在1900年

前后把严密的集合论的思想引进数学中.

我们已多次运用了斜度为 2 的帐篷映射. 这一节我们考虑用其他斜度的帐篷映射来构造康托尔集.

392

令 T_r 是斜度为 r 的帐篷映射，$r>0$，

$$T_r(x) = \begin{cases} rx & x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ r(1-x) & x \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

参见图 10.5.1. 首先考虑斜度为 3 的映射 T_3，但大多数工作也适用于 $r>2$ 的映射 T_r(某些区间需要修改).

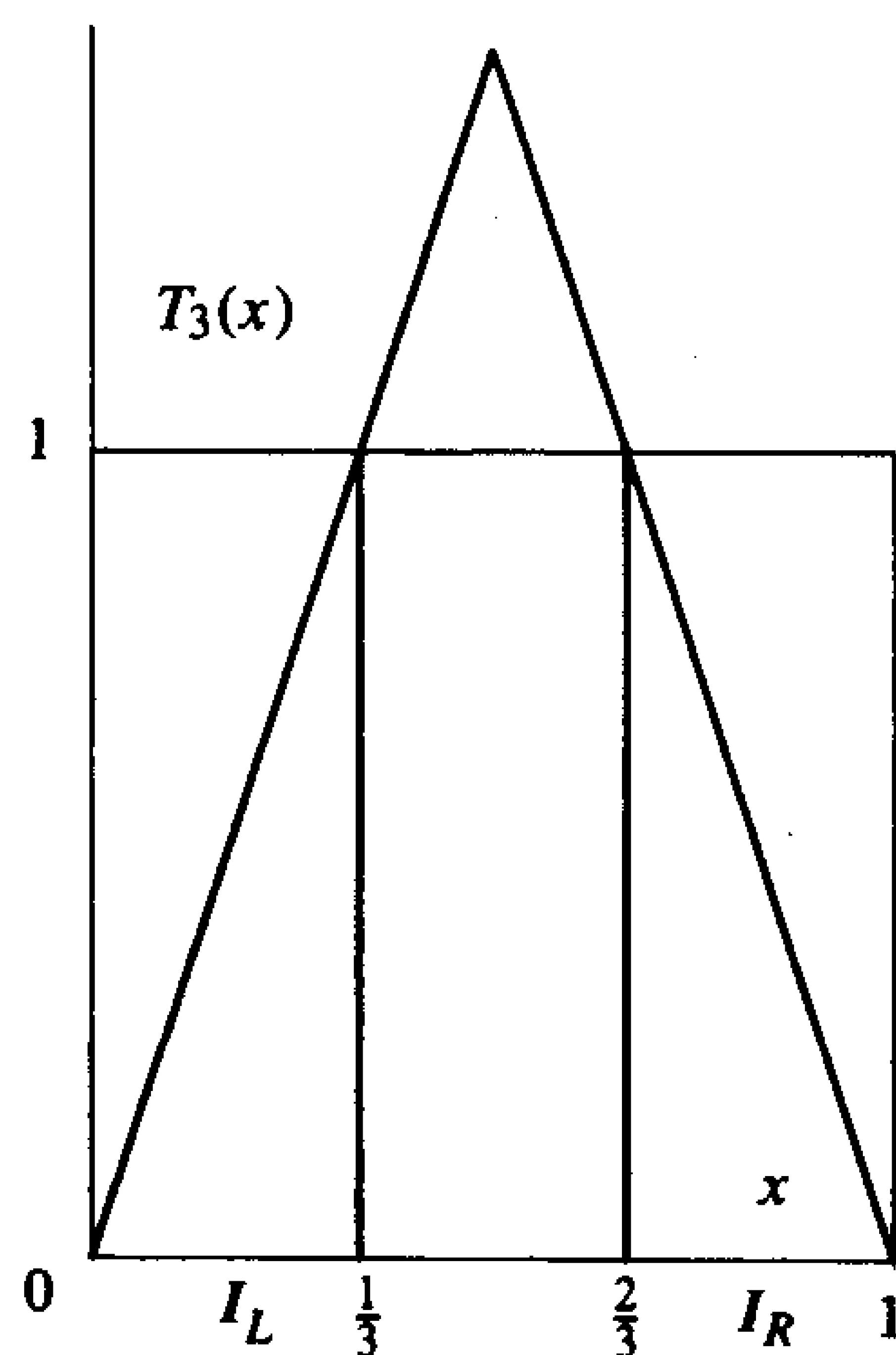


图 10.5.1　帐篷映射 T_3 的曲线图

引理 10.5.1　若对所有的 $j \geqslant 0$，$T_3^j(x_0)$ 都是有界的，则对所有的 $j \geqslant 0$ 都有

$$T_3^j(x_0) \in [0,1/3] \cup [2/3,1].$$

证明　若 $x_0<0$，则当 j 趋于无穷时 $T_3^j(x_0)=3^j x_0$ 趋于负无穷.

若 $x_0>1$，则 $T_3(x_0)<0$，则由前面情况可知当 j 趋于无穷时，$T_3^{j+1}(x_0)=T_3^j(T_3(x_0))=3^j T_3(x_0)$ 趋于负无穷.

若 $1/3<x_0<2/3$，则 $T_3(x_0)>1$，$T_3^2(x_0)<0$ 且当 j 趋于无穷时，

$$T_3^{j+2}(x_0) = T_3^j(T_3^2(x_0)) = 3^j T_3^2(x_0)$$

趋于负无穷.

因此，若轨道不趋于负无穷，则 x_0 必在[0, 1/3]和[2/3, 1]的并集中.

若对某 $k \geqslant 0$，$T_3^k(x_0)$不在[0, 1/3] ∪ [2/3,1] 内,则 $T_3^{j+k}(x_0) = T_3^j(T_3^k(x_0))$ 必趋于负无穷. 因此若对所有的 $j \geqslant 0, T_3^j(x_0)$ 有界,则如前面所提到的,每个迭代 $T_3^k(x_0)$ 必在这两个区间的并集中. ■

下面考虑经过给定次数迭代后仍在区间[0, 1]内的所有点. 令

393

$$\boldsymbol{K}_n = \{x : T_3^j(x) \in [0,1], 0 \leqslant j \leqslant n\}.$$

则

$$\boldsymbol{K}_0 = [0,1]$$

和

$$\boldsymbol{K}_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1].$$

因此，$\boldsymbol{K}_1$ 是两个区间

$$\boldsymbol{I}_L = [0,1/3]$$

和

$$\boldsymbol{I}_R = [2/3,1]$$

的并集，每个区间的长度是 1/3. $\boldsymbol{K}_1$ 的总长度是 $2(1/3)=2/3$，$\lambda(\boldsymbol{K}_1)=2/3$. 再次用 λ 来表示区间并集的总长度.

$\boldsymbol{K}_2$ 内的点 x 满足 $T_3(x)$，$T_3^2(x) \in [0, 1]$，所以 $T_3(x) \in \boldsymbol{K}_1$. 此外 $\boldsymbol{K}_2 \subset \boldsymbol{K}_1$，所以 $\boldsymbol{K}_2$ 有一

部分在 I_L 内，一部分在 I_R 内，因此，集合 K_2 是 $I_L \cup I_R$ 中映入 K_1 的点的集合，即

$$K_2 = \left(I_L \cap T_3^{-1}(K_1)\right) \cup \left(I_R \cap T_3^{-1}(K_1)\right).$$

因为 T_3 是单调的，在区间 I_L 和 I_R 上都有因子为 3 的表达式，所以集合 $(I_L \cap T_3^{-1}(K_1))$ 和 $(I_R \cap T_3^{-1}(K_1))$ 都是由两个长度为 $(1/3)^2$ 的区间组成，即

$$I_L \cap T_3^{-1}(K_1) = [0,1/9] \cup [2/9,1/3]$$

和

$$I_R \cap T_3^{-1}(K_1) = [2/3,7/9] \cup [8/9,1].$$

把 K_1 按 1/3 缩至 $I_L = [0, 1/3]$ 的子区间就得到 I_L 内的两个子区间，而把 K_1 按 1/3 收缩，翻转后放进 $I_R = [2/3, 1]$ 内得到 I_R 内的两个子区间. 总的集合

$$K_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

是 $4 = 2^2$ 个区间的并集，每个区间的长度都是 $1/9 = (1/3)^2$；K_2 内区间的总长度是 $(2/3)^2$，即 $\lambda(K_2) = (2/3)^2$.

利用归纳法重复这一过程可知

$$I_L \cap T_3^{-1}(K_{n-1})$$

和

$$I_R \cap T_3^{-1}(K_{n-1})$$

都是 2^{n-1} 个长度为 $(1/3)(1/3)^{n-1} = (1/3)^n$ 的区间的并集，而且

$$K_n = \left(I_L \cap T_3^{-1}(K_{n-1})\right) \cup \left(I_R \cap T_3^{-1}(K_{n-1})\right)$$

是 $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ 个长度均为 $(1/3)^n$ 的区间的并集；K_n 内区间的总长度是 $(2/3)^n$，即 $\lambda(K_n) = (2/3)^n$. 见图 10.5.2.

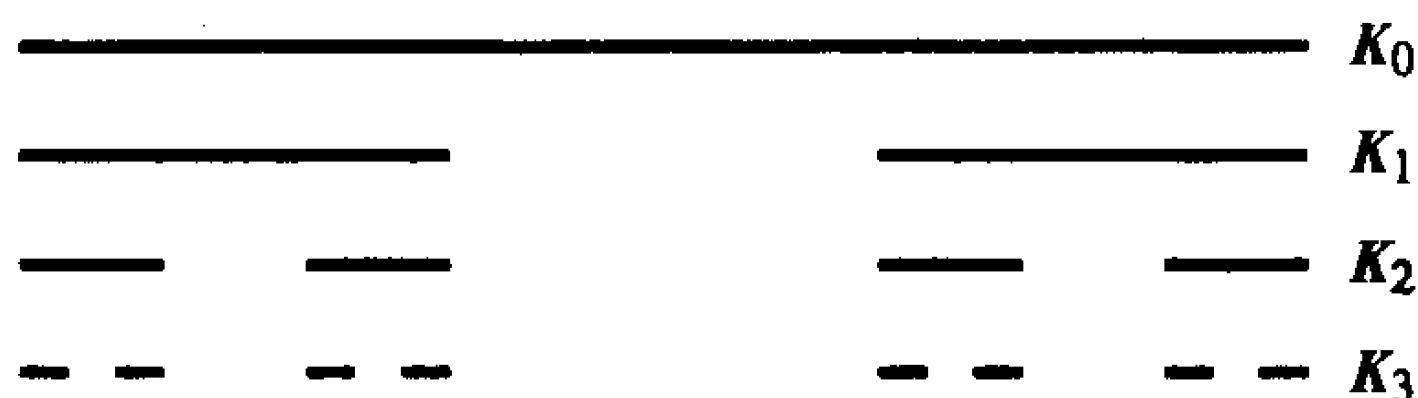


图 10.5.2　康托尔集的 $K_0 \cdots K_3$ 集

令

$$K = \{x : T_3^j(x) \in [0,1], 0 \leqslant j < \infty\}$$
$$= \bigcap_{n \geqslant 0} K_n.$$

394

因为在每个阶段，各区间中间的 1/3 区间被去掉，所以集 K 称为康托尔三分集(middle-third Cantor set). 集合 K 包含于每个集合 K_n 内，所以对任意 n 它的长度都小于 $(2/3)^n$. 因此，K 的"长度"或"勒贝格测度"是 0，即 $\lambda(K) = 0$. (11.4 节将对勒贝格测度进行比较全面的介绍.)

正如上一节中对帐篷映射 T_2 进行的探讨一样，可以用 T_3 的动力学而非实轴上的序来标记 K_n 内的各区间. 对于有限串 $s_0 s_1 \cdots s_{n-1}$，其中每个 s_j 等于 R 或 L，令

$$I_{s_0 s_1 \cdots s_{n-1}} = \{x : T_3^j(x) \in I_{s_j}, 0 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

特别地，$I_{LL} = [0, 1/9]$，$I_{LR} = [2/9, 1/3]$，$I_{RR} = [2/3, 7/9]$ 和 $I_{RL} = [8/9, 1]$. 参见图 10.5.3. 在这种情况下，这些区间对长度相同的不同字符串是不相交的，而且 K_n 是取遍所有可选符号串而得的 $I_{s_0 s_1 \cdots s_{n-1}}$ 的并集，即

$$K_n = \bigcup \{I_{s_0 s_1 \cdots s_{n-1}} : s_j \in \{L,R\}, 0 \leqslant j < n\}.$$

下面研究集合 K 的一些性质. 在每个阶段, 集合 K_n 都有 2^{n+1} 个端点, 用 E_n 表示, 因此

$$E_2 = \left\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\right\}.$$

令 E 表示所有这些集合的并, 也就是说

$$E = \bigcup_{n \geqslant 0} E_n,$$

我们称之为康托尔集 K 的端点(end points of the Cantor set K). 因为每个集合 E_n 是有限的, 所以并集 E 是可数(countable)集(即存在从正整数到 E 上的满射).

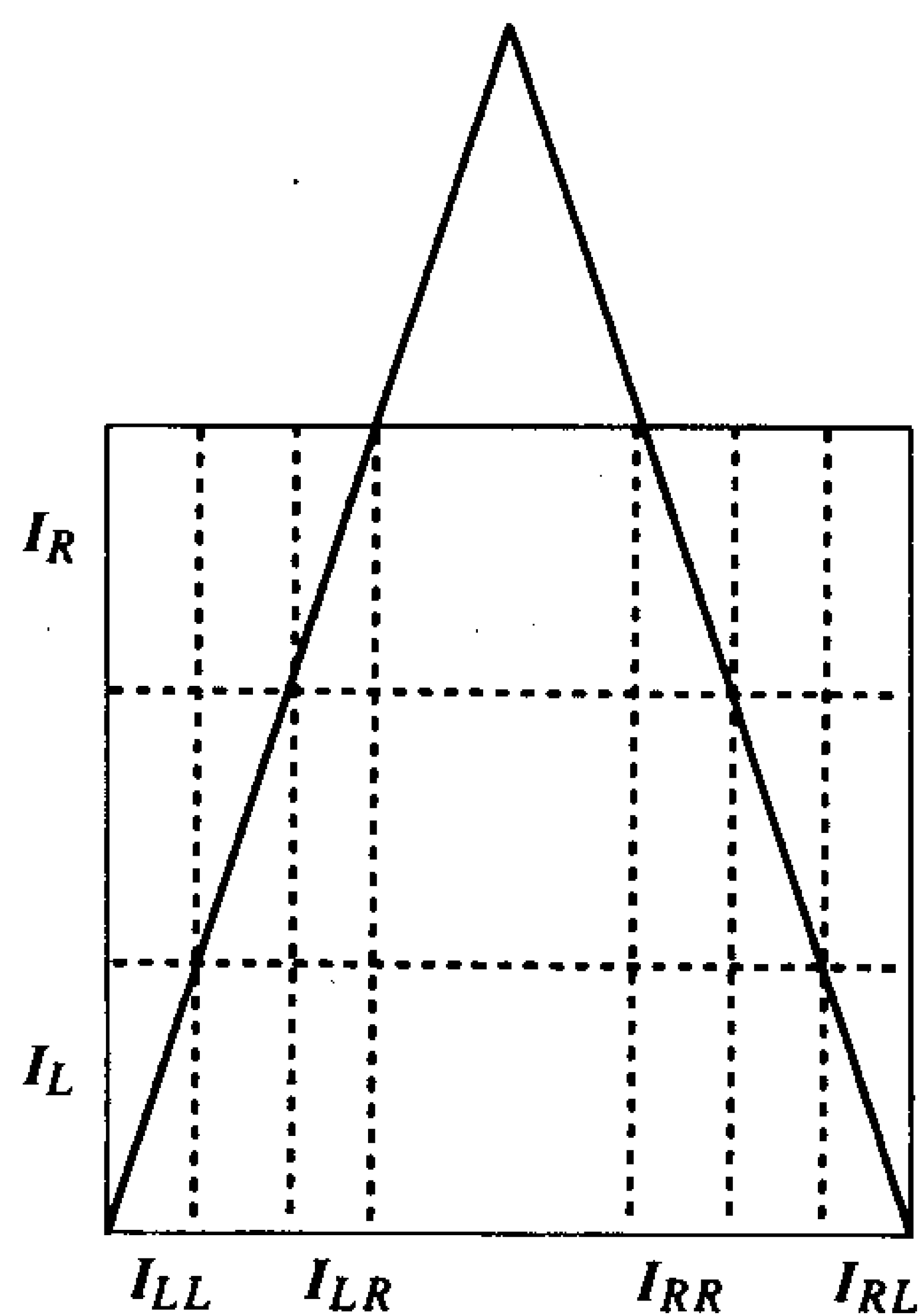


图 10.5.3　T_3 两个字符串的区间图

395

我们想知道的是康托尔集内除端点之外应该还有更多的点. 要证明这一点, 一种方法是证明康托尔集是不可数的, 而我们已证明了端点的集合是可数的. 无穷集 S 是不可数的(uncountable)是指它不是可数的(即不存在从正整数到集合 S 的满射). 由分析学知单位区间[0, 1]是不可数的. 见[**71**]或[**112**]. 在下面的定理中我们证明存在从康托尔集到单位区间[0, 1]上的一个满射, 所以康托尔集也是不可数的. 因此, 整个康托尔集内除端点之外还有很多点.

定理 10.5.2　(a)集合 K 中的点恰恰是由只含 0 和 2 的三进制表示的所有数, 而对 K 内的点的这种表示是唯一的; 集合 K 是不可数的.

(b)集合 E 是可数的. E 内的点的三进制表示式的结束方式或是连续重复出现 0(此时, 展开式是有限的)或连续重复出现 2.

(c)集合

$$K \setminus E \neq \varnothing,$$

且该集合内的点的三进制数表示只含 0 和 2, 且其结束方式不能连续重复出现 0 也不能连续重复出现 2.

证明　利用点的三进制表示来证明这一定理. [0, 1]内的点 x 可表示为

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j},$$

其中每个 a_j 等于 0, 1 或 2. 因为

$$\sum_{j \geqslant 1} \frac{2}{3^j} = \frac{2}{3} \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{3^j} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1,$$

所以可以用上述形式的展开式来表示数 1.

集合 K_1 和 K 并不包括开区间(1/3, 2/3), 其内的点满足 $a_1 = 1$ 或 1/3(作为表示的一部分). [2/3, 1]内的所有点的展开式以 $a_1 = 2$ 开始, 而[0, 1/3)内的所有点的展开式以 $a_1 = 0$

开始. 点 1/3 在 K_1 和 K 内，但在展开式中它只可用 0 和 2 表示：

$$\sum_{j\geqslant 2}\frac{2}{3^j}=\frac{2}{3^2}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{3^j}=\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3^2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}.$$

因此，K_1 和 K 内的所有点的表示式都满足 $a_1=0$ 或 $a_1=2$. K_1 内区间的左端点的展开式都是以 0 的重复而结束，而右端点的展开式都是以 2 的重复而结束.

在第二阶段，

396

$$K_2=K_1\setminus((1/9,2/9)\cup(7/9,8/9)).$$

区间(1/9, 2/9)被去除，它包含始于展开式 $0/3+1/3^2$ 的点，区间(7/9, 8/9)也被去除，它包含始于展开式 $2/3+1/3^2$ 的点. 这两个区间的点的展开式中都有一个 1. 集

$$\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$$

内的点满足 $a_2=0$，而集

$$\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$$

内的点满足 $a_2=2$. 同理，右端点都可以用 2 的重复表示：

$$\frac{1}{9}=\sum_{j\geqslant 3}\frac{2}{3^j}$$

和

$$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\sum_{j\geqslant 3}\frac{2}{3^j}.$$

因此，K_2 和 K 内的所有点的展开式都满足 $a_2=0$ 或 $a_2=2$. K_2 内区间的左端点的展开式都以 0 的重复而结束，而右端点的展开式都以 2 的重复而结束.

在第 n 个阶段，展开式中需要含有 $1/3^n$ 的所有点都被去除. K_n 右端点的展开式都以 2 的重复而结束，而 K_n 左端点的展开式都以 0 的重复而结束. 因此，K 内的任一点都可使用仅含 0 和 2 而不是 1 的三进制来表示. 这样选择后，则对 K 内的任一点来说，其三进制表示都是唯一的.

从 K 到[0, 1]的映射 F 可定义为

$$F\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{3^j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(a_j/2)}{2^j}.$$

这一映射实现了所有可能的二进制表示，所以 F 是到[0, 1]的满射. 因为[0, 1]是不可数的，所以 K 也是不可数的.

因为 E 是可数的，所以 $K\setminus E$ 是不可数集且 $K\setminus E\neq\varnothing$. ■

例 10.5.3 为了找到 $K\setminus E$ 中的点，取一个既不以 0 的重复也不以 2 的重复而结束的二进制数. 例如，若 j 为奇数时 $a_j=0$ 而 j 为偶数时 $a_j=2$，则

$$x=\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\cdots=\frac{2}{9}+\frac{2}{9^2}+\cdots$$

$$= \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}}\right)$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{4}.$$

因此，1/4 在 **K** 内而不在 **E** 内. ■

397

例 10.5.4　现在验证点 9/13 是否在 **K** 内. 为了找到其三进制表示，乘以 3 并取其整数部分可得

$$3 \cdot \frac{9}{13} = \frac{27}{13} = 2 + \frac{1}{13}, \qquad a_1 = 2,$$

$$3 \cdot \frac{1}{13} = 0 + \frac{3}{13}, \qquad a_2 = 0,$$

$$3 \cdot \frac{3}{13} = 0 + \frac{9}{13}, \qquad a_3 = 0,$$

$$3 \cdot \frac{9}{13} = \frac{27}{13} = 2 + \frac{1}{13}, \qquad a_4 = 2,$$

这一过程开始出现重复，所以有 $a_{1+3j} = 2$，$a_{2+3j} = a_{3j} = 0$. 既然展开式中仅含 0 和 2，所以点 9/13在 **K** 内. 因为展开式中不以 0 或 2 的重复而结束，所以该点不在 **E** 内. ■

区间 $\boldsymbol{I}_L = [0,\ 1/3]$ 和 $\boldsymbol{I}_R = [2/3,\ 1]$ 可用于定义 **K** 内点的迭路，并可得到下面的定理.

定理 10.5.5　*考虑帐篷映射 T_3，并用其定义康托尔三分集* **K**.

(a) *T_3 的周期点在* **K** *内是稠密的.*

(b) *映射 T_3 限制到* **K** *上有对初始值的敏感依赖性.*

(c) *映射 T_3 在* **K** *上是拓扑传递的.*

逻辑斯谛函数族

有关帐篷映射 T_3 的结论也适用于 $a > 4$ 时的逻辑斯谛函数族 $g_a(x) = ax(1-x)$. 当 $4 < a < 2 + \sqrt{5}$时，在康托尔集中点的导数的绝对值可能比 1 小，此时证明很难。当 $a > 2 + \sqrt{5}$时，在康托尔集中点的导数绝对值总大于 1，然而为简化讨论并得到端点的具体值，取 $a = 5$ 的逻辑斯谛函数 $g(x) = g_5(x)$. 见图 10.5.4.

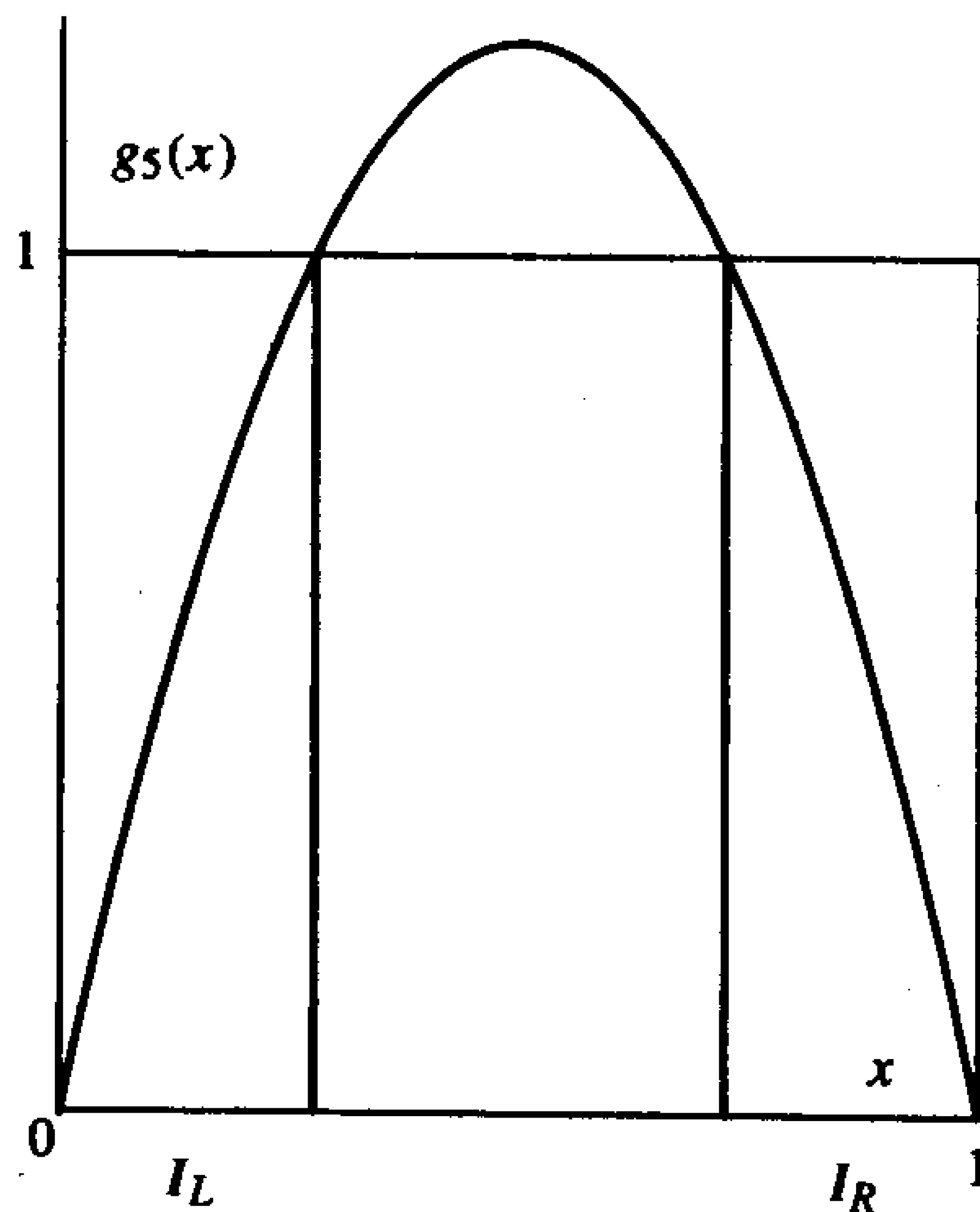


图 10.5.4　逻辑斯谛映射 g_5 的曲线图

通过解 $g(x) = 1$ 可求得 g 映射到 1 的点，

$$5x - 5x^2 = 1$$

$$0 = 5x^2 - 5x + 1$$

和

$$x_{\pm} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{10} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

g 的导数为 $g'(x)=5-10x$ 且

$$g'(x_-)=5-5+\sqrt{5}=\sqrt{5}>1$$

$$g'(x_+)=5-5-\sqrt{5}=-\sqrt{5}<-1.$$

因为 g 的导数的绝对值在 $I_L\cup I_R$ 内比在点 $x_\pm$ 处要大，所以 $|g'(x)|\geqslant\sqrt{5}, x\in I_L\cup I_R$.

映射 g 将每个区间 I_{s_0} 都映满 $[0,\ 1]$. 令 x_0 和 x_1 是 I_{s_0} 的端点且 $g(x_0)=0$，$g(x_1)=1$. 由中值定理可知，x_0 和 x_1 之间存在一点 z 使得

$$1-0=g'(z)(x_1-x_0).$$

取绝对值可得

$$\begin{aligned}1&=|g'(z)|\cdot|x_1-x_0|\\&\geqslant\sqrt{5}\cdot|x_1-x_0|\end{aligned}$$

$$|x_1-x_0|\leqslant 1/\sqrt{5}.$$

因此，I_L 和 I_R 的长度都小于 $1/\sqrt{5}<0.5$，即 $\lambda(I_{s_0})\leqslant 1/\sqrt{5}$.

依次用归纳法可知某一区间 $I_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 映满 $I_{s_1\cdots s_{n-1}}$. 令 $I_{s_0\cdots s_n}$ 的端点是 x_0 和 x_1，而且它们被映射到 $I_{s_1\cdots s_{n-1}}$ 的端点 y_0 和 y_1 上. 由中值定理可知，x_0 和 x_1 之间存在一点 z 满足

$$y_1-y_0=g'(z)(x_1-x_0).$$

取绝对值可得

$$|y_1-y_0|=|g'(z)|\cdot|x_1-x_0|\geqslant\sqrt{5}\cdot|x_1-x_0|$$

$$|x_1-x_0|\leqslant\frac{|y_1-y_0|}{\sqrt{5}}\leqslant\frac{1}{(\sqrt{5})^n},$$

其中，最后一个不等式是利用归纳假设得到的. 因此任何 $I_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 的长度都小于 $(\sqrt{5})^{-n}$，即 $\lambda(I_{s_0\cdots s_{n-1}})\leqslant(\sqrt{5})^{-n}$. 令 K_n^g 是所有可能的 $I_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 的并集. 在 K_n^g 内有 2^n 个区间，(K_n^g) 的总长度小于或等于 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$. 当 n 趋于无穷时，K_n^g 总长度的界趋于 0.

集合

398 ~ 399

$$\Lambda_g=\bigcap_{n\geqslant 0}g^{-n}([0,1])$$

具有前面所述康托尔三分集的许多类似性质：它是不可数的，其总"长度"或勒贝格测度为 0.

定理 10.5.6　*考虑逻辑斯谛映射 $g=g_a$，$a\geqslant 2+\sqrt{5}$. 考虑其不变集*

$$\Lambda_g=\bigcap_{n\geqslant 0}g^{-n}([0,1]).$$

(a) Λ_g 的勒贝格测度为 0.

(b) g 的周期点在 Λ_g 内是稠密的.

(c) 映射 g 限制在 Λ_g 上有对初始值的敏感依赖性.

(d) 映射 g 在 Λ_g 上是拓扑传递的.

T_3 的不变集 K 与 g 的不变集 Λ_g 还有其他一些性质，其中 $g(x)=5x(1-x)$. 尽管这里用

的都是分析术语，但我们很快给出一些定义并断言这一不变集有这样的性质.

定义 10.5.7　称$\mathbb{R}$内的集合 S 是闭的(closed)，如果它的余集是开集(即对不在 S 内的任意点 p，存在 $\delta>0$ 使开区间 $(p-\delta, p+\delta)$ 与集合 S 不相交).

闭集的交集也是闭集. 令 S 是 T_3 的康托尔集 K 或 g 的康托尔集 Λ_g，其中 $g(x)=ax(1-x)$，$a\geq 2+\sqrt{5}$. 因为 S 是闭集的交集(其中每个闭集是有限闭区间的并集)，所以 S 也是闭集.

定义 10.5.8　对于直线$\mathbb{R}$上的集合 S，S 的内部(interior) $\mathrm{int}(S)$ 是满足下面条件的所有点 p 的集合，即存在 $\delta>0$ 使开区间 $(p-\delta, p+\delta)$ 完全包含于 S 内. 因此，当集合 S 具有如下性质时有空内部：对于 S 内的任意一点 p，都有$\mathbb{R}\setminus S$ 内的点，可任意接近 p(即对 S 内的任意一点 p 和任意 $\delta>0$，区间 $(p-\delta, p+\delta)$ 中都含有 S 外的点).

称有空内部的闭集是无处稠密的(nowhere dense).

在高维情形下，S 是无处稠密的可用完全不连通性代替. 称集合 S 是完全不连通的(totally disconnected)，如果对于 S 内的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，都存在两个不相交的开集 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 使得 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$ 且 $S\subset\boldsymbol{U}\cup\boldsymbol{V}$.

因为 $\boldsymbol{I}^g_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 的长度趋于 0，所以集合 Λ_g 是无处稠密的.

定义 10.5.9　称集合 S 为是完备的(perfect)，如果对于 S 内的任意一点 p，在 S 内存在另一点 $x_i\neq p$，当 i 趋于无穷时 x_i 收敛于 p(即关于 p 的任何开区间 $(p-\delta, p+\delta)$ 内都包含有 S 内不同于 p 的点).

称$\mathbb{R}$内任何闭的、无处稠密的完备集为康托尔集. 在高维情形下，称闭的、完全不连通的完备集为康托尔集.

定理 10.5.10　令 S 是 T_3 的康托尔集 K 或 g 的康托尔集 Λ_g，$g(x)=ax(1-x)$，$a\geq 2+\sqrt{5}$. 则 S 是一个康托尔集，即它具有如下性质：

(a)集合 S 是闭的.

(b)集合 S 是完备的.

(c)集合 S 有空内部，所以它是无处稠密的.

(d)集合 S 是完全不连通的.

证明　(a)集合 S 是闭集的交集，所以它是闭集. (b) S 内 p 点的形如 $(p-\delta, p+\delta)$ 的任意区间都包含不同于点 p 的端点，所以 S 是完备的. (c)在第 n 个阶段的区间可任意短，所以 $(p-\delta,p+\delta)$ 包含不在 S 内的点，因此 S 是无处稠密的. (d)两个不同的点 x 和 y 有不同的符号序列 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$，因此存在包含 x 但不包含 y 的集 $\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_{n-1}}$，所以有包含 $\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 的开区间 $\boldsymbol{U}$ 和包含 $S\setminus\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_{n-1}}$ 的开区间的并集 $\boldsymbol{V}$，而且 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是不相交的，这就证明 S 是完全不连通的. ■　400

10.6　子位移：分段扩张区间映射

前三节利用符号动力学(迭路)来寻找区间或不变集内的稠密轨道，并证明了映射有对初始值的敏感依赖性. 然而迄今为止的所有情况都允许区间之间可进行所有可能的转换. 另一方面，10.1 节中利用具有某些转换的转换图证明了一个映射有不同周期的周期点. 这一节将转换图与符号动力学相结合，并证明其他一些映射在某区间上是拓扑传递的. 这种对某些容许符

号串的限制称为有限型子位移(subshift of finite type). 若不存在这些限定条件，则称 Σ_n^+ 为 n 个符号上的全位移(full shift on n-symbols).

在探讨 Sharkovskii 定理的转换图一节中，我们并未假设导数绝对值大于 1，所以只证明了周期轨道的存在性，但未证明唯一性. 这一节将证明导数绝对值大于 1 时周期轨道的唯一性.

首先来看一个引理，它是关于映射的扩张或伸展的，该映射的导数总大于给定常数(通常大于 1).

引理 10.6.1　设 $\alpha>1$ 且 f 是从闭区间 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续可微映射，若对所有 $a<x<b$ 都有 $|f'(x)|\geqslant\alpha$，则

$$|f(x_1)-f(x_2)\geqslant\alpha|x_1-x_2|$$

对 $[a, b]$ 内的所有 x_1 和 x_2 都成立.

证明　由中值定理可知

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(x_3)(x_1-x_2),$$

其中，x_3 介于 x_1 和 x_2 之间，所以

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |f'(x_3)|\cdot|x_1-x_2|\\ &\geqslant\alpha|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

■

下面的例题在两相邻区间上有大于 1 的导数，且不可微点是这两个区间的公共端点.

例 10.6.2　考虑屋顶映射(rooftop map)f:

$$f(x)=\begin{cases}ax+c & 0\leqslant x\leqslant c\\ (1-x)b & c\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $a>1$，$b>1$，且 $0<c<1/2$. 参见图 10.6.1. 为保证映射在 $x=c$ 处的取值均为 1，需

$$ac+c=1$$

和

$$(1-c)b=1.$$

由第一个方程可得

$$c=\frac{1}{1+a}.$$

401

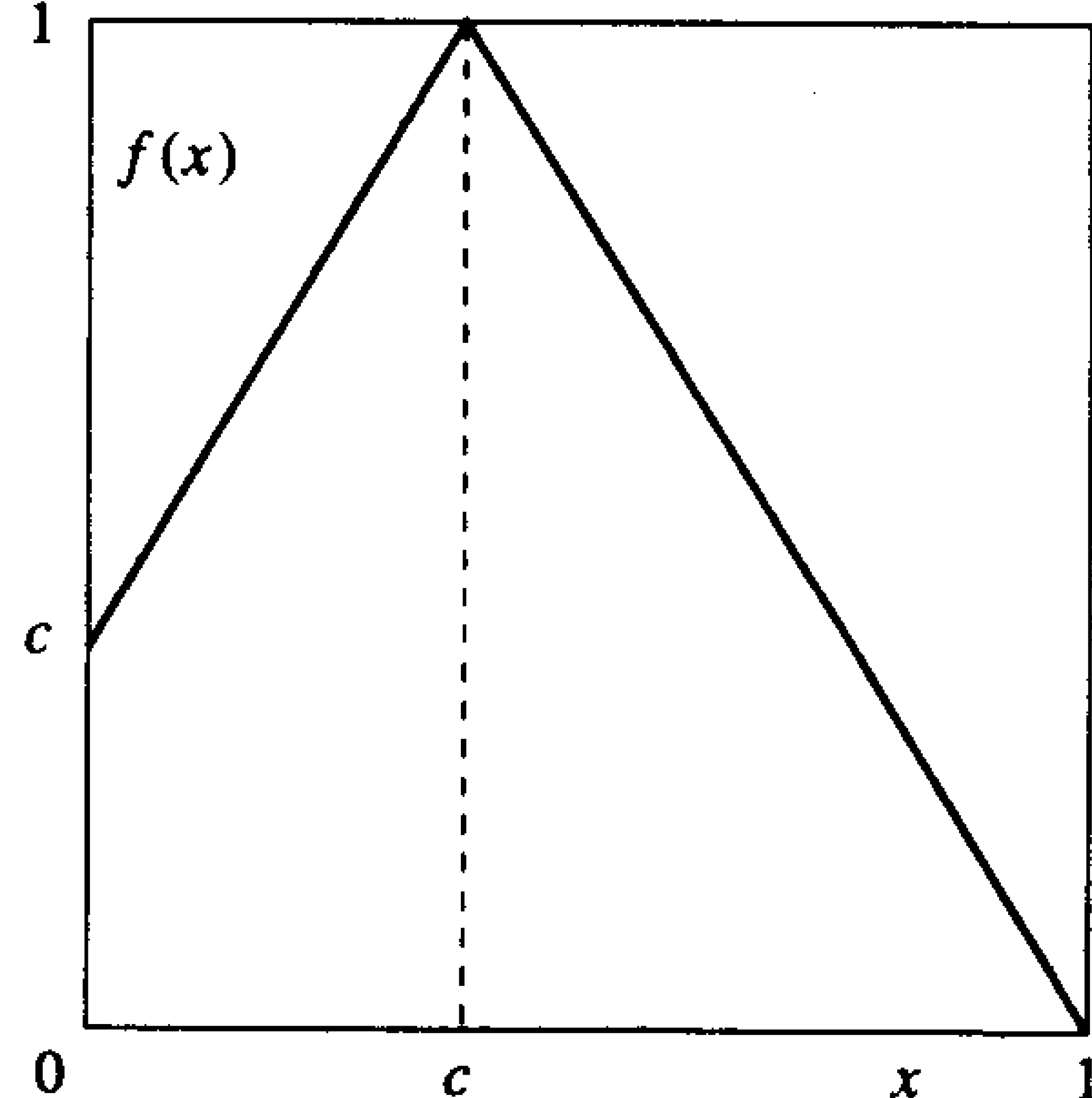


图 10.6.1　屋顶映射

这种选择使 f 连续且在两个开区间 $(0, c)$ 和 $(c, 1)$ 上都是可微的，而且其导数的绝对值为

$$|f'(x)|=\begin{cases}a & 0\leqslant x<c\\ b & c<x\leqslant 1.\end{cases}$$

因此，$|f'(x)|\geqslant\min\{a, b\}\equiv\alpha>1$，称 α 为扩张常数(expanding constant). 由于

$$f([0,c])=[c,1]$$

和

$$f([c,1])=[0,1]=[0,c]\cup[c,1],$$

所以左区间的像覆盖右区间，而右区间的像不仅覆盖左区间还覆盖右区间. 因此，转换图 $\mathcal{G}$ 只允许 L 后接 R，而 R 可后接 R 或 L. 任何遵循这些法则的序列 $s=s_0s_1\cdots$ 都称为容许符号序列

(allowable symbol sequence). 令 Σ_G^+ 是所有容许符号序列集，因为容许序列法则也可以利用映射的转换图来表达，因此 Σ_G^+ 也称为有限型子位移(subshift of finite type).

I_L 的长度是 c，而 I_R 的长度是 $1-c$，所以每个区间的长度都小于或等于 $1-c$. 令 $s=\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$是基于转换图的容许序列. 区间 $I_{s_0\cdots s_n}$映射到 $I_{s_1\cdots s_n}$，所以由引理 10.6.1 可知，$I_{s_1\cdots s_n}$的长度比 $I_{s_0\cdots s_n}$长度的 α 倍还要大，即

$$\alpha\lambda(I_{s_0\cdots s_n}) \leqslant \lambda(I_{s_1\cdots s_n})$$

和

$$\lambda(I_{s_0\cdots s_n}) \leqslant \alpha^{-1}\lambda(I_{s_1\cdots s_n}).$$

对 n 进行归纳可得

$$\lambda(I_{s_0\cdots s_n}) \leqslant \alpha^{-n}\lambda(I_{s_n}) \leqslant \alpha^{-n}(1-c).$$

因此，对此符号序列来说，对所有正数 n，这些区间的交集都包含一个单点 $k(s_0s_1\cdots)$，即

$$\bigcap_{n\geqslant 0} I_{s_0\cdots s_n} = \{k(s_0s_1\cdots)\} \neq \varnothing.$$

402

最简单的情况是：$b=a$(即两斜率有相同的绝对值)，此时需

$$1 = (1-c)a = \left(1-\frac{1}{1+a}\right)a$$

$$= \frac{a^2+a-a}{a+1},$$

$$a+1 = a^2$$

和

$$0 = a^2 - a - 1,$$

所以

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

■

下面给出出现于例 10.6.2 中 f 的性质的定义.

定义 10.6.3　称从 $\mathbb{R}$ 到其自身的映射 f 为区间 $[a, b]$ 上的分段连续扩张(continuous piecewise expanding)，如果 f 在 $[a, b]$ 上是连续的且存在有限点集

$$a = p_0 < p_1 < \cdots < p_N = b$$

和常数 $\alpha>1$ 使得对 $p_0<x<p_N$ 且 $x\neq p_j$，$j=1, \cdots, N-1$，有 $|f'(x)| \geqslant \alpha$，称数 α 为扩张常数(expanding constant)或伸长因子(stretching factor). 在我们所有例题中，导数在每个区间 (p_{j-1}, p_j) 上都是常数，所以 $\alpha = \min\{|f'(x_j)|\}$，其中 x_j 是 (p_{j-1}, p_j) 内的任意一点. 令 $I_j=[p_{j-1}, p_j]$ 表示由点 $\{p_0, p_1, \cdots, p_N\}$ 引出的闭区间，$\mathrm{int}(I_j)=(p_{j-1}, p_j)$ 表示其相应的开区间，且 f 在这些开区间上是可微的. 我们将点 $\{p_0, \cdots, p_N\}$ 或区间 $\{I_j\}_{j=1}^{N}$ 称作是扩张映射的分割(partition).

帐篷映射是连续分段扩张映射的一个例子. 双倍映射是分段扩张的但不是连续的.

f 是连续的意味着 f 在 p_j 点两端的极限值相同，且在 p_j 附近无任何跳跃点.

这一部分得出的许多结果适用于 f 在 p_j 有不连续跳跃点的情形：本节最后部分对此进行了

总结但并未给出适用于这些函数的定理.

在本节所给出的所有分段扩张映射的例题(斜率大于 2 的帐篷映射除外)中，区间$[a, b]$是正不变的，即$f([a, b])\subset[a, b]$. 为了在其他情况下也可使用该定义，现给出更一般的定义.

定义 10.6.4　设$\{\boldsymbol{I}_1, \cdots, \boldsymbol{I}_N\}$是实直线上内部不相交的闭区间集，即

$$\operatorname{int}(\boldsymbol{I}_i)\cap\operatorname{int}(\boldsymbol{I}_j)=\varnothing,\quad i\neq j.$$

设存在一定义在区间的并$\bigcup_{j=1}^{N}\boldsymbol{I}_j$上的连续函数$f$. 例如,这些区间可能是分段扩张映射的区间也可能是斜率为 3 的帐篷映射的不相交区间$\boldsymbol{I}_L$和$\boldsymbol{I}_R$. 说分割$\{\boldsymbol{I}_1,\cdots,\boldsymbol{I}_N\}$具有对$f$的马尔可夫性质(Markov property for f)或是对f的马尔可夫分割(Markov partition for f),如果只要$\boldsymbol{I}_j$内部在f下的像与$\boldsymbol{I}_i$内部相交则像$f(\boldsymbol{I}_j)$就包含$\boldsymbol{I}_i$,即若

403

$$f(\operatorname{int}(\boldsymbol{I}_j))\cap\operatorname{int}(\boldsymbol{I}_i)\neq\varnothing,$$

则

$$f(\boldsymbol{I}_j)\supset\boldsymbol{I}_i.$$

对于满足$f([a, b])\subset[a, b]$的连续分段扩张映射，该条件可表述为：$\boldsymbol{I}_j$的每个区间的像都是这些区间中某一些的并，即对适当的$i_{j,1}$到$i_{j,\ell}$(其选择依赖于j的值)有

$$f(\boldsymbol{I}_j)=\boldsymbol{I}_{i_{j,1}}\cup\cdots\cup\boldsymbol{I}_{i_{j,\ell}},$$

所以，区间$\boldsymbol{I}_j$的每个端点都映射到其他区间的端点. 在例题 10.6.2 中，$f(\boldsymbol{I}_L)=\boldsymbol{I}_R$且$f(\boldsymbol{I}_R)=\boldsymbol{I}_L\cup\boldsymbol{I}_R$，所以这就是该映射的马尔可夫分割.

如果马尔可夫分割中区间的并集不是不变的(例如斜率大于 2 的帐篷映射)，则端点所成之集的像必在这些区间的内部之并集之外. 为将这一条件说得更清楚些，可设$\boldsymbol{I}_j=[a_j, b_j]$，$0\leqslant j\leqslant N$且令

$$\boldsymbol{E}=\{a_1,\cdots,a_N,b_1,\cdots,b_N\}$$

是所有端点的集合. 设f的导数在这些区间的并集上不为 0，则马尔可夫性质等同于如下假设：

$$f(\boldsymbol{E})\cap\left(\bigcup_{j=1}^{k}\operatorname{int}(\boldsymbol{I}_j)\right)=\varnothing.$$

在这一假设下，对适当的$i_{j,1}$到$i_{j,\ell}$(其选择依赖于j的值)有

$$f(\boldsymbol{I}_j)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{k}\boldsymbol{I}_j\right)=\boldsymbol{I}_{i_{j,1}}\cup\cdots\cup\boldsymbol{I}_{i_{j,\ell}}.$$

在给出上面例题所例证的一般结果之前，先给出一个没有马尔可夫分割的例题.

例 10.6.5　设$f(x)$定义为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}x & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}\\[2mm]\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{3}x & \dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

则$f(0)=2/3$，$f^2(0)=f(2/3)=4/3^2$，$f^3(0)=f(4/3^2)=20/3^3$，而且对不是 3 的倍数的整数i有$f^j(0)=i/3^j$. 所有点$f^j(0)$必在马尔可夫分割之中. 因为该点集不重复，所以是无限的，故

有限个分点的马尔可夫分割不可能存在(即 f 没有马尔可夫分割). 即使该函数的斜率是有理数，它也不会有马尔可夫分割. ■

例 10.6.2 的分析实际上证明了定理 10.6.8 的前两部分对一般有限型子位移的情形成立. 在陈述该定理前，先来看具有拓扑传递性的转换图需要满足的其他一些性质.

定义 10.6.6　称一转换图 $\mathcal{G}$ 是可约的(reducible)，如果存在一对顶点 i 和 j 使得 $\mathcal{G}$ 内不存在从顶点 i 到 j 的(有限)路径. (如果 $i=j$，则意味着在图中不存在离开又可返回这一顶点的路径.)称转换图 $\mathcal{G}$ 是不可约的(irreducible)，如果它不是可约的(即对于每对顶点 i 和 j，包括 $i=j$ 的情况，$\mathcal{G}$ 内都存在从顶点 i 到 j 的路径).

例 10.6.2 中的转换图是不可约的.

404

例 10.6.7　图 10.6.2 给出的转换图是可约的：没有从顶点 3 或 4 到顶点 1 或 2 的转换. 下述分段扩张映射函数

$$f(x)=\begin{cases}2-2x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 4(x-1) & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 8-2x & 2\leqslant x\leqslant 3\\ -4+2x & 3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

具有这种可约的转换图. ■

具有可约转换图的函数在所有区间之并集上是不可能拓扑传递的.

下面的定理总结了连续分段扩张映射的有关结果. 该定理包含前面讨论过的的帐篷映射、逻辑斯谛映射以及有康托尔不变集的帐篷映射的一些结果. 但该定理不适用于双倍映射，因为它是不连续的.

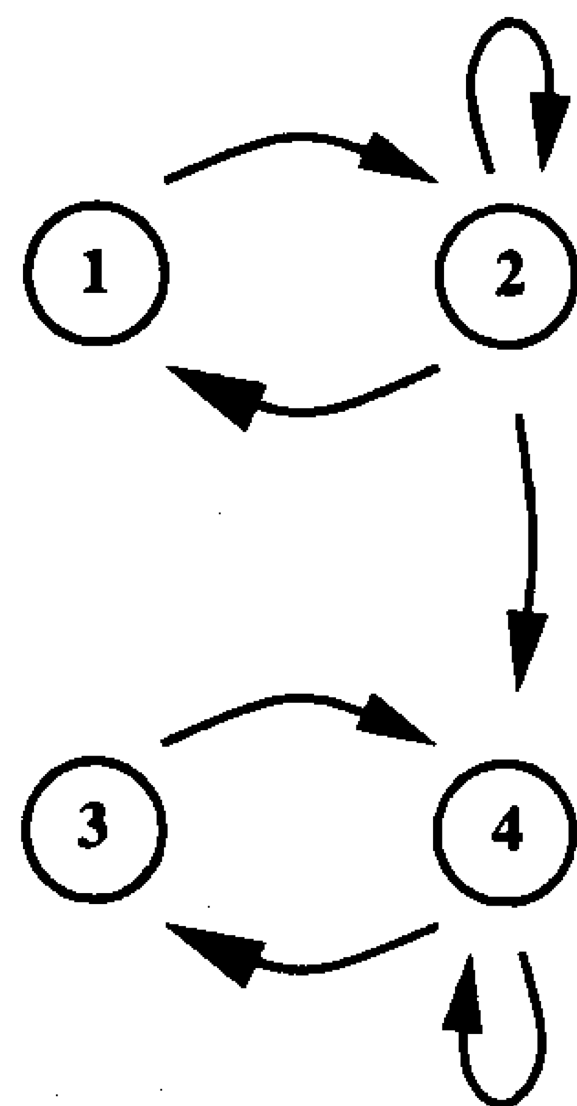


图 10.6.2　可约转换图

定理 10.6.8　设 f 是一个连续分段扩张映射，其马尔可夫分割是 $p_0<p_1<\cdots<p_N$，$N\geqslant 2$ 且其扩张常数 $\alpha>1$. 令 $\{\boldsymbol{I}_j\}_{j=1}^{N}$ 表示由点 p_j 导出的区间. L 是这些区间的长度的最大值，即

$$L=\max\{p_1-p_0,\cdots,p_N-p_{N-1}\}.$$

令 $\mathcal{G}$ 是由分割导出的转换图，并令 $\Sigma_{\mathcal{G}}^{+}$ 是映射的所有容许序列集，它是基于 N 个符号的转换图，每个符号都对应于转换图 $\mathcal{G}$ 中的一个顶点.

(a)任何有限容许符号串 $s_0\cdots s_n$ 对应于长度至多是 $\alpha^{-n}L$ 的非空闭区间 $\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_n}$.

(b)$\Sigma_{\mathcal{G}}^{+}$ 内的一个无限容许序列 $\boldsymbol{s}$ 对应于 $\mathbb{R}$ 内的唯一点 $x_0=k(\boldsymbol{s})$，且 x_0 满足 $f^n(x_0)\subset\boldsymbol{I}_{s_n}$，$n\geqslant 0$，即

$$\{k(\boldsymbol{s})\}=\bigcap_{n\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_n}.$$

(c)若 $\boldsymbol{s}$ 是 n-周期容许序列，则 $k(\boldsymbol{s})$ 是 f 的 n-周期点. 若 $\boldsymbol{s}$ 是最终 n-周期容许序列，则 $k(\boldsymbol{s})$ 必是 f 的最终 n-周期点. 若 $k(\boldsymbol{s})$ 既不是周期点也不是最终周期点，则 $\boldsymbol{s}$ 就既不是周期序列也不是最终周期序列.

405

(d)若 $[p_0,\ p_N]$ 是 f 的正不变集，则 f 在 $[p_0,\ p_N]$ 上具有对初始值的敏感依赖性. 即使 $[p_0,\ p_N]$ 不是 f 的正不变集，f 限制在不变集

$$\Lambda_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}([p_0, p_N])$$

上仍具有对初始值的敏感依赖性.

(e)若其转换图是不可约的且$f([p_0, p_N]) = [p_0, p_N]$，则$f$在$[p_0, p_N]$上是拓扑传递的. 一般说来，若转换图是不可约的，则f在

$$\Lambda_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}([p_0, p_N])$$

上是拓扑传递的.

证明　(a)、(b)和(c)的证明同前.

为了利用符号动力学证明(d)，当转换图不可约时证明较易，但不必这样假设. 而且因为该映射是扩张的，所以必存在一顶点使得多于一条路径从其出发. 这一事实允许我们可从一符号序列在此顶点附近构造一点，它走向很不同的一点，这种情况的证明留给读者.

证明(e)需要定义包含所有长度的容许串的符号序列$\boldsymbol{s}^*$. 令$\boldsymbol{w}_{ij}$是一个有限符号串且使$i\boldsymbol{w}_{ij}j$是始于i终于j的容许串. 若j在i之后，则$\boldsymbol{w}_{ij}$可被取作是一个空串. 现在令$\boldsymbol{s}^*$是这样的一个无限序列：从1开始，之后是$\boldsymbol{w}_{12}$，然后是2，如此下去一直到$\boldsymbol{w}_{k-1k}$，后接k. 这样就给出了长度为1的所有符号串；接下来写出含两个符号的所有容许串，并要求它们之间的转换使得整个序列是容许的；利用归纳法继续写出含n个符号的所有的容许符号串，之间的转换也使得整个序列是容许的. 这样就可写出$\boldsymbol{s}^*$所有可能的有限容许符号串. 令$x^* = k(\boldsymbol{s}^*)$是与$\boldsymbol{s}^*$相对应的点，由前面的证明可知，$x^*$的轨道在$[p_0, p_N]$内是稠密的. ■

注 10.6.9　点x^*(的轨道)穿过所有的区间$\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_n}$. 为讨论这一点设所有转换是容许的. 对于某个进行了100次迭代的符号串，$f^j(x^*)$在区间$\boldsymbol{I}_1$内. 之后，它穿过区间串$\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$，…，$\boldsymbol{I}_N$一百万次，所以只根据过去和现在的位置是根本不可能预测出轨道未来的行为，这一特点使得该轨道是混沌的(chaotic).

有时我们考虑不连续扩张映射，比如双倍映射. 此时，除了可能给出一个子区间的端点的序列之外，所有容许序列都与轨道相对应. 对双倍映射来说，若令$D(1/2) = 0$且$D(1) = 0$，则穿过点1/2的轨道结束于符号序列10^∞(即1/2在$\boldsymbol{I}_1$内且对所有$j > 1$，$D^j(1/2) = 0$在$\boldsymbol{I}_0$内). 因此，没有点的符号序列是以01^∞结束的. (如果利用$D(1/2) = 1$且$D(1) = 1$，确有一点对应于符号序列01^∞，但就没有点对应于符号序列10^∞.)问题的关键是符号动力学可应用于分析双倍映射或其他分段扩张的不连续映射，但前面定理的并不能直接套用.

有限型子位移的周期点

10.1节利用了转换图来确定周期点，本节要介绍的是转换矩阵，它使得有限型子位移周期点的计算变得更容易.

406

定义 10.6.10　设有N个顶点的转换图$\mathcal{G}$，用1，…，N表示N个顶点. 关联于子位移$\Sigma_{\mathcal{G}}$的转换矩阵(transition matrix)是由0和1构成的$n \times n$阶矩阵$\boldsymbol{T} = (t_{ij})$使得若存在从顶点$i$到顶点$j$的转换，则$t_{ij} = 1$，而这种转换不存在时$t_{ij} = 0$. 令$\Sigma_T$是符号序列$\boldsymbol{s} = \{s_k\}_{k=0}^{\infty}$的集合，其中

每个转换 s_ks_{k+1} 都是存在的，所以 $t_{s_ks_{k+1}}=1$. 据此定义知 $\Sigma_T=\Sigma_G$. 令 σ_T 是位移映射在 Σ_T 上的限制，称具此映射 σ_T 的空间 Σ_T 为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的有限型子位移(subshift of finite type for the matrix $\boldsymbol{T}$)，有时也称其为拓扑马尔可夫链(topological Markov chain).

若从转换矩阵而不是从转换图开始，则需明确它必有的一些性质. 转换矩阵 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$ 必须满足下面的性质：(i)它是 $n\times n$ 阶方阵，其中每个元素 t_{ij} 为 0 或 1. (ii)对于 1 和 n 之间某固定的 i，行元素和 $\sum_j t_{ij}\geqslant 1$.(这意味着从符号 i 到达其他符号是可能的.)注意到若 $\sum_i t_{ij}=0$，则无返回到符号 j 的途径.

称有限符号串 $\boldsymbol{w}=s_k\cdots s_{k+m}$ 为容许字符(allowable word)或容许串(allowable string)，如果 $t_{s_js_{j+1}}=1$，$j=k$，…，$k+m-1$.

$\boldsymbol{T}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{T})$ 给出了自我相随的符号的个数(即这样的符号 s，使得 s^∞ 是容许符号序列). 这些序列与位移映射的不动点相对应，因此，$\boldsymbol{T}$ 的迹给出了位移映射 σ_T 的不动点的个数. 下面的定理给出了高次幂的相应结果.

定理 10.6.11　令 $\boldsymbol{T}$ 是一个转换矩阵，Σ_T 是其相应的位移空间，且位移映射为 σ_T，则 Σ_T 上 σ_T^k 不动点的个数 $N(k)$ 等于 $\boldsymbol{T}^k$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}^k)$.

这个定理可从下面关于从符号 i 到符号 j 的长度为 $k+1$ 的字符串的个数的引理得到.

引理 10.6.12　设 $\boldsymbol{T}^k$ 的第 ij 个元素是 p，即 $(\boldsymbol{T}^k)_{ij}=p$，则存在 p 个始于 i 终于 j 且长度为 $k+1$ 的容许符号串(即形式为 $is_1s_2\cdots s_{k-1}j$ 的符号串).

证明　对 k 利用归纳法进行证明. 令 $N(k;\ i,\ j)$ 是始于符号 i 终于符号 j 且长度为 $k+1$ 的符号串的个数.

当 $k=1$ 时结论成立，因为 $(\boldsymbol{T})_{ij}$ 等于 0 或 1，取决于从 i 到 j 的转换是否存在(即符号串 ij 是否存在)，$(\boldsymbol{T})_{ij}=N(1;\ i,\ j)$.

设对任意的 i 和 j 结论对 $k-1$ 成立. 则由矩阵乘法可得

$$(\boldsymbol{T}^k)_{ij}=(\boldsymbol{T}^{k-1}\boldsymbol{T})_{ij}=\sum_m(\boldsymbol{T}^{k-1})_{im}t_{mj}$$

$$=\sum_{t_{mj}=1}(\boldsymbol{T}^{k-1})_{im}.$$

由归纳假设，$(\boldsymbol{T}^{k-1})_{im}$ 是始于 i 终于 m 的容许串的数量，这与始于 i 终于 j，长度为 $k+1$ 且倒数第二位等于 m 的容许串的数量是相同的. 考虑所有可能存在的从 m 到 j 的转换(即满足 $t_{mj}=1$)，可得到 $N(k;\ i,\ j)$，即

$$(\boldsymbol{T}^k)_{ij}=N(k;i,j).$$

引理得证，定理结论得证. ■　407

例 10.6.13　考虑转换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

则由定理 10.6.11，

$$N(1)=\operatorname{tr}(\boldsymbol{T})=1$$

$$N(2) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 3.$$

这里把

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^k) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^{k-2}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^{k-1})$$

或

$$N(k) = N(k-2) + N(k-1)$$

的证明留作练习. 因此

$$N(3) = 4$$
$$N(4) = 7$$
$$N(5) = 11.$$

若一整数序列中有递推关系 $N(k) = N(k-2) + N(k-1)$，则称此关系为斐波那契递推关系(Fibonacci recurrence relation). 一般的序列都始于 $N(1) = 1$ 和 $N(2) = 1$，但这里的序列是始于 $N(1) = 1$ 和 $N(2) = 3$.

我们可以确定 n-周期点的个数，这需要去掉周期较低的 σ_T^n 不动点的个数. 表 10.6.1给出了周期直到 7 的周期点的个数.

表 10.6.1 例 10.6.13 中 σ_T 周期点的个数

n	Fix(σ_T^n)中的周期点的个数	周期较低 Fix(σ_T^n)中的周期点的个数	Per(n, σ_T)中的周期点的个数	n-周期轨道的个数
1	1	0	1	1
2	3	1	2	1
3	4	1	3	1
4	7	3	4	1
5	11	1	10	2
6	18	6	12	2
7	29	1	28	4

■

下面阐述转换矩阵的一些特征.

定义 10.6.14 若对所有的 i 有 $\sum_j t_{ij} = 1$,对所有的 j 有 $\sum_i t_{ij} = 1$(即每个符号 i 到达唯一的符号 j 而且有唯一的 i 到达每一个其他的 j),则称转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是置换矩阵(permutation matrix).

称转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为是可约的是指存在满足 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 的(i, j)使得对所有 $k \geqslant 1$ 都有$(\boldsymbol{T}^k)_{ij} = 0$. (这意味着不存在从符号 i 到达符号 j 的途径.)称转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为不可约的是指它不是可约的(即对满足 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 的(i, j)都有依赖于此数对的整数 k 使得$(\boldsymbol{T}^k)_{ij} > 0$，亦即存在从符号 i 到符号 j 的容许序列). 注意，转换矩阵是不可约的当且仅当关联于它的转换图是不可约的.

408

称转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为正的(positive)是指对所有 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 都有 $t_{ij} > 0$. 称转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为最终正的(eventually positive)或非周期的(aperiodic)是指存在整数 $k > 0$ 使得 $\boldsymbol{T}^k$ 为正(即对所有(i, j)都有$(\boldsymbol{T}^k)_{ij} > 0$).

定理 10.6.15 对转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 来说，下面两个条件是等价的：(i)矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是不可约的. (ii)位

移映射 σ_T 有稠密于 Σ_T^+ 的前行轨道，且对每个 j 有 $\sum_i t_{ij} \geqslant 1$.

证明　首先假设条件(i) 成立,要证明条件(ii) 也成立. 对一固定的 j,因为从任意符号到 j 的转换都是可能的,所以必有 $\sum_i t_{ij} \geqslant 1$.

为证明 σ_T 有在 Σ_T^+ 内稠密的前行轨，对每对(i, j)，选取字串 $\boldsymbol{w}_{ij}$，使得有限序列 $i\boldsymbol{w}_{ij}j$ 是容许的.（如果 $t_{ij}=1$ 且从 i 到 j 的转换是容许的，则 $\boldsymbol{w}_{ij}$可取为空的.）这样的 $\boldsymbol{w}_{ij}$之所以存在是因为已假设 $\boldsymbol{T}$ 是不可约的. 首先列出(长度为 1)所有字符，置转换 $\boldsymbol{w}_{ij}$于其间并使整个序列为容许的. 接着列出长度为 2 的所有字符，置转换 $\boldsymbol{w}_{ij}$于其间并使整个序列为容许的. 利用归纳法继续下去，列举出长度为 k 的所有字符，置转换 $\boldsymbol{w}_{ij}$于其间并使整个序列为容许的. 最终所得的整个序列记为 $\boldsymbol{s}^*$. 显然，$\boldsymbol{s}^*$ 在 Σ_T^+ 内.

取 Σ_T^+ 内的任意序列 $\boldsymbol{u}$ 和任意整数 $k\geqslant1$，由构造可知，有限符号串 $\boldsymbol{w}=u_0\cdots u_{k-1}$必出现在序列 $\boldsymbol{s}^*$ 中，设它以 $s_m^*\cdots s_{m+k-1}^*$的形式出现. 这样它出现于 $\sigma_T^m(s^*)$的前 k 个元素. 因为 $\boldsymbol{u}$ 与 $\sigma_T^m(s^*)$的前 k 个元素一致，所以它们相互接近. 由 k 的任意性可知，$\mathcal{O}_\sigma^+(\boldsymbol{s})$可任意接近于 $\boldsymbol{u}$. 条件(ii)得证.

下面假设条件(ii)成立，要证明条件(i). 任取数对(i, j)，令 $\boldsymbol{a}$ 是满足 $a_0=i$ 的一序列，$\boldsymbol{b}$ 是满足 $a_m=j$ 的一序列，$m\geqslant1$.（由于从另一个符号到达符号 j 是可能的，所以像 $\boldsymbol{b}$ 这样的序列是存在的.）则 $\boldsymbol{s}^*$ 的轨道接近于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 因此，存在 $k_1\geqslant0$ 使得 $\sigma^{k_1}(\boldsymbol{s})$的第一个符号是 i，即 $s_{k_1}^*=i$. 因为 $\boldsymbol{s}^*$的轨道接近于 $\boldsymbol{b}$，所以存在 $k_2>k_1$ 使得 $\sigma^{k_2}(\boldsymbol{s})$的第一个符号是 j，即 $s_{k_2}^*=j$. 因此，$s_{k_1}^*\cdots s_{k_2}^*$是始于 i 终于 j 的一个容许串. 这表明$(\boldsymbol{T}^{k_2-k_1})_{ij}\neq0$. 因为$(i, j)$是任意的，所以 $\boldsymbol{T}$ 是不可约的，从而条件(i)成立. ■

10.7　应用

10.7.1　牛顿映射：非收敛轨线

本节返回来继续考虑用来求多项式根的牛顿映射，我们将利用 10.6 节介绍的方法证明 N_f 可能有许多不收敛于其不动点的非周期轨(即不收敛于 f 的零点)，由于这些牛顿映射都有垂直渐近线，所以它们并非在所有的点处连续。然而，我们仍然能用符号动力系统证明存在不收敛于不动点或周期轨的点。

定理 10.7.1　*令 f 是一个次数为 $d\geqslant4$ 的多项式，而且其所有根为实数且互不相同，则存在很多这样的轨道，它们既不收敛于不动点，也不是最终周期的. 事实上，这些轨道可以用基于 $d-2$ 个符号的符号动力学来刻画.*

证明　为明确起见，考虑有 4 个不同实根的多项式，即

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

409

其中 $x_0<x_1<x_2<x_3$. 令 $N(x)=N_f(x)$是 f 的牛顿映射，即

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

根据罗尔定理可知，在$f(x)$任意两个零点之间存在$f'(x)$的一个零点，即有

$$x_0 < a_0 < x_1 < a_1 < x_2 < a_2 < x_3,$$

使$f'(a_j)=0$，$j=0$，1，2. 因为$f'(x)$的次数为3，所以a_j正好是$f'(x)$的全部零点. 再对$f'(x)$应用罗尔定理，则在$f'(x)$的任意两个零点之间存在$f''(x)$的一个零点，即有

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2,$$

使$f''(b_j)=0$，$j=1$，2，同理，b_1和b_2恰是$f''(x)$的全部零点.

牛顿映射以x_j为不动点，以$x=a_j$为垂直渐近线，$j=0$，1，2，N的导数为

$$N'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

因此，在点$x_j(j=0, 1, 2, 3)$和$b_j(i=1, 2)$处牛顿映射的切线是水平的，特别地，正如第9章所指出的，N的不动点是超吸引的，因此，在a_0和a_1之间有两个临界点x_1和b_1，在a_1和a_2之间有两个临界点x_2和b_2，虽然这些临界点的次序可能有所变化，但图10.7.1中给出的牛顿映射的图像具有代表性. 特别地，由于当x穿过任一个a_j时只有$f'(x)$改变符号，所以映射N在a_j的一侧趋于正无穷，而在它的另一侧趋于负无穷.

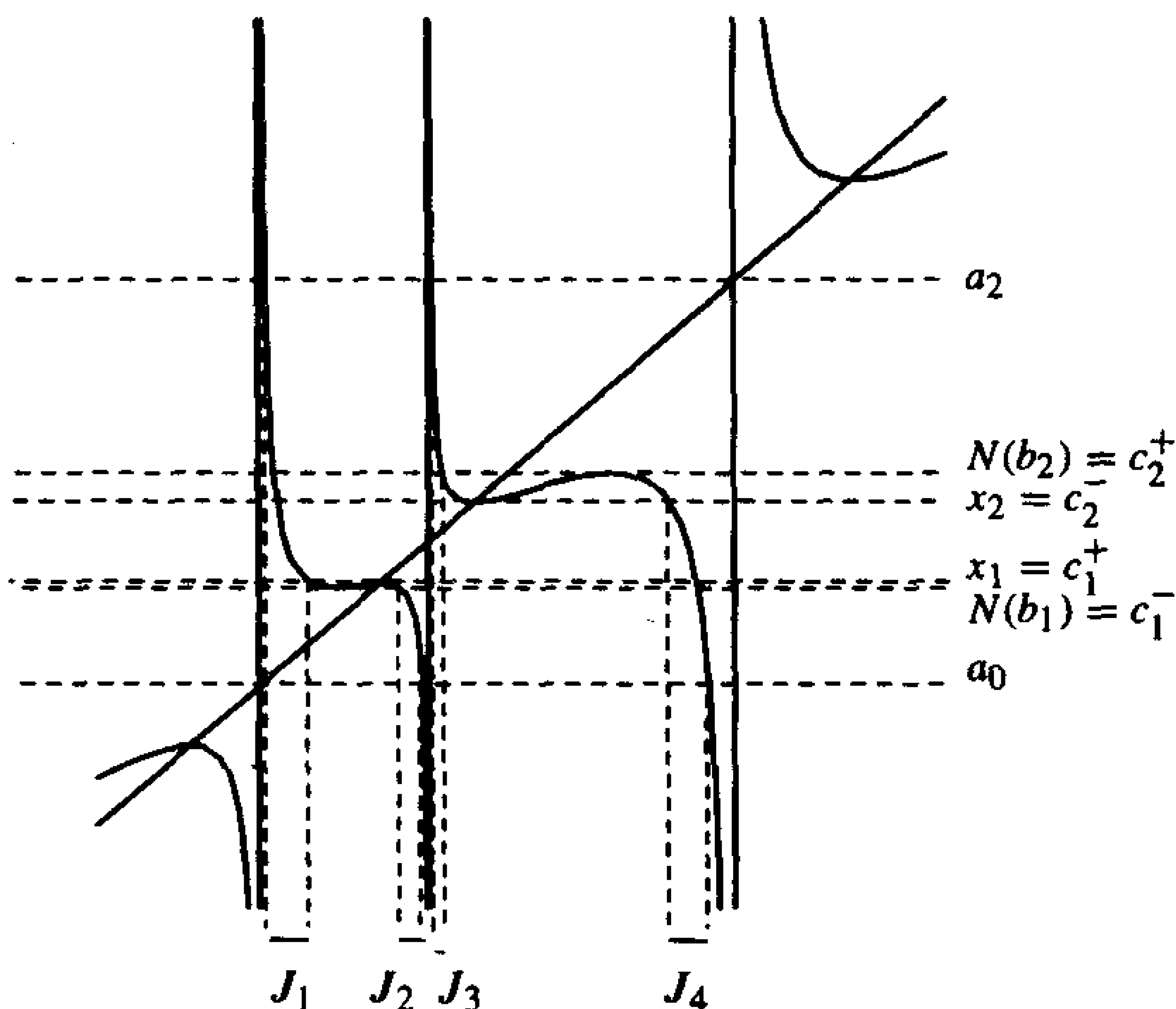


图 10.7.1　牛顿映射的符号动力学

我们可以利用基于两个区间的符号动力学，其中一个区间位于(a_0, a_1)，另一个位于(a_1, a_2). 这两个区间将产生两个符号的全位移，由于这两个区间分别包含吸引的不动点x_1和x_2，因此，我们在x_1和x_2的吸引域中去掉包含x_1和包含x_2的两个开区间，得到4个闭区间，这4个区间诱导出一个有限型的子位移.

410

选取$y_{i,j}$，$i=0$，2，$j=1$，2满足

$$a_0 < y_{2,1} < y_{0,1} < a_1 < y_{2,2} < y_{0,2} < a_2,$$
$$N(y_{0,j}) = a_0$$

和

$$N(y_{2,j}) = a_2.$$

现在，为了将x_j的吸引域去掉，令

$$c_i^- = \min\{x_i, N(b_i)\}$$

和

$$c_i^+ = \max\{x_i, N(b_i)\}.$$

再选取z_i^+和z_i^-满足$y_{2,i} < z_i^+ < c_i^- < c_i^+ < z_i^- < y_{0,i}$，且

$$N(z_i^+) = c_i^+$$

和

$$N(z_i^-) = c_i^-.$$

最后，令

$$\boldsymbol{J}_1 = [y_{2,1}, z_1^+],$$
$$\boldsymbol{J}_2 = [z_1^-, y_{0,1}],$$
$$\boldsymbol{J}_3 = [y_{2,2}, z_2^+],$$
$$\boldsymbol{J}_4 = [z_2^-, y_{0,2}].$$

(参见图 10.7.1.)由此取法，得

$$N(\boldsymbol{J}_1) = [c_1^+, a_2] \supset \boldsymbol{J}_2 \cup \boldsymbol{J}_3 \cup \boldsymbol{J}_4,$$
$$N(\boldsymbol{J}_2) = [a_0, c_1^-] \supset \boldsymbol{J}_1,$$
$$N(\boldsymbol{J}_3) = [c_2^+, a_2] \supset \boldsymbol{J}_4$$

和

$$N(\boldsymbol{J}_4) = [a_0, c_2^-] \supset \boldsymbol{J}_1 \cup \boldsymbol{J}_2 \cup \boldsymbol{J}_3.$$

由此构造可知，区间 $\boldsymbol{J}_j$ 不包含 N 的不动点。利用这 4 个区间，我们可以得到其迭路穿过这些区间的轨道的符号动力学. 与这些区间序列中任何一个相对应的每一点都有一条轨道，它不收敛于 $f(x)$ 的零点，事实上，对于零点互不相同的情况，可以证明每个符号序列正好与一个点相对应，这里不赘述. ■

注 10.7.2　要了解更多牛顿映射的复杂动力学知识，可参阅文献[**93**]或[**54**].

10.7.2　种群增长模型的复杂动力学

在 9.7.2 节，我们讨论过几类种群增长模型的不动点，本节将指出这些模型还具有更复杂的动力学特征，读者可参阅 R. May 的著作[**75**]或者最近出版的 Brauer 和 Castillo-Chávez 的著作[**20**].

Ricker 给出的种群增长模型是

$$R_{a,b}(x) = axe^{-bx},$$

其中 a 和 b 都是正数. 最有趣的参数取值范围是 $a>1$. 当 $a\approx 22.2$，$b=1$ 时，映射有初始值 $x_0\approx 0.05$ 的 3-周期轨道，参见图 10.7.2. 事实上，由命题 10.1.11(b)可知，欲推出 $R_{22.2,1}(x)$ 必有任意周期的周期点，只需验证 $R_{22.2,1}^3(0.05)\leqslant 0.05$ 即可，此时的动力学并不像 9.7.2 节讨论的那样简单，尤其是种群总量并不总是趋于常态. 由于所有这些周期点可能是不稳定的，而且所有周期点的集合可能是个康托尔集，所以随机地选择初始点未必能展现该系统的复杂动力学特征. 然而，从图 10.7.3 给出的始于 $x_0=0.1$ 的轨道图中可以看出，这条轨道似乎充满了从 0 到 8.1 的区间的大部分，这表明存在具有复杂动力学的不变集，即使映射的导数的绝对值不总是大于 1，也会发生这种情况：从这个意义上来说，与其说这个例子像分段扩张映射，倒不如说像逻辑斯谛映射 G. 第 11 章将讨论混沌吸引子，在那里我们将详细描述复杂动力学的类型，并引出混沌不变集.

411

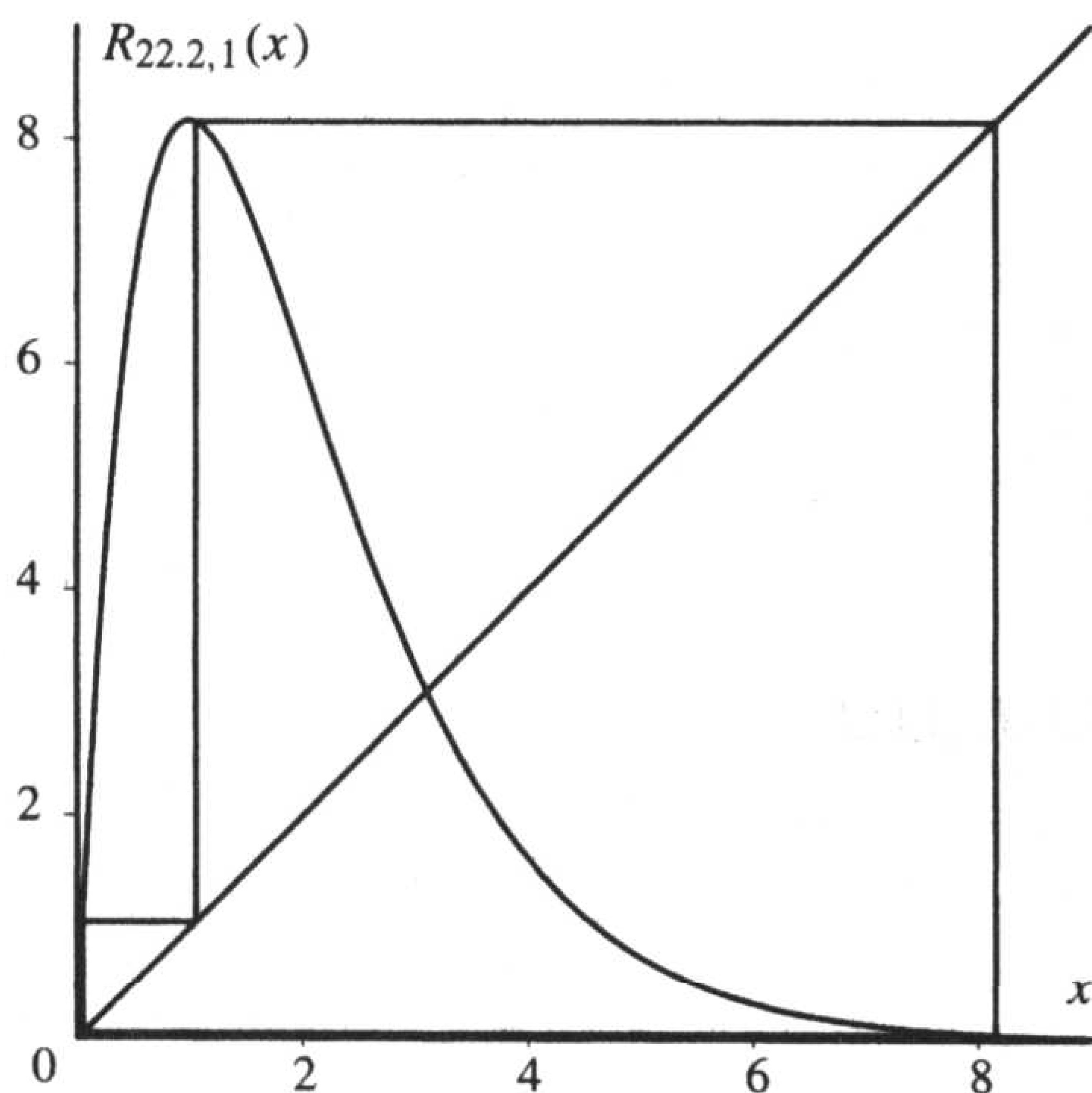


图 10.7.2　当 $a\approx22.2$，$b=1$，$x_0\approx0.05$ 时 3-周期轨道

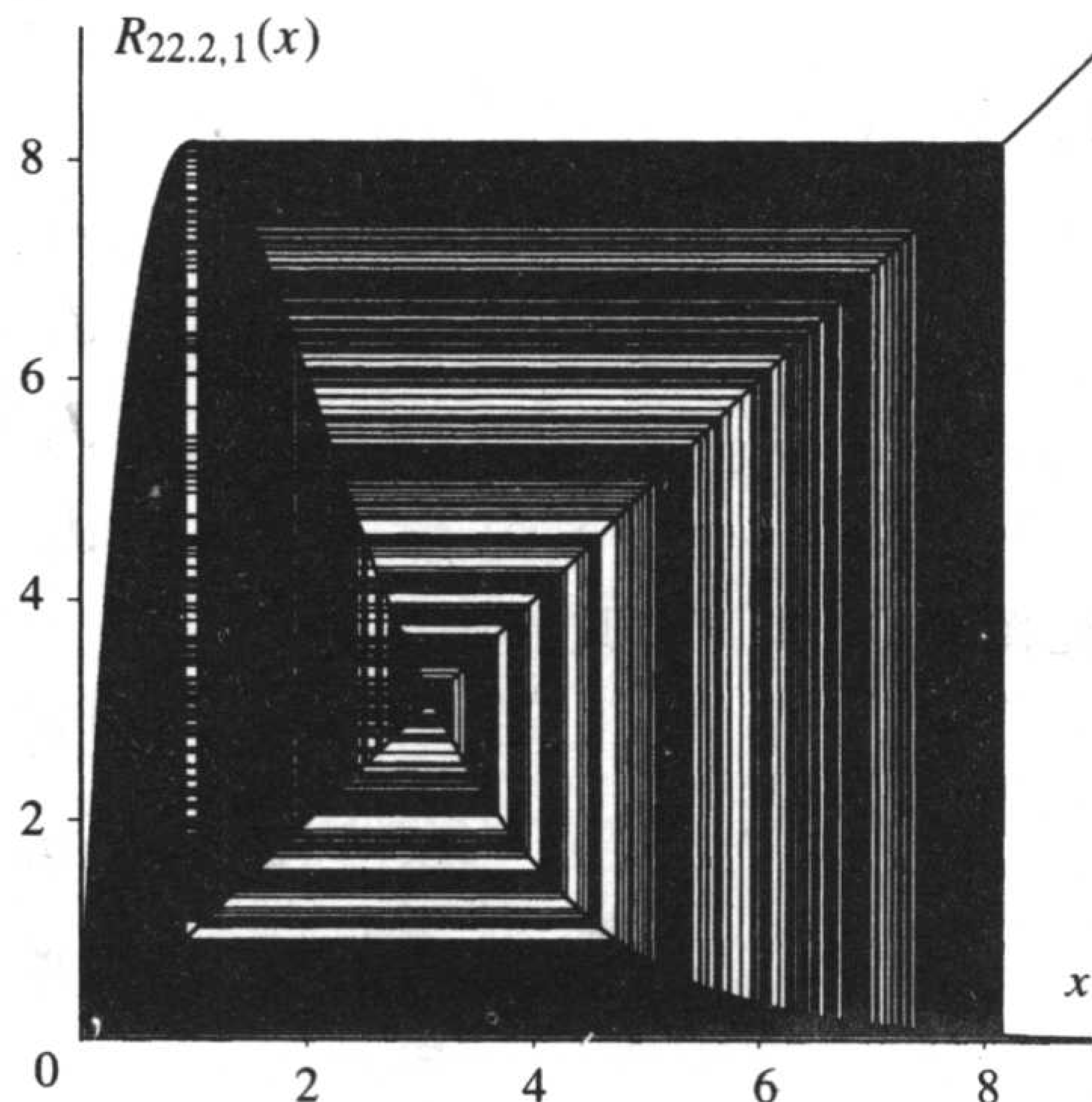


图 10.7.3　始于 $x_0=0.1$ 的 Ricker 模型的阶梯图

10.8　理论与证明

转换图

下面命题的证明是基于 Barton 和 Burns 的文章[**12**].

命题 10.1.16　令 f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个连续函数.

(a) 若 f 有任意周期的周期点，则 f 有不动点.

(b) 若 f 有一个非不动点的周期点，则 f 有 2-周期点.

(c) 若 f 有 2^n-周期点，则对任意 $0\leqslant k\leqslant n$，f 有 2^k-周期点.

证明　(a) 设 p 是周期大于 1 的周期点，并令 $x_1<x_2<\cdots<x_p$ 是轨道 $\mathcal{O}^+(p)$ 上的点，x_i 的记法是根据它们在直线上的顺序而不是根据它们的迭代顺序来确定的。令 j 是满足 $f(x_j)>x_j$ 的最大下标，则 $f(x_{j+1})\leqslant x_j$ 且 $f([x_j,x_{j+1}])\supset[x_j,x_{j+1}]$. 由引理 10.1.1(a) 可知，$f$ 在 $[x_j,x_{j+1}]$ 内有不动点.

(b) 设 $p>1$ 是使得 f 有 p-周期点的最小整数，若 $p=2$，则结论已证，下面假设 $p\geqslant3$ 并推出矛盾. 令 $x_1<x_2<\cdots<x_p$ 是此 p-周期轨道上的点. 令 $\boldsymbol{I}_i=[x_i,x_{i+1}]$ $(1\leqslant i\leqslant p-1)$ 是轨道上相邻点间的区间，我们考虑这些符号的转换图：由于要么 $f(x_i)\neq x_{i+1}$，要么 $f(x_{i+1})\neq x_i$，所以 $f([x_i,x_{i+1}])$ 必至少包含一个其他区间 $\boldsymbol{I}_k$，$k\neq i$(两点 x_i 和 x_{i+1} 不可能仅仅相互交换)，因此，对于转换图内的任一顶点 i，都至少存在一条从 i 到某个 k 的有向边，其中 $k\neq i$. 下面考虑转换图中从 1 出发的路径：我们总可以将该路径延续下去，因为总可以选取不同于当前顶点的下一个顶点. 注意到仅有 $p-1$ 个顶点，所以在进行 p 步之前该路径必定会有重复，这表明在转换图内有周期为 q 的周期路径，其中 q 小于等于 $p-1$ 且大于等于 2. 由定理 10.1.8 可知，必存在一点 x^* 满足 $f^q(x^*)=x^*$，$2\leqslant q\leqslant p-1$. 由于端点的周期为 p，所以 x^* 不可能是端点，从而其周期必为 q，其中 q 大于 1 小于 p，这与 $p\geqslant3$ 是最小周期的假设矛盾，因此存在 2-周

412

期点.

(c)若 $n=1$，命题得证．设 $n>1$ 且 x_n 是 2^n-周期点，由(b)可知 f 有一个 2-周期点．(这也可从下面对 $q=1$ 的讨论中得出.)令 $1\leqslant q\leqslant n-1$，取 $g=f^{2^{q-1}}$，对映射 g 来说，点 x_n 的周期为 $2^n/2^{q-1}=2^{n-q+1}\geqslant 2^2$．由(b)知，$g$ 有 2-周期点 x_q，即 $g^2(x_q)=x_q$ 但 $g(x_q)\neq x_q$，因此 $x_q=g^2(x_q)=f^{2^{q-1}+2^{q-1}}(x_q)=f^{2^q}(x_q)$ 是 f 的周期点，且它的周期整除 2^q(即其周期为 1，2，…，2^q)，又因为 $f^{2^{q-1}}(x_q)=g(x_q)\neq x_q$，所以 x_q 的周期不可能是 1，2，…或 2^{q-1}，从而必为 2^q，至此我们已证明对于 $1\leqslant q\leqslant n-1$，$f$ 一定有 2^q-周期点，再由(a)可知 f 存在不动点，结论证毕． ■

P. D. Straffind[**103**]和 B. -S. Du[**34**]发表了证明 Sharkovskii 定理的论文，这些文章通俗易懂，适合阅读本书的所有读者．他们没有用 Stefan 环，而是将证明过程缩减为以下 3 步：

A. 若 f 有一个非不动点的周期点，则 f 有 2-周期点.

B. 若 f 有 m-周期点，其中 $m\geqslant 3$ 是奇数，则对大于 m 的任意整数 n，f 都有 n-周期点(通常意义下的 $n>m$).

C. 若 f 有 m-周期点，其中 $m\geqslant 3$ 是奇数，则 f 有以任一偶数为周期的周期点.

413

注意，我们在命题 10.1.16 中证明了结论 A，并用到了 Barton 和 Burns[**12**]的证明．下面证明结论 B，此证明过程是以 Du 的论文[**34**]为基础的.

命题 10.8.1　*设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个连续函数且有一个 m-周期点，其中 $m\geqslant 3$ 是奇数，则对任意整数 $n>m$，f 也有 n-周期点.*

证明　设

$$x_1<x_2<\cdots<x_m$$

是 m-周期轨道，这些点是按照其在直线上的位置而非迭代的顺序进行排序的．令 s 是满足 $f(x_s)>x_s$ 的最大下标，并设 $\boldsymbol{J}=[x_s,\ x_{s+1}]$．由于 $f(x_{s+1})<x_{s+1}$，所以 $f(\boldsymbol{J})\supset\boldsymbol{J}$，令 z 是 $\boldsymbol{J}$ 内的不动点，由引理 10.1.1 可知 z 一定存在. ■

断言 10.8.2　*存在 $r\neq s$ 使得 $f(x_r)$ 和 $f(x_{r+1})$ 位于区间 $\boldsymbol{J}$ 的不同侧.*

证明　假设此命题不真，则对 $1\leqslant i\leqslant s$，$f(x_i)$ 都位于 $\boldsymbol{J}$ 的同一侧，由于 $f(x_s)\geqslant x_{s+1}$，所以这些 $f(x_i)$ 必在 $\boldsymbol{J}$ 的同一侧，即对所有 $i\leqslant s$，$f(x_i)\geqslant x_{s+1}$．同理可证，对所有 $i\geqslant s+1$，都有 $f(x_i)\leqslant x_s$，因此，f 将 $\{x_1,\ \cdots,\ x_s\}$ 映射到集合 $\{x_{s+1},\ \cdots,\ x_m\}$，将 $\{x_{s+1},\ \cdots,\ x_m\}$ 映射到集合 $\{x_1,\ \cdots,\ x_s\}$，又因为 f 在轨道上是一对一的，所以在 f 的作用下，这两个点集相互交换元素，这表明在 $\boldsymbol{J}$ 两侧，轨道上的点的个数相同，因此轨道上点的总数 m 必是偶数，这与 m 是奇数相矛盾，断言得证. ■

据此断言可知，存在整数 t，$t\neq s$ 且 $1\leqslant t\leqslant m-1$，使得 $f(x_t)$ 和 $f(x_{t+1})$ 位于区间 $\boldsymbol{J}$ 的不同侧．令 $\boldsymbol{L}=[x_t,\ x_{t+1}]$，并设 $x_t<x_s$，至于 $x_t>x_s$ 的情形留给读者证明.

令 $\boldsymbol{K}=[z,\ x_{s+1}]$，其中 z 是区间 $\boldsymbol{J}$ 内的不动点，根据 x_t 的取法可知，$f(\boldsymbol{L})\supset\boldsymbol{J}\supset\boldsymbol{K}$，将定理 10.1.8 应用于区间 $\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{L}$ 和某些迭代点，令 q 是满足 $f^q(x_{s+1})\leqslant x_t$ 的最小整数，因为轨道上只有 m 个点，而且 $f^m(x_{s+1})=x_{s+1}$，所以 q 必小于或等于 $m-1$.

对任意两个不同的实数 a 和 b，令$[a;\ b]$表示端点为 a 和 b 的闭区间(即允许 $a<b$ 或 $a>$

b). 下面利用区间序列:

$$\begin{aligned} I_0 &= K = [z, f^0(x_{s+1})] \\ I_i &= [z; f^i(x_{s+1})] \qquad 1 \leqslant i \leqslant q-1 \\ I_q &= L \\ I_j &= J \qquad q+1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ I_n &= I_0. \end{aligned}$$

尽管该序列的构造与定理 10.1.8 并不完全相像，但其证明过程表明在 $I_0 = K$ 内必存在一点 y 使得对 $0 \leqslant i \leqslant n-1$ 有 $f^i(y)$ 属于 I_i 且 $f^n(y) = y$. 这里不能直接应用定理 10.1.8(d)，需要先证实 y 不是 K 的端点，由区间 L 与 K 是不相交的可知，y 不可能是不动点 z，下面的命题表明 y 的轨道与原来的 m-周期轨道是不相交的.

断言 10.8.3 点 y 的轨道与原来的 m-周期轨道是不相交的.

证明 假设 y 的轨道与原来的 m-周期轨道是相交的，则此轨道的最小周期为 m. 因此 m 整除 n，又因为 $m \geqslant 3$ 以及 $n > m$，所以 $n - m \geqslant 3$.

点 y 的轨道在 J 中出现 $(n-1)-q$ 次，由于 $q+1 \leqslant m$，所以 $n-(q+1) \geqslant n-m \geqslant 3$，但是原来的 x 轨道只与 J 在其端点处相交两次，这表明 y 不可能在原来的 x 轨道上，断言得证. ■

414

由此断言可知，y 在 K 的内部，从而 $f^q(y)$ 必在 L 的内部.

根据 q 的取法可知，对于 $0 \leqslant i \leqslant q-1$，有 $f^i(x_{s+1}) \geqslant x_{t+1}$，因此对于 $0 \leqslant i \leqslant q-1$，区间 I_i 与 L 的内部不相交；此外，对于 $q+1 \leqslant i \leqslant n-1$，$I_i = J$ 与 L 的内部也是不相交的，所以，位于 L 内部的点 $f^q(y)$ 的周期不可能小于 n，故必等于 n，这表明 f 有最小周期为 n 的点，由 $n \geqslant m+1$ 的任意性，可知命题成立.

符号动力学理论

10.3 节介绍了具位移映射 σ 的位移空间 Σ_2^+. 本节我们在此空间中引入“度量”或距离，并证明对于帐篷映射和双倍映射，从位移空间到状态空间的映射 k 是连续的.

定义 10.8.4 考虑 N 个符号，记作 $\{0, \cdots, N-1\}$，基于 N 个符号的位移空间 Σ_N^+ 是如下所有符号串的集合:

$$s = s_0 s_1 s_2 \cdots,$$

其中每个 s_j 是 $\{0, \cdots, N-1\}$ 中的元素. 从 Σ_N^+ 到 Σ_N^+ 的位移映射 σ 如前定义.

对于两个符号 s 和 t，令

$$\delta(s,t) = \begin{cases} 0 & s = t \\ 1 & s \neq t. \end{cases}$$

将 Σ_N^+ 内的两个元素 s 和 t 之间的距离定义为

$$d(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta(s_j, t_j)}{3^j}.$$

下面的命题表明 Σ_N^+ 上的度量 d 满足成为一个距离的所有条件.

命题 10.3.8　Σ_N^+ 上的度量 d 具有如下性质：

(i) $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) \geqslant 0$.

(ii) $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}$.

(iii) $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) = d(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s})$.

(iv) $d(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{s}) + d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) \geqslant d(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{t})$.

证明　(i)由于 d 的定义中和式的每一项都是非负的，所以 $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) \geqslant 0$.

(ii)因为对所有 j 都有 $\delta(s_j,\ s_j) = 0$，所以 $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{s}) = 0$. 又若 $\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{s}$，则对某一 k 存在 $s_k \neq t_k$，且 $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) \geqslant 1/3^k > 0$.

(iii)因为对所有 j 都有 $\delta(s_j,\ t_j) = \delta(t_j,\ s_j)$，所以 $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) = d(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{s})$.

(iv)因为对所有 j 都有

$$\delta(r_j, s_j) + \delta(s_j, t_j) \geqslant \delta(r_j, t_j),$$

所以

$$d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}) + d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \geqslant d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}).$$ ■

下面的命题表明只要两序列 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 前面的有限个元素相同，则这两个序列在距离 d 下是接近的.

415

命题 10.3.9　令 Σ_N^+ 是基于 N 个符号的位移空间，距离 d 如前定义，在 Σ_N^+ 内取定 $\boldsymbol{t}$，则

$$\left\{\boldsymbol{s} \in \Sigma_N^+ : s_j = t_j, 0 \leqslant j \leqslant k\right\} = \left\{\boldsymbol{s} \in \Sigma_N^+ : d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \leqslant 3^{-k}2^{-1}\right\}.$$

证明　取上式左端集合中的一个元素 $\boldsymbol{s}$，则对 $0 \leqslant j \leqslant k$ 有 $s_j = t_j$，而且

$$d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta(s_j, t_j)}{3^j} \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = 3^{-(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j}$$

$$= 3^{-(k+1)}\left(\frac{1}{1 - 3^{-1}}\right) = \frac{1}{3^{k+1}(2/3)} = \frac{1}{2 \cdot 3^k}.$$

这证明 $\boldsymbol{s}$ 是上式右端集合中的一个元素. 因此左端集合是右端集合的子集.

现在假设 $\boldsymbol{s}$ 不是上式左端集合中的一个元素，所以对某个 $0 \leqslant i \leqslant k$，有 $s_i \neq t_i$，则

$$d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta(s_j, t_j)}{3^j} \geqslant \frac{\delta(s_i, t_i)}{3^i}$$

$$= \frac{1}{3^i} > \frac{1}{2 \cdot 3^k}.$$

这表明 $\boldsymbol{s}$ 不是上式右端集合的一个元素，故左端集合不小于右端集合，即这两个集合必相等. ■

命题 10.3.10　位移映射 σ 在 Σ_N^+ 上是连续的.

证明　令 $\varepsilon > 0$，选取 k 使得 $1/(2 \cdot 3^k) < \varepsilon$，并令 $\delta = 1/(2 \cdot 3^{k+1})$. 若 $d(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t}) < \delta$，则对 $0 \leqslant j \leqslant k+1$，有 $s_j = t_j$，这表明对于 $0 \leqslant j \leqslant k$，$\sigma(\boldsymbol{s})$ 和 $\sigma(\boldsymbol{t})$ 是一致的，因此

$$d(\sigma(\boldsymbol{s}), \sigma(\boldsymbol{t})) \leqslant 1/(2 \cdot 3^k) < \varepsilon,$$

这就证明了 σ 的连续性. ■

定理 10.3.12　设 f 是[0, 1]上的三个映射 D，T 或 G(双倍、帐篷或逻辑斯谛映射). 对映射 f 而言，令 k 是如 10.3 节所定义的从 Σ_2^+ 到[0, 1]的映射，则 k 是连续的.

证明　我们利用δ, ε语言来证明k是连续的. 不妨假设该映射是帐篷映射或双倍映射，对任意的$\varepsilon>0$，存在m使得$2^{-(m+1)}<\varepsilon$. 令$\delta=1/(2\cdot 3^m)$，若$d(s,t)\leqslant\delta$，则$s_j=t_j$，$0\leqslant j\leqslant m$. 这意味着$k(s)$和$k(t)$在同一区间$\boldsymbol{I}_{s_0\cdots s_m}$内，该区间的长度是$2^{-(m+1)}$，所以

416

$$|k(s)-k(t)|\leqslant 2^{-(m+1)}<\varepsilon.$$

k的连续性得证. ■

逻辑斯谛映射的子位移

在10.6节中，我们对处处扩张的映射讨论了有限型子位移的产生方式，本节将对逻辑斯谛族映射的情形做简要讨论. 在去掉周期汇的吸引域的一部分之后，在余下的区间上逻辑斯谛族映射的某个幂(映射)是扩张的，这些特征很像一类典型的非线性映射，这类映射有共轭于有限型子位移的子系统. 据分段扩张映射的有关材料可知另一个不同之处是逻辑斯谛族映射的不变集是个康托尔集而非整个区间. 这里的讨论基于Devaney的论文[**31**].

正如例10.1.4中所提到的，$a=3.839$时的逻辑斯谛映射有两条3-周期轨道：

$$\{x_0,x_1,x_2\}\approx\{0.1499,0.4892,0.9593\}$$

和

$$\{y_0,y_1,y_2\}\approx\{0.1690,0.5392,0.9538\}.$$

第一条轨道是吸引的，而第二条轨道是排斥的. 记$g(x)=g_{3.839}(x)$，在x_i的对侧存在点$\hat{y}_i$，它被g^3映射成$y_i=g^3(y_i)$，$g^3(\hat{y}_i)=y_i$. 这些点的顺序为

$$\hat{y}_0<x_0<y_0<\hat{y}_1<x_1<y_1<y_2<x_2<\hat{y}_2.$$

令$\boldsymbol{A}_0=(\hat{y}_0,\ y_0)$，$\boldsymbol{A}_1=(\hat{y}_1,\ y_1)$和$\boldsymbol{A}_2=(\hat{y}_2,\ y_2)$是包含该吸引周期轨的区间，$g$把$\boldsymbol{A}_0$单调地映射到$\boldsymbol{A}_1$，把$\boldsymbol{A}_2$单调且满地映射到$\boldsymbol{A}_0$，临界点0.5属于$\boldsymbol{A}_1$，但它仍被映射进$\boldsymbol{A}_2$，类似于命题9.3.13证明中的论证，可知$\boldsymbol{A}_0\subset\mathcal{R}(x_0;\ g^3)$，$\boldsymbol{A}_1\subset\mathcal{R}(x_1;\ g^3)$和$\boldsymbol{A}_2\subset\mathcal{R}(x_2;\ g^3)$，因此，$\boldsymbol{A}_0\cup\boldsymbol{A}_1\cup\boldsymbol{A}_2\subset\mathcal{R}(\mathcal{O}_g^+(x_0);g)$.

利用区间

$$\boldsymbol{I}_L=[y_0,\hat{y}_1]$$

和

$$\boldsymbol{I}_R=[y_1,y_2]$$

可讨论有关g的符号动力学，参见图10.8.1. 集合

417

$$\Lambda_g=\bigcap_{n\geqslant 0}g^{-n}(\boldsymbol{I}_L\cup\boldsymbol{I}_R)$$

包含大多数的周期轨；原点0是一个排斥不动点；集合$\boldsymbol{A}_0\cup\boldsymbol{A}_1\cup\boldsymbol{A}_2$里面仅有的周期轨是$\mathcal{O}_g^+(x_0)$，这是由于该并集包含在这周期汇的吸引域中；由于$(0,\hat{y}_0)$内的点最终被映射进$\boldsymbol{A}_0\cup\boldsymbol{I}_L$，所以这些点永远不能返回也不可能是周期点；$(y_2,1)$内的点被映射进$(0,\hat{y}_0)$，从而最终被映射进$\boldsymbol{A}_0\cup\boldsymbol{I}_L$，所以这些点既不能返回也不可能是周期点，因此除不动点0和3-周期轨道$\mathcal{O}_g^+(x_0)$之外，g的所有周期轨都完全包

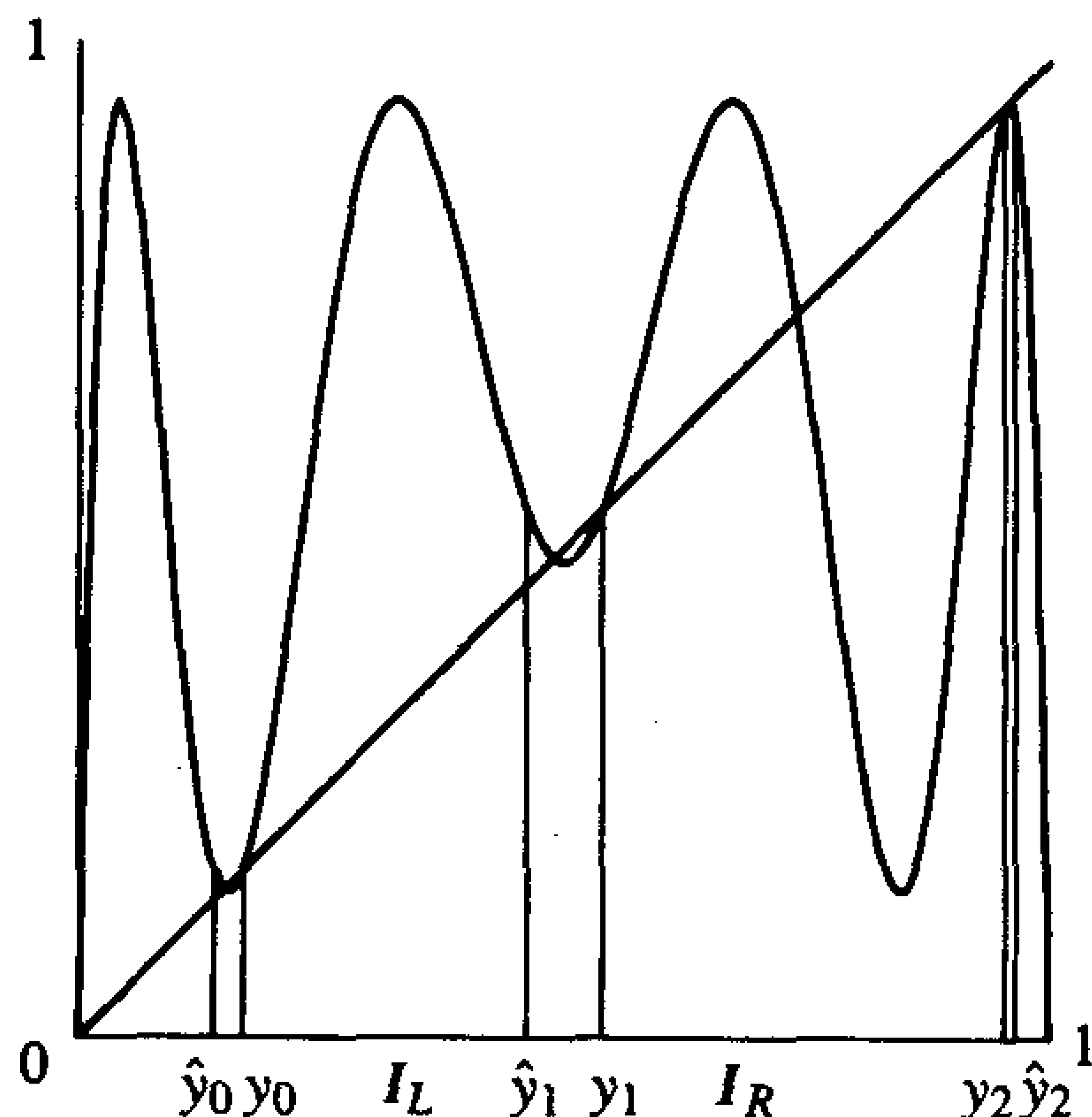
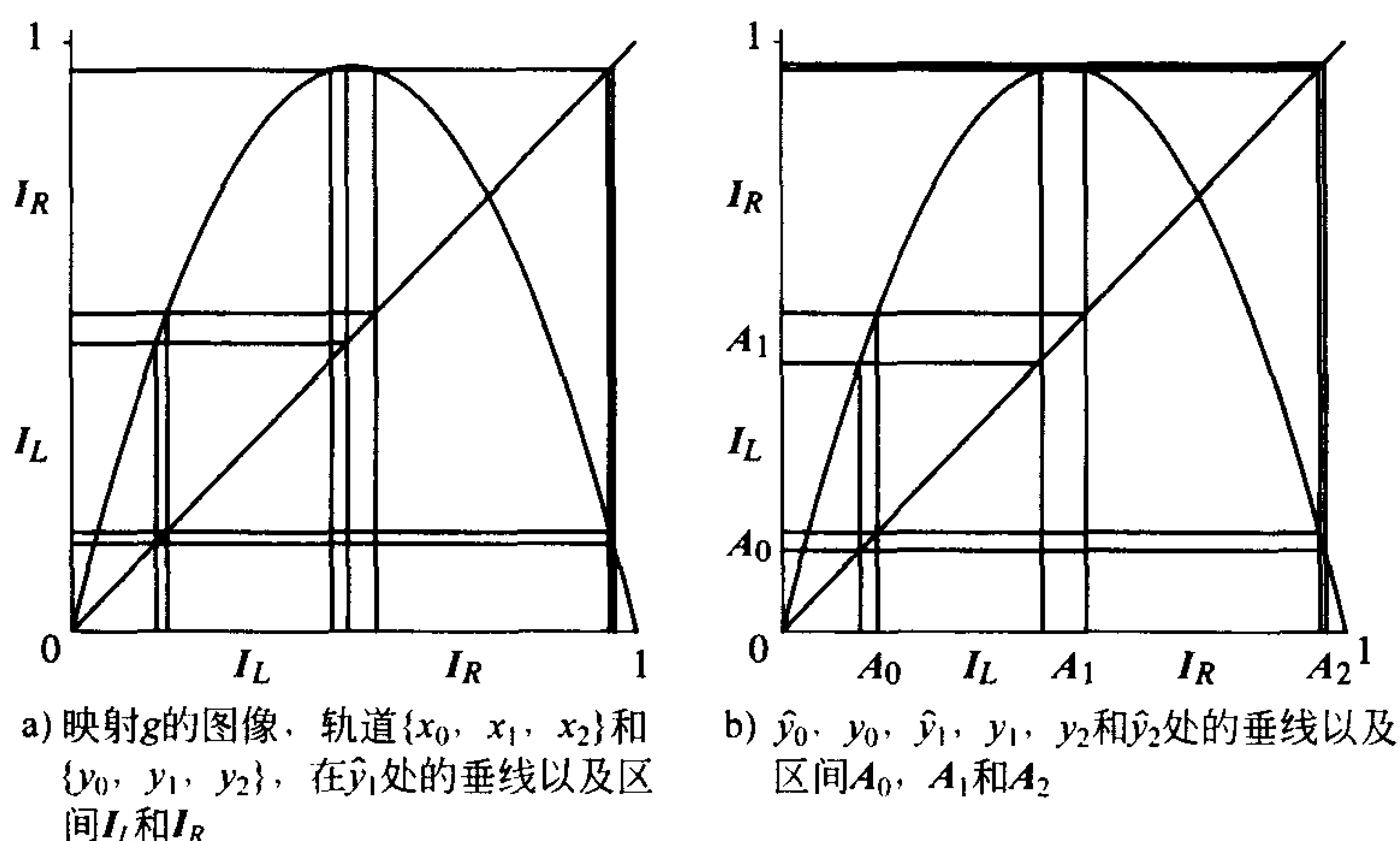


图10.8.1　第三次迭代g^3的图像及区间$\boldsymbol{I}_L$和$\boldsymbol{I}_R$

含在 $I_L \cup I_R$ 内，也就是说，所有的周期轨都包含在集合 $\Lambda_g \cup \mathcal{O}_g^+(x_0) \cup \{0\}$ 内.

区间 I_L 的像和区间 I_R 相等，而 I_R 的像覆盖了 I_L 和 I_R（连同 A_1 一起），参见图 10.8.2，因此，符号动力学是这样的：L 之后只能接 R，而 R 之后则可以接 L 或 R（即转换图与图 10.1.5 相同）.



a) 映射 g 的图像，轨道 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 和 $\{y_0, y_1, y_2\}$，在 $\hat{y}_1$ 处的垂线以及区间 I_L 和 I_R

b) $\hat{y}_0$，y_0，$\hat{y}_1$，y_1，y_2 和 $\hat{y}_2$ 处的垂线以及区间 A_0，A_1 和 A_2

图 10.8.2

按通常的构造，从 Λ_g 到此转换图所容许的位移空间存在一个迭标映射. 为了能看出这个集合是个康托尔集以及符号动力学决定该映射的各次迭代，我们需要证明当 n 趋于无穷时任一区间 $I_{s_0\cdots s_n}$ 的长度都趋于 0.

映射 g 和 g^3 在 $I_L \cup I_R$ 上并不总是扩张的，事实上 g^3 在三个区间 $G_1 \subset I_L$，$G_2 \subset I_R$ 和 $G_3 \subset I_R$ 上是压缩的，参见图 10.8.3. 由于区间 $G_3 = g^{-1}(A_1) \cap I_R$，所以 $g(G_3) = A_1$，$g^2(G_3) \subset A_2$ 且 $g^3(G_3) \subset A_0$，从而 $G_3 \cap \Lambda_g = \varnothing$. 区间 G_1 和 G_2 由 $g^{-1}(G_3) = G_1 \cup G_2$ 定义，所以它们关于 0.5 对称，而且 $g(G_1) = g^2(G_2) = G_3$，$g^2(G_1) = g^2(G_2) = g(G_3) = A_1$，$g^3(G_1) = g^3(G_2) = g^2(G_3) \subset A_2$，因此 $G_1 \cap \Lambda_g = G_2 \cap \Lambda_g = \varnothing$. 定义

$$S = (I_L \cup I_R) \setminus (G_1 \cup G_2 \cup G_3)$$

并结合前面的结果可得 $\Lambda_g \subset S$. 由这些集合的构造可知

$$\Lambda_g = \bigcap_{n \geqslant 0} g^{-n}(I_L \cup I_R) = \bigcap_{k \geqslant 0} g^{-3k}(S).$$

因此，要说明一个符号序列对应于一唯一点，只需在 S 上考虑映射 g^3.

我们需要证明在 S 上映射 g^3 的导数的绝对值大于 1，由于区间 $G_2 \subset (0.661, 0.683)$，$(g^3)'(0.661) > 1$ 以及 $(g^3)'(0.683) < -1$，所以 g^3 的导数的绝对值在 G_1 和 G_2 的边界上都大于 1. 因为 y_0 是排斥周期点，所以 g^3 在 G_3 端点的导数与其在 A_0 的端点 y_0 和 $\hat{y}_0$ 处的导数相同，而且都大于 1，而 g^3 在 S 其他点处的导数的绝对值都大于这些

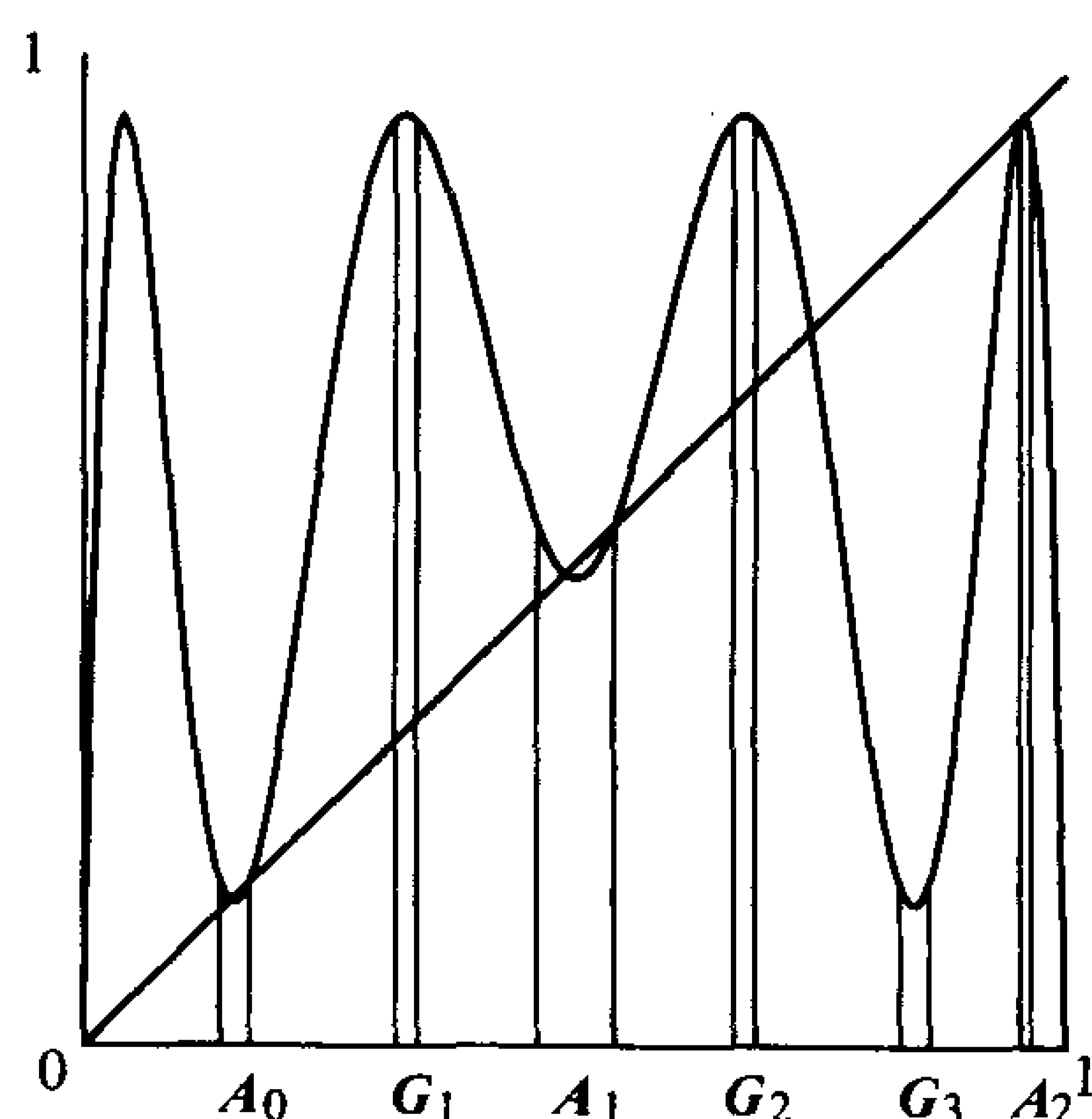


图 10.8.3

418

值，所以存在 $\lambda>1$ 使得 g^3 在 S 所有点 x 处都有 $|(g^3)'(x)|>1$，g^3 在 S 的所有点处的导数的绝对值都大于 1 这一事实足以证明当 n 趋于无穷时，

$$\bigcap_{k=0}^{n} g^{-3k}(S)$$

内区间的长度趋于 0. 因此，当 n 趋于无穷时，

$$\bigcap_{j=0}^{n} g^{-j}(I_L \cup I_R)$$

内区间的长度趋于 0，因此，Λ_g 是个康托尔集且周期点在 Λ_g 内是稠密的.

这些结果可总结为下面的定理.

定理 10.8.5 令 $g=g_{3.839}$，则 g 有 3-周期汇 $\mathcal{O}_g^+(x_0)$，且在 0 有排斥不动点，而且 g 的所有其他周期点都是排斥的且都包含在下面的不变集中：

$$\Lambda_g=\bigcap_{n\geqslant 0} g^{-n}(I_L \cup I_R).$$

此外，映射 g 限制在 Λ_g 上与有限型子位移的位移映射拓扑共轭，其中 L 之后只能是 R，而 R 之后则可以是 L 或是 R(即转换图与图 10.1.5 相同). 所以，映射 g 限制在 Λ_g 上是拓扑传递的，而且有对初始值的敏感依赖性. 集合 Λ_g 本身是个康托尔集(即闭的、完备的并有空的内部).

419

练习

10.1 周期点的转换图方法

10.1.1 设 $\mathbb{R}$ 上的连续映射 f 有 9-周期 Stefan 环.

a. 确定转换图；特别是证明对所有的奇数 i，区间 $J_8=[p_8, p_6]$ 在映射 f 的像覆盖了 J_i.

b. 证明可能除 3，5 和 7 之外 f 有任何周期的周期解.

10.1.2 令 f 是定义在区间 $[1, 6]$ 上的连续函数且满足 $f(1)=5$，$f(2)=6$，$f(3)=4$，$f(4)=1$，$f(5)=2$ 和 $f(6)=3$，设该函数在这些整数之间都是线性的.

a. 画出 f 的图像.

b. 标出这些整数之间的所有区间并给画出转换图.

c. 对哪些 n，f 有 n-周期轨道？利用区间确定一个能够表明每一个周期的符号序列.

10.1.3 令 f 是定义在区间 $[1, 4]$ 上的连续函数，满足 $f(1)=4$，$f(2)=3$，$f(3)=1$ 和 $f(4)=2$. 设该函数在这些整数之间是线性的.

a. 画出 f 的图像.

b. 标出这些整数之间的所有区间并给画出转换图.

c. 对哪些 n，f 有 n-周期轨道？利用区间确定一个能够表明每一个周期的符号序列.

10.1.4 令 $p(x)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$，令 $N(x)=N_p(x)$ 是由方程(9.3.1)给出的关于 p 的牛顿映射，注意到在 $a_1=-\sqrt{2.5}$，$a_2=0$ 和 $a_3=\sqrt{2.5}$ 处 $N(x)$ 趋于 $\pm\infty$，$N(x)$ 图像的一般形状与图 10.7.1 相同，但该例在 0 附近更具有对称性.

a. 画出 $N(x)$ 的图像.

b. 证明 $x=-2$，-1，1 和 2 是 N 的不动点汇.

c. 令 I_1 是 (a_1, a_2) 内的闭区间，它在映射 N 下映满 $[a_1, a_3]$. 又 I_2 是 (a_2, a_3) 内的闭区间，也在 N 下映满 $[a_1, a_3]$，试用 I_1 和 I_2 给出转换图.

d. 证明牛顿映射 N 有所有周期的周期点.（注意对这些点牛顿迭代并不收敛于其多项式的零点.）

e. 证明 N 的不动点 2 的吸引域包含区间$(\sqrt{2.5}, \infty)$(类似证明不动点 -2 的吸引域包含区间$(-\infty, -\sqrt{2.5})$).

10.1.5 令 f_0 是$[0, 1]$上恒等于 1/3 的函数，f_1 是方程(10.1.2)中用 f_0 定义的函数(f_0 和 f_1 的周期间的关系由方程(10.1.1)确定)，利用归纳法令 f_n 是方程(10.1.2)中用 f_{n-1} 定义的函数，并用 $f_\infty(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 定义 f_∞.

a. 利用方程(10.1.2)和归纳法证明每个函数 f_n 的点的周期恰好等于$\{1, 2, \cdots, 2^n\}$.

b. 解释为什么 f_∞ 是连续的. 提示：利用归纳法证明对于 $k \geq n$，当 $1/3^n \leq x \leq 1$ 时，$f_k(x)=f_n(x)$，而当 $0 \leq x < 1/3^n$ 时，$f_k(x) \geq f_n(x)$，因此 $f_\infty(0)=1$.

c. 证明 f_∞ 的周期恰好是$\{2^i: 0 \leq i < \infty\}$，并进一步解释对每一个 n，为什么 f_∞ 恰有一条 2^n-周期轨道.

10.1.6 设 f 是闭区间$[a, b]$到其自身的连续函数. 证明 f 在$[a, b]$内有不动点. 420

10.1.7 设 I_1，I_2，I_3 和 I_4 是不相交的闭区间，且 f 是满足 $f(I_1)=I_2$，$f(I_2)=I_3$，$f(I_3)=I_4$ 和 $f(I_4) \supset I_1 \cup I_2 \cup I_3$ 的连续映射. 证明 f 有 3-周期点.

10.2 拓扑传递性

10.2.1 下面哪些集合在$[0, 1]$上是稠密的?

a. S_1 是$[0, 1]$内所有形如$\frac{p}{2^n}$的实数的集合，其中 p 和 n 是任意正整数.

b. S_2 是$[0, 1]$内除形如$\frac{p}{2^n}$的实数外的其他实数的集合，其中 p 和 n 是任意的正整数(即 $S_2=[0, 1]\setminus S_1$).

c. 考虑$[0, 1]$中的所有这样的数 x，它具有用数字 0，2，4，6，8，而不是 1，3，5，7 和 9 表示的十进制展开式，即

$$S_3=\left\{x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_j}{10^j}: d_j \text{ 为 } 0,2,4,6,8\right\}$$

10.2.2 写出数 5/24 的三进制展开式.

10.2.3 用数的三进制展开式证明三倍映射 $f(x)=3x(\bmod 1)$是拓扑传递的.

10.2.4 用其二进制展开式描述一个无理数，它在双倍映射之下的轨道是不稠密的.

10.2.5 令 S 是对于双倍映射有稠密轨道的所有无理数的集合，证明 S 在$[0, 1]$内是稠密的. 提示：考虑如下形式的数：

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{2^j}+\frac{1}{2^k}x^*,$$

其中，x^* 在双倍映射之下的轨道是稠密的.

10.3 符号序列

10.3.1 考虑关于二次映射 G 的区间，令 x_0 是与符号串 $LRRLLRRL$ 相对应的点，x_0 是小于还是大于 1/2? $G^5(x_0)$是小于还是大于 1/2?

10.3.2 考虑三倍映射 $f(x)=3x(\bmod 1)$，分别用 $I_L=[0, 1/3]$，$I_C=[1/3, 2/3]$和 $I_R=[2/3, 1]$表示左、中、右区间，给出符号串长度小于等于 3 的所有区间，这些区间在直线上的顺序如何?

10.3.3 考虑如下定义的“齿状映射”

$$S(x)=\begin{cases}3x & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}\\ 2-3x & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\\ 3x-2 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1.\end{cases}$$

分别用符号 L, C 和 R 表示三个区间 $I_L=[0,\ 1/3]$, $I_C=[1/3,\ 2/3]$ 和 $I_R=[2/3,\ 1]$.

a. 给出对应于两个符号的符号串(例如，I_{CR})的 9 个区间在直线上的排序(即确定哪个区间在最左面，哪个区间在最左边第二个，…，哪个区间在最右面).

421

b. 考虑区间 I_{CRL}. 它是哪个涉及两个符号的区间 $I_{t_0t_1}$ 的子集？当给出三个符号的符号串的区间时，$I_{t_0t_1}$ 被分成三个子区间. 请问：在这三区间中 I_{CRL} 是在左端、中间，还是在右端？

10.3.4 给出 Σ_2^+ 中 σ 的 3-周期点的所有序列，对 σ 而言哪些序列在同一轨道上？

10.4　对初始值的敏感依赖性

10.4.1 令 $f(x)=3x(\mathrm{mod}1)$ 是三倍映射.

a. 证明：若两个不同点 x_0 和 x'_0 之间的距离小于 1/6，则它们迭代间的距离至少是该距离的三倍. 提示：利用三区间 $[0,\ 1/3)$, $[1/3,\ 2/3)$ 和 $[2/3,\ 1)$ 以及 $x<y$，分两种情况考虑：(i) x 和 y 在同一区间内；(ii) x 和 y 在相邻区间内. 分别在这两种情况下证明(i) $f(y)-f(x)=3(y-x)$ 和(ii) $f(x)-f(y)\geqslant 1-3(y-x)$.

b. 找出一点对，使它们在映射后的距离不是原来的三倍.

c. 证明 f 具有对初始值的敏感依赖性.

10.4.2 考虑练习 10.3.3 所定义的"齿状映射" $S(x)$，证明 S 有对初始值的敏感依赖性.

10.4.3 令 p 是 f 的不动点，且 $|f'(p)|>1$. 证明 f 在 p 处具有对初始值的敏感依赖性.

10.4.4 令 p 是 f 的 n-周期点，且 $|(f^n)'(p)|<1$，证明 f 在 p 处不具有对初始值的敏感依赖性.

10.4.5 详细证明逻辑斯谛映射 G 具有对初始值的敏感依赖性.

10.4.6 利用计算机程序验证二次映射 $G(x)=4x(1-x)$ 具有对初始值的敏感依赖性. 对两个不同初始值 x_0 和 $x_0+\delta$(其中 $x_0=0.1$ 和 0.48，$\delta=0.01$ 和 0.001)，需要进行多少次迭代才能分开至 0.1 和 0.3(的距离)？(因此，有四对点.)

10.5　康托尔集

10.5.1 若区间序列 J_k 满足 $J_k\supset J_{k+1}$, $k\geqslant 1$，则称其为区间套.

a. 找出闭区间套序列 J_k 使得

$$\bigcap_{k\geqslant 1} J_k=\varnothing.$$

b. 找出有界区间套序列 J_k 使得

$$\bigcap_{k\geqslant 1} J_k=\varnothing.$$

10.5.2 令

$$T(x)=T_5(x)=\begin{cases}5x & x\leqslant 0.5\\ 5(1-x) & x\geqslant 0.5.\end{cases}$$

a. 画出 T 的图像.

b. 使得 x 和 $T(x)$ 都属于 $[0,\ 1]$ 的点 x 所成的区间是什么？

c. 论述使得 x, $T(x)$ 和 $T^2(x)$ 都在 $[0,\ 1]$ 内的 x 的集合，即论述

$$\{x: T^j(x)\in[0,1],0\leqslant j\leqslant 2\}.$$

它由几个区间构成，每个区间的长度分别是多少？其总长度又是多少？

d. 无需给出确切区间，回答集合

$$K_n=\{x: T^j(x)\in[0,1],0\leqslant j\leqslant n\}$$

含有多少个区间？各区间的长度是多少？

422

e. 令

$$K = \{x: T^j(x) \in [0,1], j \geq 0\}.$$

解释[0, 1]内的哪些数属于 $\boldsymbol{K}$, 用五进制展开式即 $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j/5^j$ 表示出这些数.

f. 给出 $\boldsymbol{K}$ 内一个数, 使得它不是在定义 $\boldsymbol{K}$ 的有限过程中出现的区间的端点.

g. 23/25 和 25/31 属于集合 $\boldsymbol{K}$ 吗?

10.5.3 考虑如 10.5 节所定义的具有区间 $I^{g_5}_{s_0\cdots s_n}$ 的逻辑斯谛映射 $g_5(x) = 5x(1-x)$, 证明 $I^{g_5}_{LL}$ 和 $I^{g_5}_{LR}$ 的长度不同.

10.5.4 考虑[-1, 1]上的函数 $F(x) = 6x^3 - 5x$. 满足 $F(x) = 1$ 的点是 1 和 $-1/2 \pm\sqrt{3}/6$. 满足 $F(x) = -1$ 的点是 -1 和 $1/2 \pm\sqrt{3}/6$.

a. 画出 F 的图像.

b. 描述使 x 和 $F(x)$ 属于[-1, 1]的点 x 的集合, 即

$$\boldsymbol{K}_1 = \{x: F^j(x) \in [-1,1], 0 \leq j \leq 1\} = \bigcap_{j=0}^{1} F^{-j}([-1,1]).$$

它是由多少个区间组成的? 这些区间的最大长度是多少?

c. 描述点集

$$\boldsymbol{K}_2 = \{x: F^j(x) \in [-1,1], 0 \leq j \leq 2\} = \bigcap_{j=0}^{2} F^{-j}([-1,1]).$$

它由多少个区间组成? $\boldsymbol{K}_2$ 内每个区间长度的(上下)界是多少? 提示: 利用 $\boldsymbol{K}_1$ 上导数绝对值的下界(即对某 $\lambda > 1$, 对 $\boldsymbol{K}_1$ 内所有 x 都有 $|F'(x)| \geq \lambda$).

d. 给出集合

$$\boldsymbol{K}_n = \{x: F^j(x) \in [-1,1], 0 \leq j \leq n\} = \bigcap_{j=0}^{n} F^{-j}([-1,1])$$

某个区间的长度的界.

e. 解释为什么 F 有一个类似于康托尔集的不变集?

10.5.5 考虑[0, 2π]上的余切函数 $f(x) = \cot(x)$. 解释为什么它一个与康托尔集类似不变集, 且它是由所有迭代都在[0, 2π]内的点所组成的.

10.6 子位移: 分段扩张区间映射

10.6.1 考虑映射

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + 2x & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{3} \\ 2 - 3x & \dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3} \\ 2x - \dfrac{4}{3} & \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

423

a. 画出 f 的图像(即画出 $f(x)$ 关于 x 的曲线图, 而非其转换图).

b. f 的马尔可夫分割是什么? f 在[0, 1]上的扩张因子是什么?

c. 马尔可夫分割的转换图是什么?

d. 为什么 f 在[0, 1]内具有一稠密轨道?

e. 对不超过 6 的每个正整数周期，f 有多少个周期点？

10.6.2 考虑不连续映射

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+2x & 0\leqslant x<\dfrac{1}{3}\\ 3x-1 & \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{7}{3}-2x & \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

a. 画出 g 的图像(即画出 $g(x)$ 关于 x 的曲线图，而非其转换图).

b. g 的马尔可夫分割是什么？g 在$[0,1]$上的扩张因子是什么？

c. 马尔可夫分割的转换图$\mathcal{G}$是什么？

d. 令 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 是用转换图表示的容许符号序列之集. 令 h 是 g 的迭标函数，因为函数 g 是不连续的，有可能 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 内的一个容许符号序列 $\mathbf{s}$ 不能对应于 g 的一条轨道(即对于$[0,1]$内的任何 x，$\mathbf{s}$ 都不等于 $h(x)$). 求 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 内所有这样的容许符号序列 $\mathbf{s}$ 使对$[0,1]$内的所有 x 都有 $\mathbf{s}\neq h(x)$.

10.6.3 找出定义在区间$[0,1]$上函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}x & 0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{2}\\ 2-\sqrt{2}x & 1/\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

的马尔可夫分割.

10.6.4 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{5}x & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{7}\\ \dfrac{7}{5}(1-x) & \dfrac{2}{7}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

不具有马尔可夫分割.

10.6.5 考虑转换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

对小于等于 4 的任一正整数 n，σ_T 有多少个 n-周期点？

10.6.6 令

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{T}^k=\begin{bmatrix}a_k&b_k\\c_k&d_k\end{bmatrix}.$$

a. 对向量(x_0,y_0)，令$(x_k,y_k)=(x_0,y_0)\boldsymbol{T}^k$. 取 $y_{-1}=x_0$，证明：$x_{k+1}=y_k$ 和 $y_{k+1}=y_k+y_{k-1}$.(因此，y_k 满足斐波那契递推关系.)

b. 利用$(1,0)\boldsymbol{T}^k=(a_k,b_k)$和$(0,1)\boldsymbol{T}^k=(c_k,d_k)$证明：$a_k=a_{k-1}+a_{k-2}$和 $d_k=d_{k-1}+d_{k-2}$(即它们也满足斐波那契循环关系).

c. 证明 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^k)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^{k-2})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^{k-1})$.

10.6.7 利用符号动力学证明例题 10.6.2 的屋顶映射具有对初始值的敏感依赖性，不引用定理，而是给出清楚的证明过程.

10.7 应用

10.7.1 令 $p(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ 是次数为 5 的多项式，其所有实根不同且满足

$$x_0<x_1<x_2<x_3<x_5.$$

采用类似于有四个实根时定理 10.7.1 的证明中选取区间的方式，描述此映射的符号动力学.

10.7.2 考虑没有实根的多项式 $p(x)=x^2+1$.

a. 确定其牛顿映射 $N_p(x)$，并画出它的图像.

b. 令 $D(x)=2x(\bmod 1)$ 是双倍映射，$C(x)=\cot(\pi x)$ 是余切函数，后者是区间 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 证明 $C(D(x))=N_p(C(x))$，所以 C 是 D 和 N_p 的共轭. 提示：利用 $\cot(\pi x+\pi)=\cot(\pi x)$ 和

$$\begin{aligned}\cot(2\pi x)&=\frac{\cos^2(\pi x)-\sin^2(\pi x)}{2\sin(\pi x)\cos(\pi x)}\\&=\frac{1}{2}\left(\cot(\pi x)-\frac{1}{\cot(\pi x)}\right).\end{aligned}$$

c. 证明 $N_p(x)$ 有一条在整个实轴上是稠密的轨道.

425

第 11 章 一维映射的不变集

在第 10 章，我们利用符号动力学来寻找周期轨道以及具有复杂动力学行为的轨道，本章将介绍关于复杂动力学行为的更多的概念.

11.1 节将讨论轨道的长期动力学行为和轨道所逼近的点的集合，即 ω 极限集，11.2 节将利用 ω 极限集和对初始值的敏感依赖性这两个概念来定义混沌吸引子.

11.3 节将定义轨道的李雅普诺夫指数，它用来测量相邻轨道的分离情况，这个概念与用数值计算方式来判断混沌吸引子的存在性有密切关系.

11.4 节将讨论集合的广义长度或尺度，称其为测度，特别介绍一种特殊类型的测度——频率测度，它以一种特别的方式描述轨道的极限点，还能描述轨道回到一个集合不同部分的频率.

11.1 极限集

对于帐篷映射，存在点 x^*，它的轨道在[0，1]上是稠密的，另一方面，对于诸如 $g_{1.5}=1.5x(1-x)$ 的映射，它有一个不动点，其吸引域包含了(0，1)中的所有点，这两种情况都可以用本节所定义的 ω 极限集来描述，对于微分方程系统来说，也有类似的定义，我们已在 5.4 节给出. 虽然吸引的周期点也包含类似的思想，但本书不采用这个术语. 在 11.2 节可以看出，ω 极限集的概念对于定义混沌吸引子非常重要.

定义 11.1.1 令 f 是空间 X 上的映射，x_0 为取自 X 的初始值，如果存在迭代序列 k_j 使得当 k_j 趋向无穷时，$f^{k_j}(x_0)$ 收敛于点 q，则称 q 为 x_0 的 ω 极限点，这表明 x_0 的轨道总是会一次次地回来并靠近点 q，更确切地说，对任意 $N>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $n\geqslant N$ 使得

$$|f^n(x_0)-q|<\varepsilon.$$

由于 ω 是希腊字母表中的最后一个字母，所以采用这种记法，这里的极限过程是指让迭代的幂次趋向于无穷.

427

点 x_0 的 ω 极限集定义为 x_0 的所有 ω 极限点的集合，即

$$\omega(x_0;f)=\{q:q\text{ 是 }x_0\text{ 的 }\omega\text{ 极限点}\}.$$

命题 11.1.2 (a)若 x_0 是 f 的 n-周期点，则

$$\omega(x_0;f)=\mathcal{O}_f^+(x_0)=\{f^j(x_0):0\leqslant j<n\}.$$

(b)若 x_0 属于 n-周期点 p 的吸引域，则 $\omega(x_0;f)=\mathcal{O}_f^+(p)$.

证明留给读者.

注意，若 x_0 的轨道在趋向于周期汇的过程中经过某点 y，则 y 不属于 x_0 的 ω 极限集.

下面的定理表明存在映射(例如，帐篷映射)，它有一个点，其 ω 极限集是一区间.

定理 11.1.3 帐篷映射 T 有一个点 x^* 满足 $\omega(x_0;T)=[0,1]$.

此结论不能直接由 x^* 的轨道在[0, 1]是稠密的这一事实推出，但是，从这一事实的证明过程可以看出 x^* 的极限集确实有此性质.

帐篷映射还有这样的点，其 ω 极限集是[0, 1]的子集，且不是周期轨道. 在习题中我们留给读者去证明存在一个点 x_0 使得 $\omega(x_0, T)$ 等于[0, 1]区间上的康托尔子集，此集合是不可数的，但并不等于区间[0, 1].

例 11.1.4　本例讨论一个映射，它在某一区间上有稠密的轨道，但没有周期轨，也不具备对初始值的敏感依赖性，这个映射是“圆周”上的一个旋转，其转角与全旋转之比为无理数.

把 0 和 1 视为相等构成一个圆周，并定义距离 d：对小的 δ，定义 $1-\delta$ 与 δ 的距离为 $d(1-\delta, \delta)=2\delta$,更确切地说，对于 $0\leqslant x\leqslant y<1$，定义

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \min\{y-x, 1+x-y\} \\ &= \min\{|y-x-k| : k\in\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

令 α 是一个无理数(比如，$\alpha=\sqrt{2}/2$)，用 R_α 表示这样一个旋转，其转角是对应于区间[0, 1]的周角的 α 分比，即

$$R_\alpha(x) = x+\alpha \pmod 1.$$

下面都用 $R(x)$ 代表 $R_\alpha(x)$.

如果采用把 0 和 1 视为相等后定义的距离，则有

$$d(R(x), R(y)) = d(x+\alpha, y+\alpha) = d(x,y),$$

这表明 R 保持两点间的距离，从而不具有对初始值的敏感依赖性.

首先证明 R 没有周期点，也没有最终周期点，若 x 是最终周期点，则 $R^{n+j}(x)=R^j(x)$，因此

$$x+(n+j)\alpha = x+j\alpha \pmod 1,$$

$$x+(n+j)\alpha = x+j\alpha+k \quad 对某一整数$$

$$\alpha = \frac{k}{n}.$$

然而最后一式表明 α 是有理数，这是不可能的，所以 R 没有最终周期点. [428]

下面证明 R 的任一轨道在[0, 1]上都是稠密的. 对任意 $\varepsilon>0$，任取一个点 x_0，由于 $R^j(x_0)$ 互不相同，所以必存在 n 和 $n+m$ 使得

$$d(R^{n+m}(x_0), R^n(x_0)) < \varepsilon.$$

因此，必有一个整数 k 使得

$$\begin{aligned} \varepsilon &> d(R^{n+m}(x_0), R^n(x_0)) \\ &= |x_0+(n+m)\alpha-(x_0+n\alpha)-k| \\ &= |m\alpha-k| \\ &= d(R^m(0), 0). \end{aligned}$$

这表明 0 返回并趋近于自身，又由于 R^{mj} 保持距离，$d(R^{m(j+1)}(0), R^{mj}(0))<\varepsilon$，不妨设 $R^m(0)>0$，则点列

$$0 < R^m(0) < R^{2m}(0) < R^{3m}(0) < \cdots$$

相邻两点是等距的且距离不超过 ε，最终 $R^{km}(0)$ 必然大于 1，从而回到区间[0, 1]的开始部

分，这表明$\mathcal{O}_R^+(0)$与区间$[0, 1]$中任一点的距离都小于ε，再根据ε的任意性可知此轨道在$[0, 1]$上是稠密的.

此过程还表明对任意$x_0 \in [0, 1]$有$\omega(x_0; R_\alpha) = [0, 1]$. ■

下述最后一个定理给出了ω极限集的一些性质.

定理 11.1.5　(a)任一点x_0的ω极限集$\omega(x_0; f)$都是闭集.

(b)若$y_0 \in \omega(x_0; f)$，则$\mathcal{O}_f^+(y_0) \subset \omega(x_0; f)$.

(c)若$y_0 \in \omega(x_0; f)$，则$\omega(y_0; f) \subset \omega(x_0; f)$.

证明　(a)假设存在点y_∞和$\omega(x_0; f)$中可任意靠近y_∞的点列$y_i\left(比如可设|y_i - y_\infty| < \frac{1}{i}\right)$，选取$k_{j,i}$使得当$j$趋向于无穷时$f^{k_{j,i}}(x_0)$收敛于$y_i$，且

$$|f^{k_{j,i}}(x_0) - y_i| < \frac{1}{j}.$$

令$j = i$，则

$$\begin{aligned}|f^{k_{i,i}}(x_0) - y_\infty| &\leqslant |f^{k_{i,i}}(x_0) - y_i| + |y_i - y_\infty| \\ &< \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i}\end{aligned}$$

可任意小，因此$y_\infty \in \omega(x_0; f)$，这表明$\omega(x_0; f)$中任何收敛点列的极限都属于$\omega(x_0; f)$，从而$\omega(x_0; f)$是闭集.

(b)若$f^{k_j}(x_0)$收敛于y_0，则$f^{k_j+i}(x_0)$收敛于$f^i(y_0)$，因此$f^i(y_0)$属于$\omega(x_0; f)$，这对任意i都成立，从而$\mathcal{O}_f^+(y_0) \subset \omega(x_0; f)$.

(c)因为$\omega(x_0; f)$是闭集，所以此结论可由(b)直接推出. ■

11.2　混沌吸引子

一吸引子$\boldsymbol{A}$的粗略定义是：$\boldsymbol{A}$是一个不变集，其临近点的ω极限集都包含在$\boldsymbol{A}$内. 然而，这里定义吸引子不是用ω极限集，而是用它有收缩域这一更强的条件.

一旦定义了吸引子，如果限制在该吸引子上，它具有对初始值的敏感依赖性，则称它是混沌的.

429

下面通过一个例子来引出吸引子、混沌吸引子等的正式定义.

例 11.2.1　令W表示W-映射

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \leqslant 0 \\ 2x & 0 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ 2(1-x) & 0.5 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}(1-x) & 1 \leqslant x. \end{cases}$$

其图像由图 11.2.1 给出，可以看出$W([-0.5, 1.5]) = [0, 1] \subset (-0.5, 1.5)$，由于从$[-0.5, 1.5]$中的点出发的轨线都跑不出此集合，且$[-0.5, 1.5]$在$W$下的像是$[-0.5,$

1.5]的真子集，所以称区间[-0.5，1.5]为“收缩域”(trapping region). 容易看出收缩域的向前迭代的交集等于[0，1]，即

$$\bigcap_{j\geq 0} W^j([-0.5,1.5]) = [0,1].$$

因为对任意 $x_0 \in [-0.5, 1.5]$ 有 $\omega(x_0; W) \subset [0, 1]$，所以称[0，1]为吸引集；由于映射 W 在[0，1]上的限制就是帐篷映射，故存在这样的点，其 ω 极限集等于[0，1]，可见[0，1]不能被分成更小的吸引集，从而称[0，1]是一个吸引子；由于 W 在[0，1]上的限制恰是帐篷映射，所以它有对初始值的敏感依赖性，因此[0，1]称为是 W 在ℝ上的“混沌吸引子”. ■

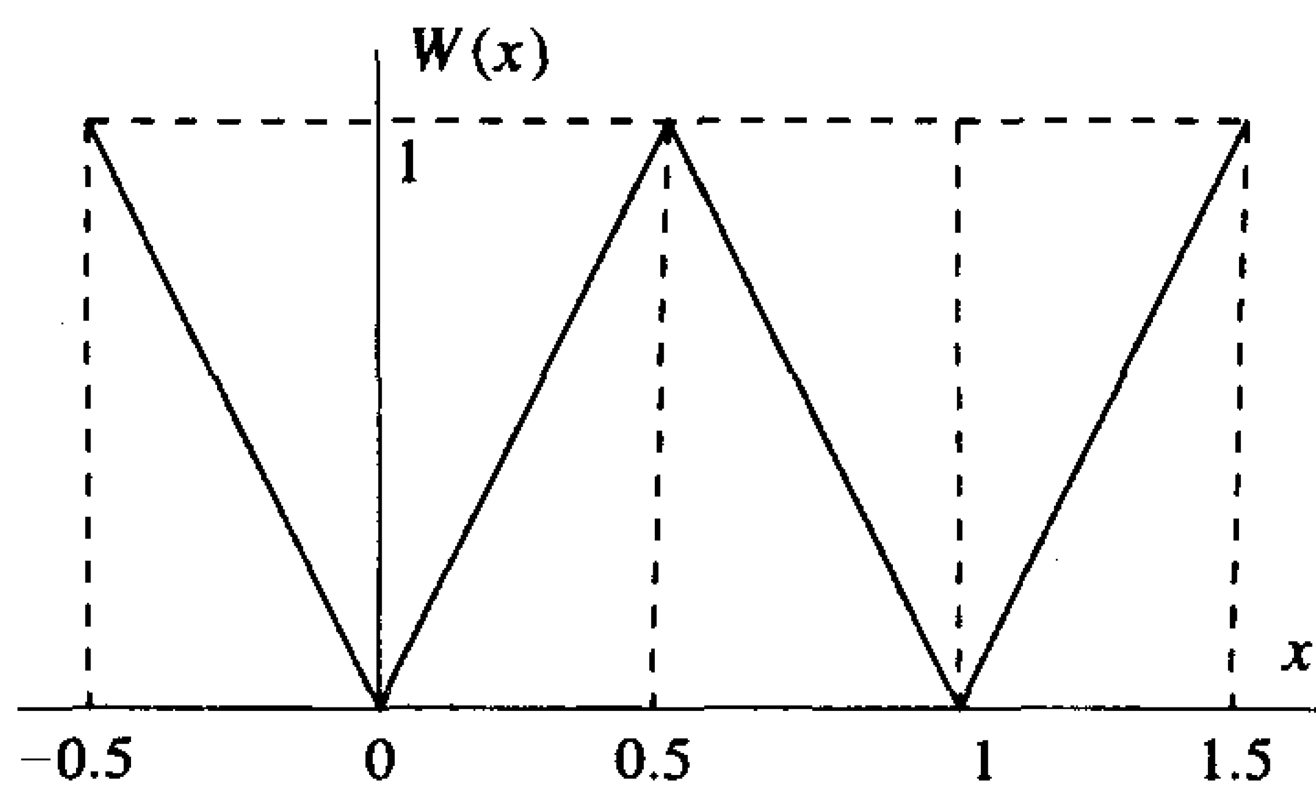


图 11.2.1 W 映射

下面继续给出收缩域、吸引集、吸引子的正式定义，为表述收缩域被映射映入自身这一事实，我们引入集合的闭包和集合的内部等术语.

定义 11.2.2 $\mathbb{R}^n$ 中集合 S 的内部(interior)是指包含在 S 中的最大开集 U，记作 int(S)；int(S)中的任意点都有一个球形邻域完全包含在 S 中，即

$$\begin{aligned}\text{int}(S) &= \{x \in \mathbb{R}^n: \text{存在 } r > 0 \text{ 使得 } B(x,r) \subset S\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n: d(x,\mathbb{R}^n \setminus S) > 0\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ 中集合 S 的闭包(closure)是指包含 S 的最小闭集 C，记作 cl(S)；确切地说，

$$\begin{aligned}\text{cl}(S) &= \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus S) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n: d(x,S) = 0\},\end{aligned}$$

其中 $d(x, S)$表示点 x 到集合 S 的距离(参见附录 B).

430

$\mathbb{R}^n$ 中集合 S 的边界(boundary)是指将 S 的内部与其外部分离的点的集合，记作 bd(S)，确切地说，

$$\begin{aligned}\text{bd}(S) &= \text{cl}(S) \setminus \text{int}(S) \\ &= \text{cl}(S) \cap \text{cl}(\mathbb{R}^n \setminus S) \\ &= \{x: B(x,r) \cap S \neq \varnothing, B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \varnothing, \text{对每个 } r > 0\}.\end{aligned}$$

若集合 C 包含其所有边界点，则 C 是闭集.

定义 11.2.3 若集合 U 是有界的且 $f(U)$的闭包包含在 U 的内部，则称 U 是收缩域，即

$$\text{cl}(f(U)) \subset \text{int}(U).$$

这意味着集合 U 被很好地映入自身，没有一个点被映射到边界上.

定义 11.2.4 给定集合 A，若存在收缩域 U 满足

$$A = \bigcap_{j\geq 0} f^j(U),$$

则称 A 是吸引集(即 A 是包含在 U 内的最大不变集)，也称集合 A 以 U 为收缩域，或 A 有收缩域.

若一个吸引集不含有吸引的真子集，则称它为不可分的(即若$\varnothing \neq B \subset A$，则 $B = A$).

不可分的吸引集称为是吸引子(attractor).

注 11.2.5 吸引集 A 的定义的思想是：A 附近点的 ω 极限集都必须包含在 A 中；而吸引子 A 的定义的思想是：首先 A 是个吸引集，而且 A 中不包含更小的吸引集，因此从某种意义上说它是不可分的. C. Conley 证明了满足上述“不可分”假设的吸引子都有某种类型的回归，吸引子 A 中任一点都是链回归的，并且 A 中任意两点间存在一条 ε 链，即对给定的两点 p 和 q 和任意小的 $\varepsilon>0$，存在点列 $x_0=p$，x_1，…，$x_n=q$ 使得 $|f(x_{i-1})-x_i|<\varepsilon$，因此存在一条从 p 到 q 带误差的轨道，同样也存在从 q 到 p 的 ε 链，详见[**87**].

例 11.2.6 考虑有五个不动点 $p_1<p_2<p_3<p_4<p_5$ 的映射 f，其中 p_1，p_3，p_5 是吸引的，p_2，p_4 是排斥的，设 $\delta>0$，对 $i=1$，3，5 有

$$f([p_i-\delta,p_i+\delta])\subset(p_i-\delta,p_i+\delta)\text{ 和}$$

$$\bigcap_{j\geq 0}f^j([p_i-\delta,p_i+\delta])=\{p_i\}.$$

因此对 $i=1$，3，5，$\{p_i\}$ 是吸引集，又由于它们都没有非空真子集，因此 $\{p_i\}$ 都是吸引子.

此外

$$\bigcap_{j\geq 0}f^j([p_1-\delta,p_5+\delta])=[p_1,p_5],$$

$$\bigcap_{j\geq 0}f^j([p_1-\delta,p_3+\delta])=[p_1,p_3],$$

431

$$\bigcap_{j\geq 0}f^j([p_3-\delta,p_5+\delta])=[p_3,p_5],$$

因此 $[p_1, p_5]$，$[p_1, p_3]$ 和 $[p_3, p_5]$ 都是吸引集，由于每一个区间都至少含有吸引子 $\{p_1\}$，$\{p_3\}$，$\{p_5\}$ 中的两个，所以这些区间都不是吸引子. ■

在很多例子中，能找到 A 中点 x_0 使得 $\omega(x_0)=A$，因此 A 是拓扑传递的而且是强不可分的；其他例子中使得 $\omega(x_0)=A$ 的点 x_0 并不属于 A，但 A 仍是不可分的. 下面的命题说明在上面任何一种情况下，吸引集都一定是吸引子.

命题 11.2.7 令 A 是吸引集，且存在点 x_0 使得 $\omega(x_0)=A$，则 A 是吸引子.

因为 A 的任意吸引子集 B 都必包含 $\omega(x_0)$，所以 $B=A$，从而命题成立.

定义 11.2.8 不变集 S 称为是混沌的，如果 f 限制在 S 上有对初始值的敏感依赖性.

因此，如果

(i) A 是吸引子.

(ii) f 限制在 A 上有对初始值的敏感依赖性.

则称 A 是混沌吸引子.

由于 f 限制在 A 上有对初始值的敏感依赖性，所以集合 A 不可能仅是一条周期轨道.

注 11.2.9 正如在历史回顾中所述，T. Y. Li 和 J. York 在文献[**66**]中首次引入“混沌”一词，尽管他们在其论文中准确给出了所研究系统的很多数学性质，但并未准确给出混沌所必需的性质.

Devaney 在文献[**31**]中首次给出了“混沌”的准确数学定义，在他的定义中涉及混沌集(或混沌系统，也就是把映射限制在不变集上)，三个必需的性质是：系统有对初始值的敏感依赖

性；周期点在此集合上是稠密的；存在一点，其轨道在此集合中是稠密的. 有稠密轨道等价于存在 A 中的点 x_0 满足 $\omega(x_0)=A$，我们去掉了具有稠密周期轨道这一要求，是因为它似乎不是必需的且不容易观察出来，从附录 D 中的讨论可以看出为何"通有的"系统的周期轨道全体在任一吸引子中都是稠密的.

还有其他一些混沌吸引子的定义，11.3.1 节将介绍 Alligood、Sauer 和 Yorke 在书[7]中提出的基于李雅普诺夫指数的一个定义.

下面的定理是前面结论的推论.

定理 11.2.10　区间$[0, 1]$是帐篷映射 T 的混沌不变集；对于帐篷映射 T，$[0, 1]$在$\mathbb{R}$上没有收缩域，因此它不是$\mathbb{R}$中的吸引子.

下面的例子表明映射在不变集中所有点有敏感依赖性与其限制在不变集上有敏感依赖性是不同的.

例 11.2.11　在吸引集中所有点有敏感依赖性与限制在吸引集上有敏感依赖性的差异不能出现于单变量映射，我们给出有两个变量的一个例子，且可表示成可解的微分方程组的解的映射，为此，考虑下面极坐标形式的微分方程组

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}(r-1)^3$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha 2\pi + \frac{1}{2}(r-1).$$

432

记满足条件 $r(0;\ r_0)=r_0$ 和 $\theta(0;\ r_0,\ \theta_0)=\theta_0$ 的解为 $r(t;\ r_0)$ 和 $\theta(t;\ r_0,\ \theta_0)$，当 $r_0\neq 1$ 时分离变量，得

$$\frac{-2\dfrac{dr}{dt}}{(r-1)^3} = 1$$

$$(r(t;r_0)-1)^{-2} = t + C$$

$$r(t;r_0) - 1 = \frac{S}{\sqrt{t+C}},$$

其中

$$S = \mathrm{sign}(r_0 - 1) = \begin{cases} 1 & r_0 - 1 \geq 0 \\ -1 & r_0 - 1 < 0. \end{cases}$$

令 $t=0$，则

$$r_0 - 1 = \frac{S}{\sqrt{C}} \quad 或$$

$$C = (r_0 - 1)^{-2}.$$

因此

$$r(t;r_0) = \begin{cases} 1 & r_0 = 1 \\ 1 + \dfrac{\mathrm{sign}(r_0 - 1)}{\sqrt{t + (r_0 - 1)^{-2}}} & r_0 \neq 1. \end{cases}$$

把上面关于$r(t;\ r_0)$的表达式代入关于θ的微分方程，则有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\alpha 2\pi+\frac{S}{2\sqrt{t+C}},$$

$$\theta(t;r_0,\theta_0)=\theta_0+\alpha 2\pi t+S(\sqrt{t+C}-\sqrt{C})\quad (\bmod 2\pi),$$

$$\theta(1;r_0,\theta_0)=\theta_0+\alpha 2\pi+S(\sqrt{1+C}-\sqrt{C})\quad (\bmod 2\pi).$$

利用$r(1;\ r_0)$和$\theta(1;\ r_0,\ \theta_0)$，定义映射

$$F\begin{bmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r(1;r_0) \\ \theta(1;r_0,\theta_0)\quad (\bmod 2\pi) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+\dfrac{\operatorname{sign}(r_0-1)}{\sqrt{1+(r_0-1)^{-2}}} \\ \theta_0+\alpha 2\pi+S(\sqrt{1+C}-\sqrt{C})\quad (\bmod 2\pi) \end{bmatrix},$$

其中$C=(r_0-1)^{-2}$，$S=\operatorname{sign}(r_0-1)$.

令

$$U=\{(r,\theta):0.5\leqslant r\leqslant 1.5,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

则

$$F(U)\subset\operatorname{int}(U)=\{(r,\theta):0.5<r<1.5,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}\quad 和$$

$$\bigcap_{j\geqslant 0}F^j(U)=\{(1,\theta):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

因此，$A=\{(1,\ \theta):\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$是个吸引集，$U$是它的收缩域.

当$r_0=1$时$r(n;\ 1)=1$，$\theta(n;\ 1,\ \theta_0)=\theta_0+\alpha 2\pi n$，映射$F$类似于旋转映射$R_\alpha$(只不过$\alpha$多乘了因子$2\pi$，原因在于此时自变量是取模$2\pi$，而非模1)，如果$\alpha$是无理数，则$\omega((1,\ \theta_0);\ F)=A$(即$F$在圆环$r=1$上是拓扑传递的)，因此当$\alpha$是无理数时，集合$A$是吸引子.

433

因为映射F保持长度，所以它限制在A上不具有对初始值的敏感依赖性，因此A不是混沌吸引子.

然而，若$r_0>1$，则当n趋向无穷时

$$\theta(n;r_0,\theta_0)-[\theta_0+\alpha 2\pi n]=(\sqrt{n+(r_0-1)^{-2}}-(r_0-1)^{-1})$$

趋向于无穷，因此单位圆周以外的点的迭代比圆周上点的迭代跑得快，这使得当把F看成二维空间上的映射时，它在A中任一点都具有对初始值的敏感依赖性. ■

下面吸引子的定义是由J. 米尔诺给出的，它是其他最常见的定义之一. 为此，需要先介绍不变集的吸引域.

定义 11.2.12 一闭不变集A的吸引域是指其ω极限集含于A的点的集合：

$$\mathcal{B}(A;f)=\{x_0:\omega(x_0;f)\subset A\}.$$

集合$\mathcal{B}(A,\ f)$的勒贝格测度$\lambda(\mathcal{B}(A,\ f))$(对$\mathbb{R}$的子集来说)就是广义的"长度"，若吸引域是可数个互不相交的开区间的并，则它的勒贝格测度就是这些开区间的长度之和；对于$\mathbb{R}^2$来说，勒贝格测度就是广义的面积，详情参阅11.4节.

如果闭不变集 A 满足条件：(i) A 的吸引域 $\mathcal{B}(A, f)$ 的勒贝格测度为正，即 $\lambda(\mathcal{B}(A, f)) > 0$；(ii) 不存在更小的闭不变集 $A' \subset A$ 使得 $\mathcal{B}(A, f) \setminus \mathcal{B}(A', f)$ 是个零测集，则称 A 是映射 f 的米尔诺吸引子(Milnor attractor).

对于映射 $f(x) = x + x^2$，由于 $\mathcal{B}(0; f) = [-1, 0]$，所以原点是米尔诺吸引子；但是，原点只是半稳定的，所以它没有收缩域，因而不适合我们给出的吸引子的定义.

注 11.2.13　米尔诺吸引子的特点在于它是可以观察出来的，事实上，随机地选取一些初始点，则这些点落在 A 的吸引域中的概率大于零；它是用不存在比 A 小且与 A 具有相同测度的吸引域的集合来表述 A 的不可分性的；此定义适用于一维映射，但对于高维映射来说，米尔诺吸引子在通常意义下未必是吸引的，因此，我们不把米尔诺的定义作为吸引子的主要定义，当本书使用他的定义时，就视该集合是米尔诺吸引子.

不连续扩张映射的混沌吸引子

若闭区间 J 是 f 的混沌吸引子，则 J 中相近两点经迭代后会远离，因此 f 一定是扩张的，至少总体上是这样的，又由于 J 是不变的，所以一定存在重叠或断开(即 J 一定可以分成若干子区间，在每个子区间上映射 f 是扩张的，而且分割点必使 f 的像改变方向或使 f 不连续)，注意到例 11.2.1 中的 W-映射和帐篷映射都具有拉伸和重叠；而双倍映射具有拉伸和断开. 在这一部分，我们将给出更多具有扩张和断开的混沌吸引子的例子，还将给出映射具有混沌吸引子的显式条件.

434

因为需要使两条相邻轨道随迭代而分离，所以考虑满足 $|f'(x)| > 1$ 的扩张映射；又因为我们希望出现切断，所以考虑具有不连续点的映射，事实上，折叠就体现了导数的不连续性，因此上两种情况都可归为具有不连续点的映射(例如 0.5 就是帐篷映射 T 导数的不连续点).

首先考虑只有一个不连续点且在每一部分上都单调增加的映射，就像一维洛伦兹映射那样. 7.3.2 节讨论了这类映射产生于洛伦兹系统的方式，之后又讨论了只有一个不连续点的其他映射.

如果混沌吸引子是由几个不交的闭区间构成的，则可以作类似讨论，因此对具有有限个不连续点的分段扩张映射通过几个评注来结束本节.

一维洛伦兹映射

在 7.3 节，我们讨论了如何从洛伦兹微分方程组的几何模型的流导出一类一维映射，相似的映射也可以通过计算机模拟得到，R. Williams 证明了此类映射是拓扑传递的且具有对初始值的敏感依赖性，这与 10.3 节和 10.4 节(以及第一部分的 7.3 节)得到的有关双倍映射的结论相似，这些映射的吸引子都是一个区间，因此它们都有混沌吸引子，本节后面将看到扩张映射的例子，它们的吸引子是由有限个区间构成的，而并非一个区间.

在叙述 R. Williams 的定理之前，先看一个简单的例子.

例 11.2.14　考虑映射

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3}x + 1 & x < 0 \\ \sqrt{3}x - 1 & x > 0. \end{cases}$$

参见图 11.2.2，由于f把$[-1.1, 1.1]$映满到$[-1, 1]$上，以及$[-1, 1]$是不变的，所以f有吸引集$[-1, 1]$，且$[-1.1, 1.1]$是$[-1, 1]$的收缩域；又因为$f(0^+)$和$f(0^-)$的前行轨道都不是最终周期的且都包含无穷多个点，所以此映射没有马尔可夫分割. 虽然如435此，我们仍可以证明此映射有混沌吸引子.

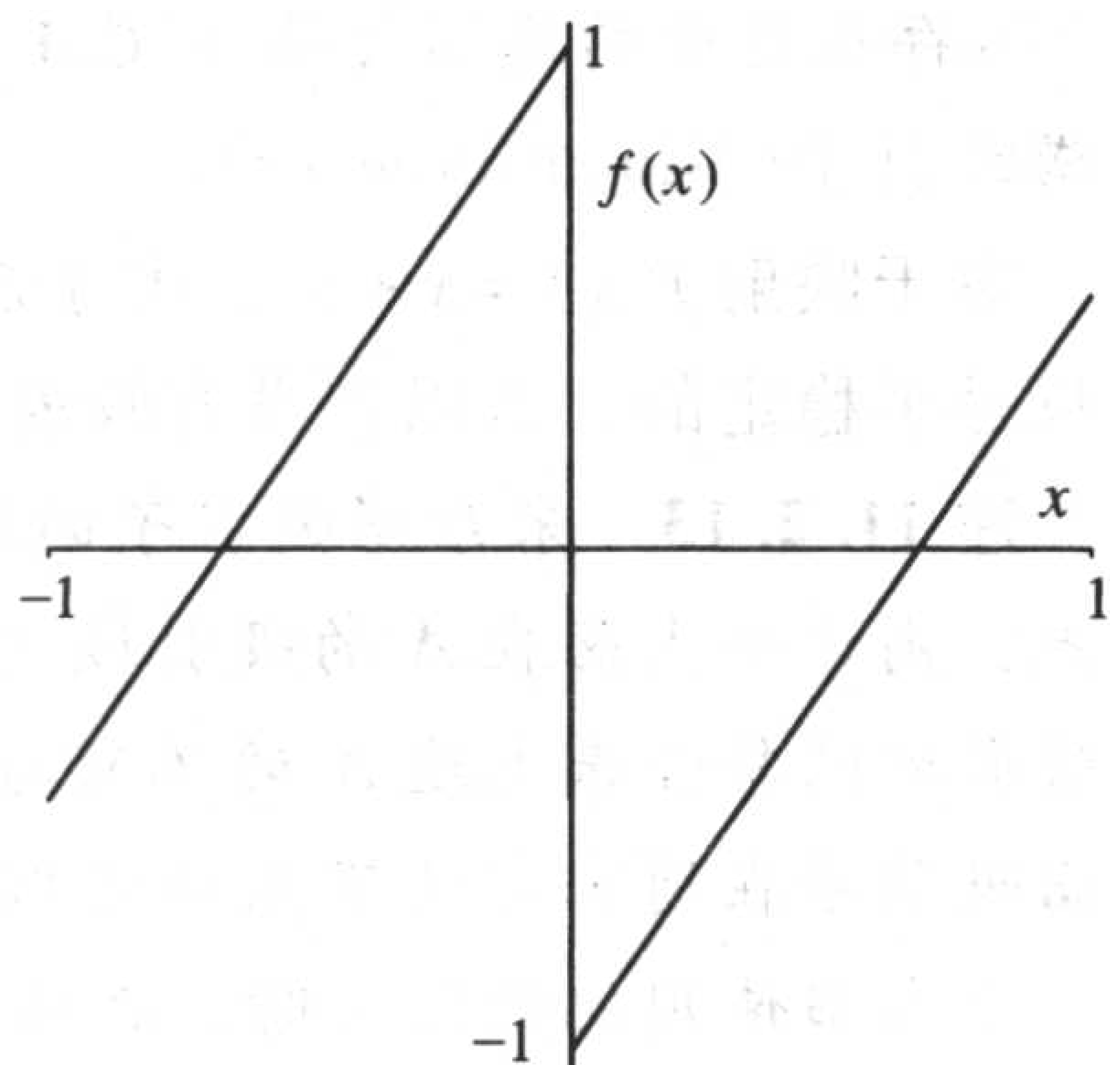


图 11.2.2　例 11.2.14 中一维线性洛伦兹映射的图像

因为f的导数处处大于 1，所以它是扩张的，由于$f(0^+)=-1$，$f(-1)=-\sqrt{3}+1<0$，$f^2(-1)=f(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-2<0$，$f(0^-)=1$，$f(1)=\sqrt{3}-1>0$，$f^2(1)=f(\sqrt{3}-1)=2-\sqrt{3}>0$，由下面定理知$f$有对初始值的敏感依赖性，且它在$[-1, 1]$上是拓扑传递的，因此$[-1, 1]$是混沌吸引子，参见图 11.2.3 和图 11.2.4.

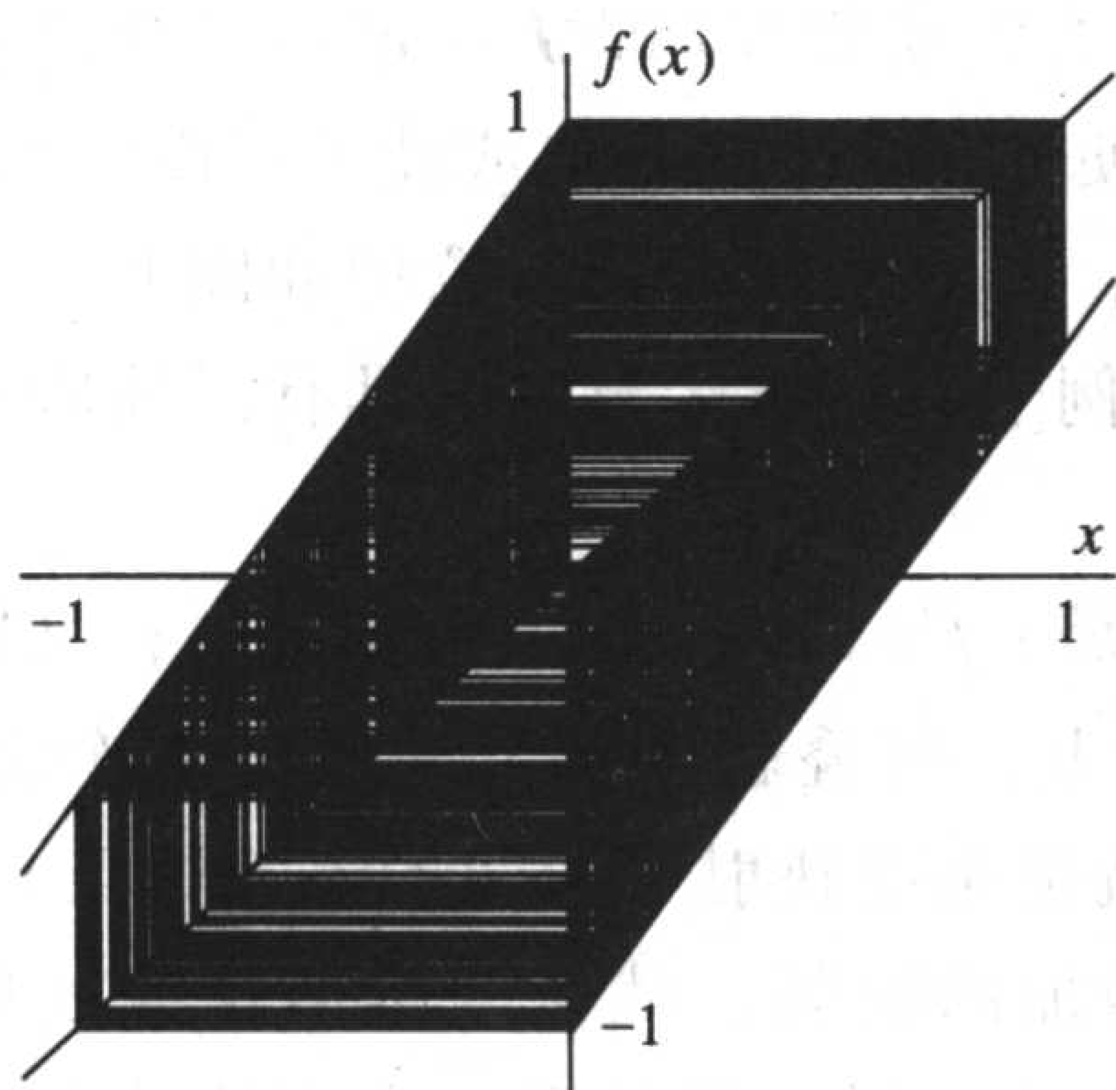


图 11.2.3　例 11.2.14 中一条稠密轨道的阶梯图

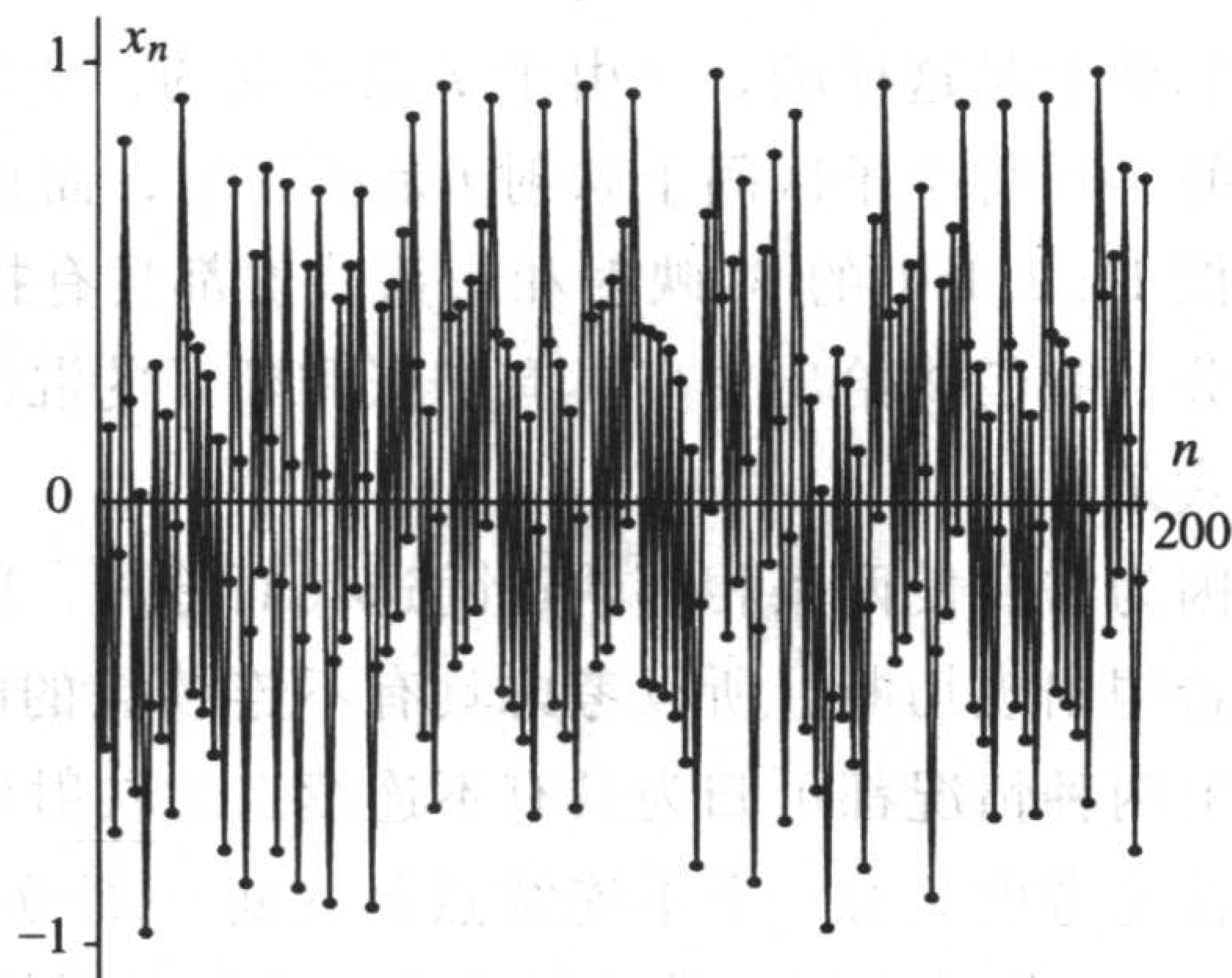


图 11.2.4　例 11.2.14 中某初始点x_0的迭代图像 ■

接下来的讨论经常要利用不连续点的左极限和右极限，为此，定义

$$f(c^-) = \lim_{x<c, x\to c} f(x) \quad 且$$

436

$$f(c^+) = \lim_{x>c, x\to c} f(x).$$

定理 11.2.15(Williams)　设$a<c<b$且f在区间$[a, c)$和$(c, b]$上有定义，在$[a, b]$上取值，f还满足：

(i)f在$[a, c)\cup(c, b]$上处处可微，且处处满足$f'(x)\geqslant L>\sqrt{2}$，特别地，$f$在不连续点两侧都是单增的.

(ii)点c是唯一的不连续点，且$f(c^-)=b$，$f(c^+)=a$.

(iii)端点a与b的两次迭代后仍呆在原侧，即

$$b > f(b) > f^2(b) > c \quad 且$$

$$a < f(a) < f^2(a) < c.$$

则下面的结论成立：

(a)若f满足(i)和(ii)，则它在区间$[a, b]$上有对初始值的敏感依赖性.

(b)若f满足(i)、(ii)和(iii)，则对有正长度的任一子区间$J\subset[a, b]$，都存在n使得$f^n(J)=(a, b)$.

(c)若f满足(i)、(ii)和(iii)，则f在$[a, b]$上是拓扑传递的.

该定理的证明在本章最后一节给出.

注 11.2.16　若$f(x)$在不连续点两侧是单减的，可得类似结论，相应条件改为：(i)在$[a, c)\cup(c, b]$上处处满足$f'(x)\leqslant -L< -\sqrt{2}$；(ii)$c$是唯一不连续点，且$f(c^-)=a$，$f(c^+)=b$；(iii)区间端点处的前两次迭代满足

$$c<f(a)<b,\quad b<f^2(a)<c,$$
$$a<f(b)<c,\quad c<f^2(a)<b.$$

若在不连续点两侧映射$f(x)$的单调性不同，则在不附加其他条件的前提下上述结论不成立，见例 11.2.20.

具有单个不连续点的扩张映射

T. Y. Li 和 J. York 在文献[**67**]中证明了有单个不连续点的扩张映射有唯一米尔诺吸引子(他们并未使用此术语)，其证明用到了测度，有关测度的讨论出现在本章后面 11.4 节. 后来，Morales 和 Pujals 在文献[**77**]中用拓扑方法证明一些相同结论. 之后，Y. Choi 在[**25**]中给出了收缩域存在的必要条件. 下面的结论由 Y. Choi 给出.

定理 11.2.17　设定义在$\mathbb{R}$上的函数f有(至多)一个不连续点c，(i)假设当$x\neq c$时，f可微且$|f'(x)|\geqslant L>1$，(ii)$f(x)$在c处的单侧极限记作$f(c^-)=r^-$，$f(c^+)=r^+$，令

$$a=\min\{r^+,r^-,f(r^+),f(r^-)\}\quad 和$$
$$b=\max\{r^+,r^-,f(r^+),f(r^-)\}.$$

再设$a\leqslant f(a)\leqslant b$，$a\leqslant f(b)\leqslant b$.

则存在$[a, b]$的子集A满足以下性质：

(a)集合A是有限个闭区间的并(可能仅有一个闭区间).

(b)不连续点属于A中某区间的内部.

(c)f在A上是拓扑传递的.

437

(d)当限制到A上时，f有对初始值的敏感依赖性.

(e)A的吸引域$\mathcal{B}(A; f)$是$[a, b]$中稠密的开集.

(f)A是米尔诺吸引子.

(g)集合A中区间的端点属于r^-和r^+的前行迭代轨道(通常把它们看作不连续点c的前行迭代).

(h)若A的端点中不包含一条完整的周期轨，则A有收缩域，从而A是一个混沌吸引子(这里允许周期轨道通过c和$r^\pm$).

注 11.2.18　正如在前面所述，T. Y. Li 和 J. York 在文献[**67**]中证明了(a)、(b)、(c)和

(e)，这些结论可推出性质(f)；Morales 和 Pujals 也在文献[77]中证明了相同结论；Y. Choi 证明了(g)和(h).

下面两个例子中映射的吸引子包含不止一个区间，其中第一个例子像洛伦兹映射一样在不连续点两侧斜率皆为正；第二个例子既有正的又有负的斜率.

例 11.2.19 考虑映射

$$f(x) = \begin{cases} 1.25x + 1 & x < 0 \\ 1.25x - 1.05 & x > 0. \end{cases}$$

注意到 $|f'(x)| = 1.25 < \sqrt{2}$，所以不能应用 Williams 定理，由于不变集的端点分别是 $a = f(0^+) = r^+ = -1.05$ 和 $b = f(0^-) = r^- = 1$ 且 $f([-1.05, 1]) = [-1.05, 1]$，可知 $[-1.05, 1]$ 是吸引集. 为确定吸引子 $\boldsymbol{A}$ 的大小，进一步计算：$f(r^-) = 0.2$，$f^2(r^-) = f(0.2) = -0.8$，$f^3(r^-) = f(-0.8) = 0$，$f(r^+) = -0.312\,5$，$f^2(r^+) = f(-0.312\,5) = 0.609\,375$，$f^3(r^+) = f(0.609\,375) = -0.288\,281\,25$，从而

$$\begin{aligned}
&f([-1.05, -0.8]) = [-0.312\,5, 0],\\
&f([-0.312\,5, 0)) = [0.609\,375, 1),\\
&f((0, 0.2]) = (-1.05, -0.8],\\
&f([0.609\,375, 1]) = [-0.288\,281\,25, 0.2] \subset [-0.312\,5, 0.2].
\end{aligned}$$

因此，闭区间的并集

$$\boldsymbol{A} = [-1.05, -0.8] \cup [-0.312\,5, 0.2] \cup ([0.609\,375, 1]$$

是不变的.

区间 $[-0.312\,5, 0)$ 的迭代满足

$$\begin{aligned}
&f([-0.312\,5, 0)) = [0.609\,375, 1),\\
&f^2([-0.312\,5, 0)) = [-0.288\,281\,25, 0.2] \supset (0, 0.2),\\
&f^3([-0.312\,5, 0)) \supset f((0, 0.2)) = (-1.05, -0.8),\\
&f^4([-0.312\,5, 0)) \supset f((-1.05, -0.8)) = (-0.312\,5, 0).
\end{aligned}$$

由于 $f^2((-0.312\,5, 0.0)) \supset [0, 0.2)$，$f^2((0, 0.2)) = (-0.312\,5, 0.0)$，故存在 $[-0.312\,5, 0)$ 的子区间 $(x_1, 0)$ 使得 $f^4(x_1, 0) = (-0.312\,5, 0.0)$，从而 f^4 是从 $(x_1, 0)$ 到 $[-0.312\,5, 0)$ 的扩张映射. 因为 f^4 是一个扩张，所以对任意更小的区间 $(x_2, 0) \subset (x_1, 0)$，存在 j 使得 $f^{4j}(x_2, 0) \supset (x_1, 0)$，$f^{4j+4}(x_2, 0) \supset [-0.312\,5, 0)$，因此吸引子 $\boldsymbol{A}$ 必包含整个区间 $[-0.312\,5, 0)$，由于 $f^2([-0.312\,5, 0)) \supset (0, 0.2]$，所以 $\boldsymbol{A}$ 必包含整个区间 $(0, 0.2]$，继续迭代下去，可得

438

$$\boldsymbol{A} = [-1.05, -0.8] \cup [-0.312\,5, 0.2] \cup ([0.609\,375, 1]).$$

可直接验证 $f([-1.1, 1.1]) = [-1.05, 1]$，从而区间 $\boldsymbol{U} = [-1.1, 1.1]$ 是 $[-1.05, 1]$ 的收缩域.

由于 $f^3(r^-)=0$ 和 $f^3(r^+)=-0.288\,281\,25$ 都在 $\boldsymbol{A}$ 的内部，所以端点不包含完整的周期轨，因此 $\boldsymbol{A}$ 是由三个区间构成的混沌吸引子，参见图 11.2.5.

在吸引子的空隙中，存在一条排斥的 2-周期轨道：对于 $x<0$，则有

$$\begin{aligned}0&=f^2(x)-x\\&=\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}x+1\right)-1.05-x\\&=\frac{9}{16}x+1.25-1.05\\&=\frac{9}{16}x-\frac{1}{5},\end{aligned}$$

$$x=-\frac{16}{45}\approx-0.355\,5,$$

且 $f(-16/45)=5/9\approx0.555\,5$. 除 $-16/45$，$5/9$ 之外区间

$$(-0.8,-0.312\,5)\cup(0.2,0.609\,375)$$

中点的 ω 极限集都包含于 $\boldsymbol{A}$，因此

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{A};f)\supset[-1.1,1.1]\setminus\{-16/45,5/9\}.$$ ■

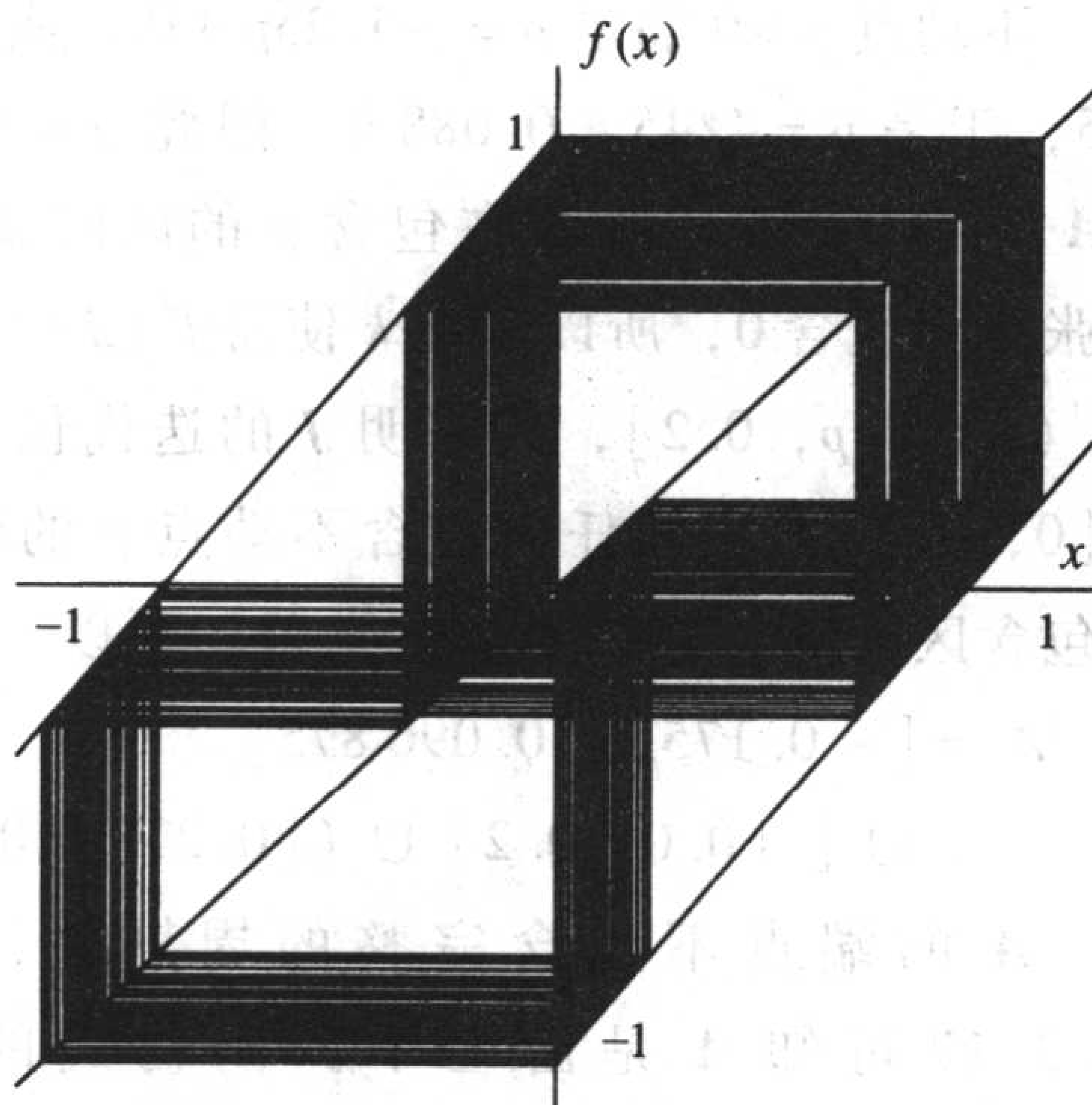


图 11.2.5 例 11.2.19 的吸引子中一条稠密轨道的阶梯图

上面例子中映射在不连续点两侧的斜率皆为正，这一特点与洛伦兹映射和 Williams 定理中的条件很相似，下面例子中映射在不连续点两侧的斜率一正一负，此类例子适合于定理 11.2.17 的条件，但要使映射在整个区间上是拓扑传递的，则还要比定理 11.2.15 更多的条件. [439]

例 11.2.20 考虑映射

$$f(x)=\begin{cases}1.25x+0.3 & x<0\\-1.25x+0.2 & x>0.\end{cases}$$

则有 $f(0^+)=r^+=0.2$，$f(0^-)=r^-=0.3$，$r_1^-=f(r^-)=f(0.3)=-0.175$ 以及 $r_1^+=f(r^+)=f(0.2)=-0.05$，因此 $a=f(r^-)=-0.175$，$b=r^-=0.3$. 为确定吸引子 $\boldsymbol{A}$ 的大小，进一步计算：

$$r_2^-=f^2(r^-)=f(-0.175)=0.081\,25,\quad r_3^-=f^3(r^-)=f(0.081\,25)=0.098\,437\,5,$$
$$r_2^+=f^2(r^+)=f(-0.05)=0.237\,5,\quad r_3^+=f^3(r^+)=f(0.237\,5)=-0.096\,875,$$
$$r_4^+=f^4(r^+)=f(-0.096\,875)=0.178\,906\,25,$$

从而

$$\begin{aligned}f([-0.175,-0.096\,875])&=[0.081\,25,0.178\,906\,25]\subset[0,0.2],\\f([-0.05,0))&=[0.237\,5,0.3],\\f((0,0.2])&=[-0.05,0.2),\\f([0.237\,5,0.3])&=[-0.175,-0.096\,875].\end{aligned}$$

因此，闭区间的并集

$$A = [-0.175, -0.096\,875] \cup [-0.05, 0.2] \cup ([0.237\,5, 0.3]$$

是不变的，参见图 11.2.6.

不动点 $p>0$ 满足 $p=-1.25p+0.2$ 或 $(9p)/4=1/5$，于是 $p=4/45\approx 0.088\,9$，因此 $p\in(0, 0.2]\subset A$，且 $(0, 0.2]$ 中存在包含 p 的区间 J，J 不断扩张直到包含 0，所以存在 k 使得 $f^k(J)\supset[0, p]$，$f^{k+1}(J)\supset[p, 0.2]$，这表明 J 的迭代包含整个区间 $[0, 0.2]$，从而任何包含不动点 p 的吸引集都必包含区间 $[0, 0.2]$ 和它的迭代，所以

$$A = [-0.175, -0.096\,875] \cup [-0.05, 0.2] \cup ([0.237\,5, 0.3].$$

A 的端点不包含完整的周期轨，由定理 11.2.17 可知 A 是由三个区间构成的混沌吸引子.

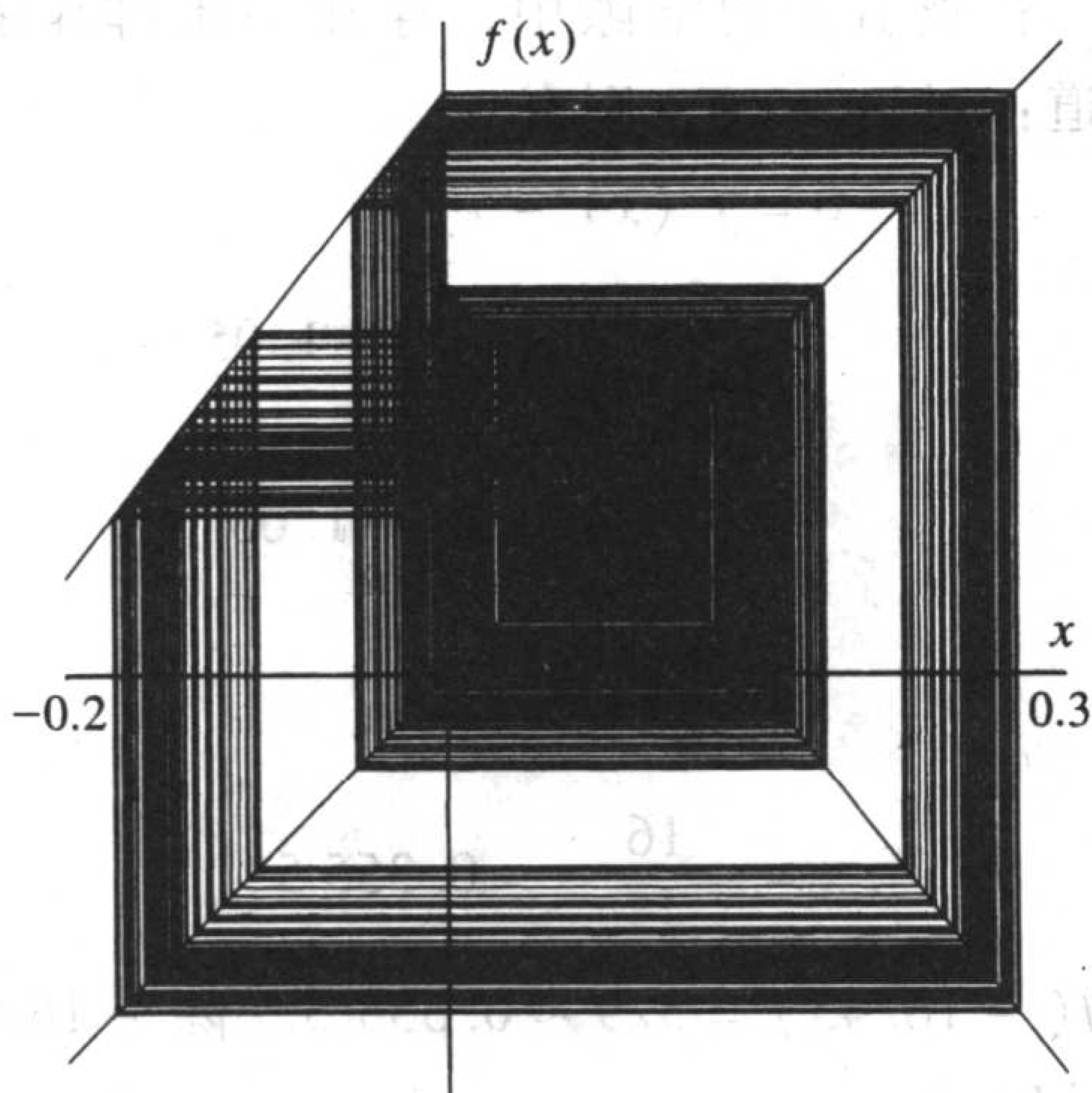


图 11.2.6　例 11.2.20 的吸引子中一条稠密轨道的阶梯图

440

同上，此例在吸引子的空隙中，存在一条排斥的 2-周期轨道. 假设 $x>0$，则有

$$0 = f^2(x) - x = \frac{5}{4}\left(-\frac{5}{4}x+\frac{1}{5}\right)+0.3-x$$

$$= -\frac{41}{16}x+0.25+0.3 = -\frac{41}{16}x+\frac{11}{20},$$

$$x = \frac{11\cdot 4}{5\cdot 41} = \frac{44}{205}\approx 0.214\,634\,1,\quad 且$$

$$f(x) = -\frac{14}{205}\approx -0.068\,292\,6.$$

区间

$$(-0.102\,4, -0.04)\cup(0.2, 0.252)$$

中其他点的 ω 极限集都包含于 A，因此

$$\mathcal{B}(A;f)\supset[-0.175, 0.3]\setminus\left\{-\frac{14}{205},\frac{44}{205}\right\}. \qquad \blacksquare$$

下面映射的不变集的一部分端点构成一条周期轨，因此，这个不变集不符合吸引子的定义.

例 11.2.21　考虑映射

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}x+1 & x<0 \\ \dfrac{1}{\mu}x+\left(1-\mu-\dfrac{1}{\mu}\right) & x\geqslant 0, \end{cases}$$

其中 $\mu>0$，不连续点的像是

$$r^- = f(0^-) = 1 \quad 和$$
$$r^+ = f(0^+) = 1 - \mu - \frac{1}{\mu},$$

这表明$[a, b] = [r^+, 1]$是不变区间. $r^- = 1$ 经迭代后回到0:

$$r_1^- = f(1) = 1 - \mu$$
$$r_2^- = f(1-\mu) = \frac{1-\mu}{\mu} + 1 - \mu - \frac{1}{\mu} = -\mu$$
$$r_3^- = f(-\mu) = -1 + 1 = 0.$$

441

$r^+ = 1 - \mu - 1/\mu$ 的迭代满足:

$$r_1^+ = f(r^+) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}$$
$$r_2^+ = f(r_1^+) = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^3} + 1 > 0$$
$$r_3^+ = f(r_2^+) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3} - \frac{1}{\mu^4}1 - \mu - \frac{1}{\mu}$$
$$= 1 - \mu + \frac{1}{\mu^3} - \frac{1}{\mu^4}.$$

考虑闭区间的并集

$$\boldsymbol{A} = [r^+, r_2^-] \cup [r_1^+, r_1^-] \cup [r_2^+, 1].$$

欲使它是不变的, 需要 $r_1^+ \leqslant r_3^+ = f(r_2^+)$:

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \leqslant 1 - \mu + \frac{1}{\mu^3} - \frac{1}{\mu^4}$$
$$\mu^3 - \mu^2 \leqslant \mu^4 - \mu^5 + \mu - 1$$
$$0 \leqslant -\mu^5 + \mu^4 - \mu^3 + \mu^2 + \mu - 1$$
$$\leqslant (1-\mu)(\mu^4 + \mu^2 - 1).$$

若 $\mu = \mu_0$ 满足

$$0 = \mu_0^4 + \mu_0^2 - 1$$
$$\mu_0^2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\mu_0 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \approx 0.786\,151\,3.$$

则右端等于零, 当 $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant 1$ 时, $(1-\mu)(\mu^4 + \mu^2 - 1) \geqslant 0$, 而且区间的并

$$\boldsymbol{A} = [r^+, r_2^-] \cup [r_1^+, r_1^-] \cup [r_2^+, 1]$$

是不变的. (对于 $\mu < \mu_0$, 整个区间$[r^+, 1]$是吸引子.)

要确定集合 $\boldsymbol{A}$ 是否是吸引子, 需要进一步验证在它的边界上是否存在周期轨. 设有 2-周期轨道$\{p, q: p < 0 < q\}$, 则

$$p = f(q) = \frac{q}{\mu} + 1 - \mu - \frac{1}{\mu}$$

$$q = f(p) = \frac{q}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} - 1 - \frac{1}{\mu^2} + 1$$

$$= \frac{q}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2},$$

$$(\mu^2 - 1)q = \mu - 1,$$

$$q = \frac{\mu - 1}{\mu^2 - 1} = \frac{1}{\mu + 1},$$

442

而且

$$p = f(q) = \frac{1}{\mu(\mu + 1)} + 1 - \mu - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1 + \mu + \mu^2 - \mu^2 - \mu^3 - \mu - 1}{\mu(\mu + 1)}$$

$$= \frac{-\mu^2}{\mu + 1}.$$

对给定的μ，若$p = r_1^+$，则上述2-周期轨道落在区间的端点上：

$$\frac{-\mu^2}{\mu + 1} = \frac{\mu - 1}{\mu^2}$$

$$-\mu^4 = (\mu - 1)(\mu + 1) = \mu^2 - 1 \quad 且$$

$$0 = \mu^4 + \mu^2 - 1.$$

正如前面所证，当$\mu = \mu_0$时上面等式成立. 对此参数值μ_0，区间的并集

$$\boldsymbol{A} = [r^+, r_2^-] \cup [r_1^+, r_1^-] \cup [r_2^+, 1]$$

是不变的，且其边界包含轨道$\{p, q\}$，由于这条轨道是排斥的周期轨，所以$\boldsymbol{A}$不具有收缩域，从而按照我们的定义$\boldsymbol{A}$不是吸引子，但它却是米尔诺吸引子.

当$\mu < \mu_0$时，吸引子仅包含一个区间；当$\mu > \mu_0$时，吸引子由三个区间构成，且有收缩域. ■

具有多个不连续点的扩张映射

Li-Yorke 和 Choi 都讨论过有多个不连续点的扩张映射，这类映射有一个或多个吸引子，但吸引子个数不会超过不连续点的个数.

定理 11.2.22　*设f在$\mathbb{R}$的闭子集$[a, b]$上有定义，它有k个不连续点：$c_1 < c_2 < \cdots < c_k$且$a < c_1$，$c_k < b$，再假设$f([a, b]) \subset [a, b]$，(i)除不连续点$\{c_i\}$之外f处处可微且$|f'(x)| \geq L > 1$，(ii)$f(x)$在c_i处的单侧极限记作*

$$r_i^- = f(c_i^-) = \lim_{x < c_i, x \to c_i} f(x) \quad 和$$

$$r_i^+ = f(c_i^+) = \lim_{x > c_i, x \to c_i} f(x).$$

则存在$[a, b]$的有限个子集$A_1, \cdots, A_n$，满足以下性质：

(a)每个A_i都是有限个闭区间的并(可能仅有一个闭区间).

(b)每个A_i的内部都至少包含一个不连续点，因此，$1 \leqslant n \leqslant k$.

(c)A_i是两两不交的，即当$i \neq j$时$\mathrm{int}(A_i) \cap \mathrm{int}(A_j) = \varnothing$.

(d)f在每个A_i上是拓扑传递的.

(e)在每个A_i上f有对初始值的敏感依赖性.

(f)其极限集属于诸A_i之并的所有点的集合是$[a, b]$中的稠密开集，即

$$\bigcup_i W^S(A_i; f) = \{x : \omega(x; f) \subset \bigcup_i A_i\}$$

在$[a, b]$中既稠密又是开集.

443

(g)每个A_i都是米尔诺吸引子.

(h)集合A_j中区间的端点都属于r^-和r^+的前行迭代轨道.

(i)若集合A_j的区间的端点不包含一条完整的周期轨，则A_j有收缩域从而是一个混沌吸引子(这里允许周期点通过c_j).

11.3　李雅普诺夫指数

对初始值的敏感依赖性是个很精辟的数学概念，它能清楚而直接地表达我们想要描述的动力学性质，虽然可以验证一些映射具有这一性质，但它并不能通过计算机计算或分析实验数据得到. 本节将引入轨道的李雅普诺夫指数的定义，它不仅可以通过计算机计算得到，而且能从实验数据获得. 当李雅普诺夫指数为正时，表明系统有敏感依赖性；当李雅普诺夫指数为负时，表明轨道趋向于吸引的周期轨(至少在一维空间中是这样的).

我们要量化不稳定性，对于n-周期点p，若$|(f^n)'(p)| > 1$，则此轨道是排斥的；我们希望随迭代的增加这个量是收敛的，所以需要讨论$|(f^n)'(p)|^{\frac{1}{n}}$是大于1还是小于1，而不去考虑$|(f^n)'(p)|$.

先看一下非周期点，对于x_0和$x_0+\delta$，分别迭代n步，由泰勒展开可知

$$|f^n(x_0+\delta) - f^n(x_0)| \approx |(f^n)'(x_0)| \cdot |\delta| \quad \text{或}$$

$$\frac{|f^n(x_0+\delta) - f^n(x_0)|}{|\delta|} \approx |(f^n)'(x_0)|.$$

因此，$|(f^n)'(x_0)|$是表示n次迭代后长度拉伸程度的近似值，如果对于每一次迭代，量$|f'(f^j(x_0))|$都近似为L，则$|(f^n)'(x_0)| \approx L^n$，或

$$L \approx |(f^n)'(x_0)|^{1/n},$$

即为每一次迭代中距离扩张的平均值，取极限就给出沿整条前行轨道所有迭代的平均扩张，由于加法和除法分别比乘法和求n次方根要简单，所以在实际应用中常取对数，或

$$\ell = \ln(L) \approx \frac{\ln(|(f^n)'(x_0)|)}{n},$$

然后再令n趋向于无穷.

受此启发，我们给出下面定义.

定义 11.3.1 令f是把$\mathbb{R}$映射到自身的可微映射，若极限

$$L(x_0;f) = \lim_{n\to\infty} |(f^n)'(x_0)|^{1/n}$$

存在，则称此极限为f在初始点x_0的李雅普诺夫乘数(Lyapunov multiplier)；若极限

$$\ell(x_0;f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(|(f^n)'(x_0)|)}{n}$$

存在，则称之为f在初始点x_0的李雅普诺夫指数(Lyapunov exponent). 在计算李雅普诺夫乘数和指数时，我们不希望计算复合函数，为此，利用链式法则

$$|(f^n)'(x_0)| = |f'(x_{n-1})|\cdot|f'(x_{n-2})|\cdots|f'(x_1)|\cdot|f'(x_0)| \quad 和$$

444

$$\ln(|(f^n)'(x_0)|) = \ln(|f'(x_{n-1})|) + \cdots + \ln(|f'(x_1)|) + \ln(|f'(x_0)|),$$

其中$x_j = f^j(x_0)$，于是这些量变为

$$L(x_0;f) = \lim_{n\to\infty}\left[\prod_{j=0}^{n-1}|f'(x_j)|\right]^{1/n} \quad 和$$

$$\ell(x_0;f) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n-1}\ln(|f'(x_j)|)}{n}.$$

注 11.3.2 注意到$\ell(x_0;f) = \ln(L(x_0;f))$，因此当$\ell(x_0;f)$大于零时，$L(x_0;f)$大于1.

注 11.3.3 令$L = L(x_0;f)$表示李雅普诺夫乘数，$\ell = \ell(x_0;f)$表示李雅普诺夫指数，则对充分大的n和充分小的δ，由定义 11.3.1 前的分析可知

$$|f^n(x_0+\delta) - f^n(x_0)| \approx L^n|\delta| = e^{n\ell}|\delta|.$$

因此，李雅普诺夫乘数和李雅普诺夫指数的确测算了相邻点经迭代后的分离情况.

注 11.3.4 注意，$(1/n)\sum_{j=0}^{n-1}\ln(|f'(x_j)|)$是$f$沿前$n$步迭代的导数的绝对值取对数后的代数平均数；令$n$趋向于无穷，则得到对$f$沿整条轨道的导数的绝对值取对数后的平均数.

李雅普诺夫乘数$|(f^n)'(x_0)|^{1/n} = \left[\prod_{j=0}^{n-1}|f'(x_j)|\right]^{1/n}$是沿前$n$步迭代的扩张量的几何平均数,取极限后则得到扩张量沿整条轨道的几何平均.

注 11.3.5 若沿整条轨道有$f'(x_j) = 0$，则李雅普诺夫乘数$L(x_0;f) = 0$，李雅普诺夫指数$\ell(x_0;f) = -\infty$.

我们可以先确定出周期轨上一点的李雅普诺夫指数，而此周期轨的吸引域中任意一点的李雅普诺夫指数都等于这个值.

命题 11.3.6 令$x_j = f^j(x_0)$表示x_0的轨道上的点，(a)若沿着x_0的轨道$f'(x_j) \neq 0$，则对轨道上任一点x_k有$\ell(x_k;f) = \ell(x_0;f)$；(b)若$x_0$是$n$-周期点，则

$$\ell(x_0;f) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\ln(|f'(x_j)|)}{n}.$$

结论(a)是显然的；在(b)部分，由于相同的项一次次重复出现，所以极限就是前n次迭代的平均值.

定理 11.3.7 设$\ell(p_0;f)$存在，x_0的轨道上的点$x_j = f^j(x_0)$满足$f'(x_j) \neq 0$且

$$\lim_{j\to\infty} | x_j - p_j | = 0,$$

其中 $p_j = f^j(p_0)$，则 $\ell(x_0; f)$ 存在且 $\ell(x_0; f) = \ell(p_0; f)$，特别地，若 p_0 是 n-周期点，x_0 属于 p_0 的轨道的吸引域，且对点 $x_j = f^j(x_0)$ 满足 $f'(x_j) \neq 0$，则 $\ell(x_0; f) = \ell(p_0; f)$.

证明　令 $\varepsilon > 0$，则存在 $N > 0$ 使得当 $j \geqslant N$ 时

$$| \ln(| f'(x_j) |) - \ln(| f'(p_j) |) | < \varepsilon.$$

445

第 N 项以后的平均等于所有项的平均，所以

$$\begin{aligned} | \ell(x_0;f) - \ell(p_0;f) | &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left| \sum_{j=0}^{n-1} [\ln(| f'(x_j) |) - \ell(p_0;f)] \right|}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left| \sum_{j=N}^{n-1} [\ln(| f'(x_j) |) - \ell(p_0;f)] \right|}{n} \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=N}^{n-1} \varepsilon}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{(n-N)\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由于上式对任意小的 ε 都成立，所以 $\ell(x_0; f) = \ell(p_0; f)$.

周期轨的情形从一般情形推出. ■

例 11.3.8　考虑逻辑斯谛映射 $g_a(x) = ax(1-x)$，显然 $g_a'(x) = a - 2ax$.

（Ⅰ）首先，假设 $1 < a < 3$，则区间$(0, 1)$中所有点都属于不动点 $p_a = (a-1)/a$ 的吸引域，由于 p_a 的李雅普诺夫指数 $\ell(p_a; g_a) = \ln|2-a| < 0$，根据上面的定理对任意 $0 < x_0 < 1$，若 $f^j(x_0) \neq 0.5$，$j \geqslant 0$，则有 $\ell(x_0; g_a) = \ell(p_a; g_a) = \ln|2-a| < 0$；特别地，当 $a = 2$ 时，$p_2 = 0.5$，$\ell(0.5; g_2) = -\infty$.

（Ⅱ）其次，假设 $3 < a < 1 + \sqrt{6}$，则 2-周期轨道是吸引的，其点是

$$q_\pm = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(a-3)(a+1)}.$$

且有导数

$$g'_a(q_\pm) = -1 \mp \sqrt{(a-3)(a+1)},$$

因此

$$\begin{aligned} \ell(q_\pm;g_a) &= \frac{1}{2}[\ln(|-1+\sqrt{(a-3)(a+1)}|) + \ln(|-1-\sqrt{(a-3)(a+1)}|)] \\ &= \frac{1}{2}[\ln(|1-(a-3)(a+1)|)] \\ &= \frac{1}{2}[\ln(|-a^2+2a+4|)] < 0. \end{aligned}$$

p_a 仍是不动点，但此时

$$\ell(p_a;g_a) = \ln|2-a| > 0.$$

区间$(0, 1)$中其他点 x_0 或者(i)迭代若干步后等于 p_a，即 $f^n(x_0) = p_a$，而且 $\ell(x_0; g_a) =$

$\ln|2-a|>0$；或者(ii)属于这一2-周期轨道的吸引域，对后一情形有 $\ell(x_0;\ g_a)=\ell(q_+;\ g_a)$，除非 x_0 的轨道通过临界点0.5. ■

图11.3.1画出了用数值方法得到的 $x_0=g_a(0.5)$ 的李雅普诺夫指数 $\ell(g_a(0.5);\ g_a)$ 的取值情况，这里把 g_a 看成是参数 a 的函数，可以看出，如果参数 a 使得 g_a 有吸引的周期轨，则 $\ell(g_a(0.5);\ g_a)$ 为负；当 $a=3$ 时，不动点由吸引的变成排斥的，并出现一条吸引的周期轨，此时李雅普诺夫指数为零；从 $a=3.57$ 开始李雅普诺夫指数开始取正数，这一变化范围正好与图9.5.7中(Feigenbaum)分支图显示出的极限集中点所成的整个区间所需参数范围吻合；当参数 a 增大至3.83附近时会出现另一个小的参数区间，使得对其内的参数值 g_a 有吸引的3-周期轨道，此时李雅普诺夫指数为负.

446

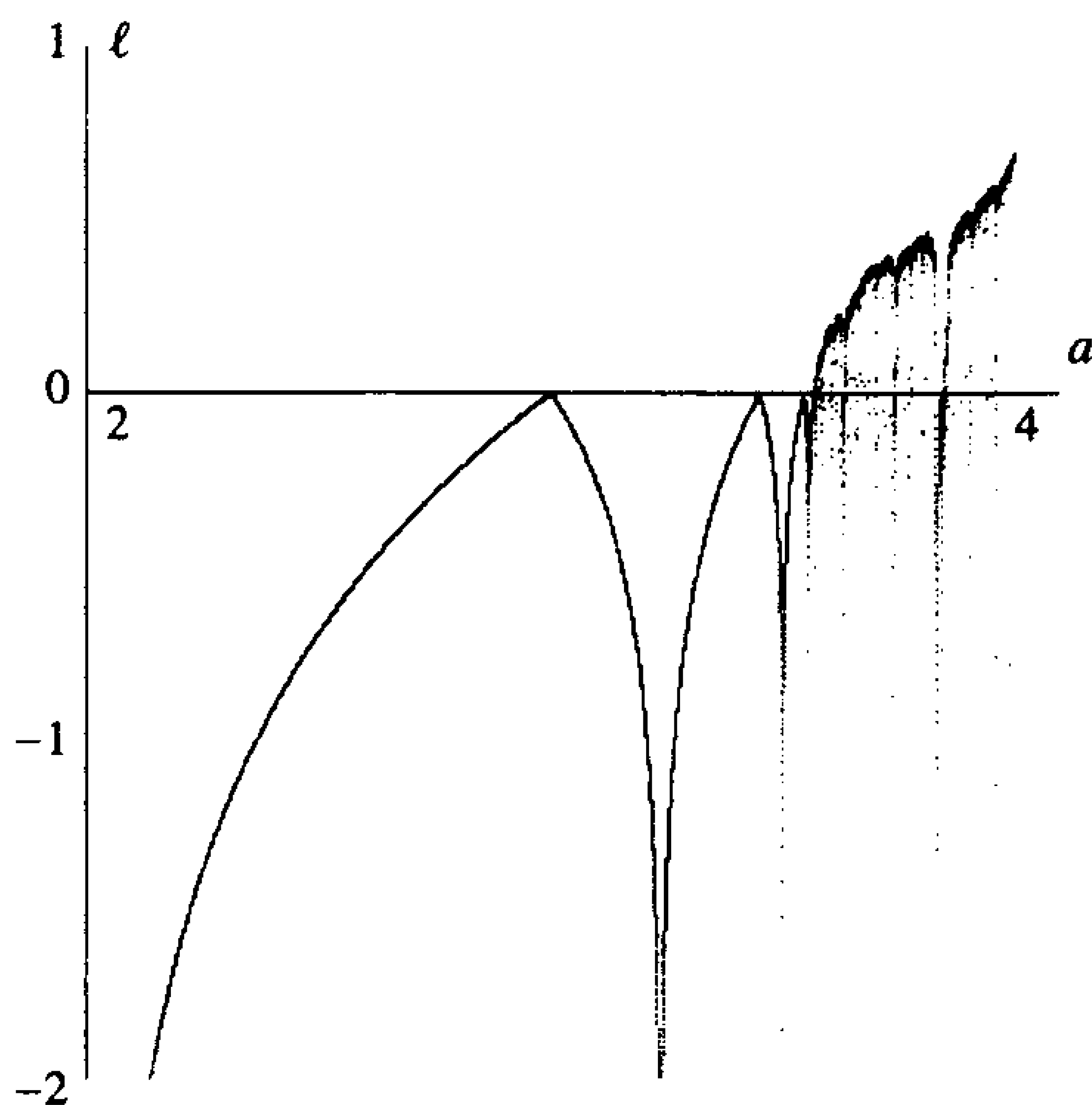


图11.3.1　把逻辑斯谛映射族看成是 a 的函数时，李雅普诺夫指数 $\ell(g_a(0.5);\ g_a)$ 的图像

下面讨论帐篷映射.

例11.3.9　令

$$T(x)=\begin{cases}2x & x\leqslant 0.5\\ 2(1-x) & x\geqslant 0.5\end{cases}$$

是斜率为 ±2 的帐篷映射，由于当 $x\neq0.5$ 时，$|T'(x)|=2$，所以只要 $x_j=f^j(x_0)\neq0.5$，$j\geqslant0$ 就有 $\ell(x_0;\ T)=\ln(2)>0$. ■

例11.3.10　令 $G(x)=4x(1-x)$ 表示 $a=4$ 的逻辑斯谛映射，由于0是不动点且 $G(1)=0$，则

$$\ell(0;G)=\ell(1;G)=\ln|G'(0)|=\ln(4).$$

点0.5的李雅普诺夫指数是负无穷，其轨道过0.5的任一点也如此.

先考虑点 $0<x_0<1$，使对 $j\geqslant0$ 有 $x_j=G^j(x_0)\neq0.5$(由于只有0.5的轨道趋向于1，所以 x_0 的轨道不会通过1或0)，由于通过映射 $x=C(y)=\sin^2(\ln\pi y2)=1/2-1/2\cos(\pi y)$，$G$ 与 T 共轭，所以 $G^n(x)=C\circ T^n\circ C^{-1}(x)$(这里分别用 x，y 表示 G，T 的自变量)，又有

447

$$0\leqslant C'(y)=\frac{\pi}{2}\sin(\pi y)\leqslant\frac{\pi}{2},$$

而且仅当 $y=0$ 或1时，$C'(y)=0$. 令 $x_j=G^j(x_0)$ 和 $y_j=C^{-1}(x_j)=T^j(y_0)$，则

$$\begin{aligned}\ell(x_0;G)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(|(G^n)'(x_0)|)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(|C'(y_n)|)+\ln(|(T^n)'(y_0)|)+\ln(|(C^{-1})'(x_0)|)]\\&=0+\ln(2)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(|C'(y_n)|)\leqslant\ln(2).\end{aligned}$$

在上式的推导中，因为 $\ln|(C^{-1})'(x_0)|\neq 0$ 是固定量，所以除以 n 并取极限即得 0，同理，由于

$$0<|C'(y_n)|<\frac{\pi}{2}\quad 和$$

$$-\infty<\frac{1}{n}\ln(|C'(y_n)|)<\frac{1}{n}\ln(\pi/2),$$

所以 n 趋向于无穷时的极限小于等于零，从而只要极限存在，则

$$\ell(x_0;G)\leqslant\ln(2).$$

事实上，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(|C'(y_n)|)=0,$$

则 $\ell(x_0;G)=\ln(2)$，特别地，任何周期轨都有 $\ell(x_0;G)=\ln(2)$，而且都是排斥的.

又对任意 $\delta>0$，若 T-轨道完全包含在$[\delta,1-\delta]$内，则

$$\ln(|C'(y_n)|)\geqslant\frac{\pi\sin(\pi\delta)}{2}>0,$$

从而它的李雅普诺夫指数等于 $\ln(2)$. 例如，若取 x_0 使得它的符号序列的一行中不出现 N 个 L（即 L^N 从不出现），则 T-轨道属于区间$[1/2^N,1-1/2^{N+1}]$，从而 $\ell(x_0;G)=\ln(2)$，这表明有很多条轨道的李雅普诺夫指数都等于 $\ln(2)$.

对于 x^*，已证明它有一条稠密的轨道，其符号序列都包含 L^N，无论 N 多大，因此它不属于上述最后一种情况.（由于 x^* 有一条稠密的轨道，所以它的轨道可以充分靠近 0 和 1.）然而，在其符号序列 s^* 中，必须在

$$s_n\cdots s_{k+N-1}=L^N$$

之前列出长度分别为 1，2，…，$N-1$ 的各符号串，因此

$$\begin{aligned}n&>\sum_{j=1}^{N-1}2^j=2\left(\sum_{j=1}^{N-2}2^j\right)\\&=2\left(\frac{2^{N-1}-1}{2-1}\right)\\&=2^N-2>2^{N-1}.\end{aligned}$$

448

故有$(\pi/2)\sin(\pi y_n)\geqslant(\pi/2)\pi 2^{N-1}/2=\pi^2 2^{N-3}$（其中除以 2 是为了估计正弦函数的下界），从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(|C'(y_n)|)\geqslant\lim_{N\to\infty}\frac{\ln(\pi^2 2^{-N-3})}{2^N}=0.$$

所以，尽管点 x^* 有稠密轨道，对其也有 $\ell(x_0;G)=\ln(2)$.

注意，图 11.3.1 中所算的 g_4 的李雅普诺夫指数数值近似为 $\ln(2)\approx 0.693$. ■

混沌吸引子的检验

李雅普诺夫指数可用来检验是否具有对初始值的敏感依赖性，且它易于计算. 本节将结合李雅普诺夫指数与极限集思想建立检验混沌吸引子存在性的准则，而且这些准则很容易通过试

验和数值计算加以证实. 我们不用这些准则作为混沌吸引子的定义，是因为还有很多难于用此准则去验证的病态情况，特别是在高维空间中. 但是，对于"大多数系统"来说，病态情况不会出现，从而这些准则为检验系统是否具有混沌吸引子提供了很好的工具.

混沌吸引子的检验 判断集合 A 是映射 f 的混沌吸引子的检验准则可表述为：

1. 存在很多点 x_0^1，…，x_0^k，它们的轨道两两不交且它们的 ω 极限集都等于 A，即

$$\omega(x_0^i;f) = A, \quad 0 \leqslant i \leqslant k.$$

2. x_0^i 的李雅普诺夫指数都大于零：$\ell(x_0^i;\ f) > 0$.

注 11.3.11 很多不同的点有相同的 ω 极限集这一事实表明 A 的吸引域的测度为正，而且 A 是一个米尔诺吸引子；在很多情况下这类吸引子都有收缩域，但是大多数情况并不能用实验加以证实. 我们不要求 x_0^i 属于 A，因此不需要知道 f 在 A 上是拓扑传递的；然而，确有 $\omega(x_0^i;\ f) = A$，可知不存在吸引的真子集，即 A 应该是一个吸引子.

在此检验准则中，用正李雅普诺夫指数代替了对初始值的敏感依赖性假设，后者曾出现在 11.2 节数学味更浓的混沌吸引子的定义中.

满足上面检验准则的大多数系统也适合更早的定义，因此默认这类系统是"通有的".

有关通有性质与混沌吸引子的关系的更多讨论，详见附录 D.

注 11.3.12 这里所说的混沌吸引子的检验准则或判断准则本质上是 Alligood、Sauer 和 Yorke 在书[7]中作为混沌吸引子的定义而出现的，文中用相当大的篇幅定义混沌吸引子，且只限于单变量映射 f. 他们称集合 A 是 f 的混沌吸引子，如果(i)A 是米尔诺吸引子，且(ii)存在 x_0 属于 A 使得 $\omega(x_0;\ f) = A$.

11.4 测度

此前已经多次使用"测度"作为区间长度概念的推广，当讨论混沌动力学时，我们有时要求或者需要知道不止是一条轨道在某集合中是稠密的，而且还要知道这条轨道回到此集合的不同部分的频率，我们将使用柱状图来描述轨道回到不同部分的相对频率，很多点的返回频率都与它们的自然测度一致.

449

建立于整个区间上的自然测度可以演示强意义下的传递性，不仅轨道的极限集等于这个区间，而且轨道还以正的频率返回该区间中的所有点，因此，这可以用来测量不变集上传递性程度.

11.4.1 测度的一般性质

在定义由函数的动力学性质确定的特殊测度之前，先介绍任何测度都满足的一般性质，测度的概念是在建立积分理论时引入的，虽然本书仅涉及直线上的测度，即它是长度的推广；但这里给出的测度定义适用于任何维数的空间，在二维空间中，测度就是广义面积；在三维空间中，测度就是广义体积等.

在全空间 X 的某个子集 S 上定义的测度 μ 表示一个非负数，记作 $\mu(S)$，此处所讨论的测度都是定义在博雷尔集上的，它是由所有开集和闭集所生成的. 下面就是测度的精确定义.

定义 11.4.1　考虑欧式空间$\mathbb{R}^m$或更一般的度量空间 X，X 中子集的集合，记作$\mathcal{B}$，称为是博雷尔集族，如果它是满足下面性质的最小集族：

1. 集族$\mathcal{B}$包含 X 的所有开集和闭集.
2. 若 S 属于$\mathcal{B}$，则 $X \setminus S$ 也属于$\mathcal{B}$.
3. $\mathcal{B}$中有限个或可数个集合的并集为$\mathcal{B}$中的集合.
4. $\mathcal{B}$中有限个或可数个集合的交集为$\mathcal{B}$中的集合.

性质 4 可以由性质 2 和性质 3 推出，$\mathcal{B}$中的集合称为博雷尔集或博雷尔可测集.

定义在$\mathcal{B}$上的测度 μ 满足以下性质：

1. $\mathcal{B}$中任何博雷尔集 S 的测度是一个非负数，即 $\mu(S) \geqslant 0$.
2. 有限个或可数个两两不交的集合的并的测度等于各集合测度的和，即若 $S_i \cap S_j = \varnothing$，$i \neq j$，则

$$\mu(S_1 \cup \cdots \cup S_k) = \mu(S_1) + \cdots + \mu(S_k) \quad 且$$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j).$$

这一性质称为是可数可加性.

定义在博雷尔集上的测度称为是博雷尔测度(Borel measure).

若直线上给定区间$[a, b]$的任何子区间的测度定义为通常的区间长度，则此测度称为勒贝格测度(Lebesgue measure)，记作 λ；若平面$\mathbb{R}$上任何矩形的测度表示其面积，则此测度称为是平面$\mathbb{R}$上的勒贝格测度，仍记作 λ；同理，$\mathbb{R}^n$ 上的通常体积都称为勒贝格测度.

若全空间的总测度等于 1，则称此测度为概率测度(probability measure).

450

概率测度 μ 的支集，记作 $\mathrm{supp}(\mu)$，是指满足 $\mu(S_0) = 1$ 的最小闭集 S_0(即若 $S' \subset S_0$ 是个闭集且满足 $\mu(S') = 1$，则 $S' = S_0$)，换言之，$\mathrm{supp}(\mu)$是测度为 1 的所有闭集的交集：

$$\mathrm{supp}(\mu) = \cap \{S : \mu(S) = 1 \text{ 且 } S \text{ 是闭集}\}.$$

当考虑频率测度时，我们有 $\mathrm{supp}(\mu_{x_0,f}) \subset \omega(x_0; f)$.

由于 $S_1 = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \setminus S_2)$以及 $\mu(S_1 \setminus S_2) \geqslant 0$，由定义可直接推出下面的引理.

引理 11.4.2　令 μ 是一个博雷尔测度，S_1，S_2 是两个博雷尔集，满足 $S_2 \subset S_1$，则 $\mu(S_2) \leqslant \mu(S_1)$.

令 K 表示三分康托尔集，则对 $n \geqslant 1$，K 都包含在由 2^n 个长度为 $1/3^n$ 的区间构成的集合 K_n 中，这些区间的总长度是$(2/3)^n$，于是对 $n \geqslant 1$，K 的勒贝格测度满足

$$\lambda(K) \leqslant \lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

因此 $\lambda(K) = 0$. 于是，所有康托尔集都有勒贝格测度 0.

这里用记号$\chi_S(q)$表示集合 S 的特征函数(characteristic function)，当 q 属于 S 时它等于 1，当 q 不属于 S 时它等于 0，即

$$\chi_S(q) = \begin{cases} 1 & q \in S \\ 0 & q \notin S. \end{cases}$$

χ 是小写的希腊字母.

于是，$\mathbb{R}$ 上闭集$[a, b]$的勒贝格测度等于函数$\chi_{[a,b]}(x)$的积分：

$$\lambda([a,b]) = b - a = \int_a^b 1\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x.$$

若全空间是集合$[a, b]$，可以将勒贝格测度"正规化"使得$[a, b]$的测度为 1：定义

$$\mu_{[a,b]}(S) = \frac{1}{b-a}\lambda(S \cap [a,b])$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \chi_S(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_S(x)\frac{\chi_{[a,b]}(x)}{b-a}\mathrm{d}x.$$

函数

$$\rho(x) = \frac{\chi_{[a,b]}(x)}{b-a}$$

称为此测度的密度函数(density function).

一般地，若实值函数$\rho(x)$满足$\rho(x) \geqslant 0$ 且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\mathrm{d}x = 1,$$

451

则称其为密度函数. 任何密度函数都可以诱导出一个测度μ_ρ：

$$\mu_\rho(S) = \int \chi_S(x)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

例如，

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

就是正态分布的密度函数.

定义 11.4.3 令μ表示度量空间 X 上的一个博雷尔测度，f是把 X 映到自身的函数，如果对 X 中的任一博雷尔集 S，都有

$$\mu(f^{-1}(S)) = \mu(S),$$

则称μ对于函数f是不变的(invariant)，此时也称f保持测度μ或f对μ是保测的(measure preserving).

这里用集合的原像来定义不变测度是因为我们需要知道被f映射到集合 S 的所有点$f^{-1}(S)$的测度. 把测度看作空间中的一个质量分布，取一个博雷尔集 S，设它的原像是 $S_{-1} = f^{-1}(S)$，那么 S_{-1} 中所有质量被f移动到 S 中，因为要保持测度，于是被f移动到 S 中的质量$\mu(S_{-1})$一定与 S 中包含的质量$\mu(S)$相等.

命题 11.4.4 双倍映射 D 和帐篷映射 T 都保持区间$[0, 1]$上的勒贝格测度，因此这个不变测度的密度函数是$\rho(x) \equiv 1$，$x \in [0, 1]$(即$\rho(x) = \chi_{[0,1]}(x)$).

证明　对于双倍映射 D，我们有

$$D^{-1}([x,y]) = \left[\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}+\frac{x}{2},\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\right],$$

而且

$$\begin{aligned}\lambda(D^{-1}([x,y])) &= \lambda\left(\left[\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right]\right) + \lambda\left(\left[\frac{1}{2}+\frac{x}{2},\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\right]\right)\\ &= \frac{y-x}{2}+\frac{y-x}{2} = y-x\\ &= \lambda([x,y]).\end{aligned}$$

因此，D 保持闭区间的测度. 可以看出任意区间$[x,\ y]$的原像都可以表示成两个长度相等的子区间的并，其总长度恰等于$[x,\ y]$的长度.

同理可证 D 保持开区间的测度；由于任意博雷尔集都是由开区间和闭区间生成的，所以 D 保持所有博雷尔集的测度.

对于帐篷映射 T，证明过程类似. ■

11.4.2　频率测度

下面将用李雅普诺夫指数来引出频率测度的定义，李雅普诺夫指数是导数对数的时间平均，即

$$\ell(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\ln|f'(f^j(x_0))|.$$

452

函数

$$g(y) = \ln|f'(y)|$$

是连续的，和式

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}g(f^j(x_0)) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\ln|f'(f^j(x_0))|$$

是前 n 项的时间平均，极限

$$g^*(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}g(f^j(x_0)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\ln|f'(f^j(x_0))|$$

则给出了此连续函数沿整条前行轨道的时间平均. 由于轨道 $f^j(x_0)$ 在绝大部分时间内位于 $\omega(x_0;f)$ 附近，所以时间平均应该依赖于函数 g 在集合 $\omega(x_0;f)$ 上的取值(即它应该是 g 在 $\omega(x_0;f)$ 上的平均)，然而它还依赖于 $f^j(x_0)$ 靠近 $\omega(x_0;f)$ 中的点 y 的频率，因此这个时间平均应该等于关于某个密度函数 ρ 的空间平均数，即

$$g^*(x_0) = \int g(y)\rho(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中密度函数 $\rho(y)$ 给出了 $\omega(x_0;f)$ 中的各点 y 的权重，它依赖于轨道靠近点 y 的频率. 由这个密度函数导出的测度 μ_ρ 称为频率测度.

如何用数值方法估计频率测度呢？例如，对于 $G(x)=4x(1-x)$，先把$[0,\ 1]$区间等分为

k 个小区间：$\left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]$，$1 \leqslant j \leqslant k$，任取一个初始值 x_0，让它迭代足够多次，比如 N 次，然后计算迭代点回到各子区间的次数，比如落在第 j 个子区间 $\left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right)$ 的迭代点的个数是 $n(j)$，则 $F_j = n(j)/N$ 就是这些迭代点回到此区间的频率，显然诸 F_j 的和等于 1. 然而，如果要求在该曲线下的积分等于 1，则需要一个高度 ρ_j，使得 ρ_j 与区间长度 $1/k$ 的乘积等于 F_j，或 $\rho_j = kF_j$. 图 11.4.1 给出了 $N = 10\,000$ 和 $k = 100$ 时 ρ_j 的取值情况，此图称为是柱状图(histogram)，它给出了轨道回到区间 $[0, 1]$ 的不同部分的频率.

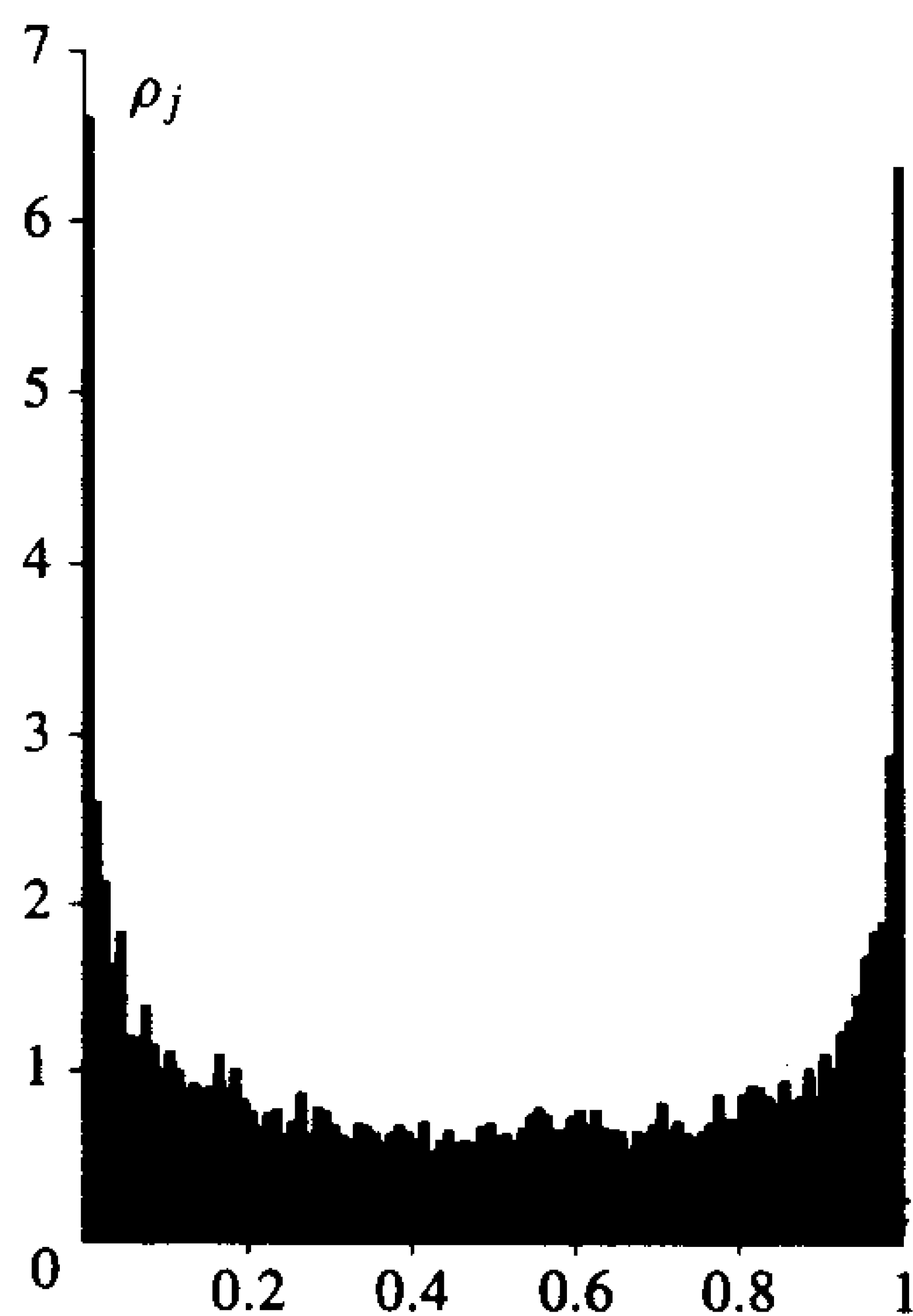


图 11.4.1　映射 $G(x) = 4x(1-x)$ 迭代 10 000 步的频率图或柱状图

下面进一步阐述这些思想.

在下一定义中需要用到一集合 $\boldsymbol{S}$ 的 r 邻域——$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}, r)$：设有集合 $\boldsymbol{S}$ 和 $r > 0$，令

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}, r) = \{x : d(x, \boldsymbol{S}) < r\},$$

其中 $d(x, \boldsymbol{S})$ 表示点 x 到集合 $\boldsymbol{S}$ 的距离，则称 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}, r)$ 为集合 $\boldsymbol{S}$ 的 r 邻域. 显然，对于闭集 $\boldsymbol{S}$，

$$\boldsymbol{S} = \bigcap_{r>0} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}, r).$$

定义 11.4.5　设 f 是把欧式空间 $\mathbb{R}^m$ 映射到自身的连续函数，取定初始值 x_0，设它的前行迭代轨道 $\mathcal{O}_f^+(x_0)$ 是有界的(即存在 $C > 0$ 使得 $|f^j(x_0)| \leqslant C$, $j \geqslant 0$)；若是在度量空间 $\boldsymbol{X}$ 中，则需要假设 $\mathcal{O}_f^+(x_0)$ 包含在一个紧子集中；下面定义关于 x_0 和 f 的频率测度 $\mu_{x_0,f}(\boldsymbol{S})$，先对开区间，再对闭区间，然后利用测度的性质把这些定义推广到其他博雷尔集上.

453

用 $\#\boldsymbol{S}$ 表示集合 $\boldsymbol{S}$ 中点的个数，对于开集 $\boldsymbol{U}$，定义

$$\nu(\boldsymbol{U}, n) = \#\{j : f^j(x_0) \in \boldsymbol{U}, 0 \leqslant j < n\},$$

它表示 x_0 的前 n 步迭代落在 $\boldsymbol{U}$ 中的次数，其中 ν 是希腊小写字母，则有

$$0 \leqslant \frac{\nu(\boldsymbol{U}, n)}{n} \leqslant 1,$$

其中 $\frac{\nu(\boldsymbol{U}, n)}{n}$ 表示在前 n 步迭代中轨道回到 $\boldsymbol{U}$ 的比率，最后定义开集 $\boldsymbol{U}$ 的频率测度为

$$\mu_{x_0,f}(\boldsymbol{U}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\nu(\boldsymbol{U}, n)}{n}.$$

此比率 $\frac{\nu(\boldsymbol{U}, n)}{n}$ 的极限表示整条轨道在开集 $\boldsymbol{U}$ 中所用时间的百分比的极限频率.

对于闭集 $\boldsymbol{S}$，需要把测度定义为轨道靠近集合的频率，而不仅仅是落在集合中的频率，因此定义

$$\mu_{x_0,f}(\boldsymbol{S}) = \lim_{r \to 0^+} \mu_{x_0,f}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}, r)),$$

其中极限过程是让 r 从 0 的右侧趋向于 0，注意到 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}, r)$ 是开集，所以 $\mu_{x_0,f}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}, r))$ 在前

面已有定义. 可见，对于闭集来说并不需要 x_0 的轨道落在 S 中，只需要轨道靠近 S，在这一点上，它与 ω 极限集的定义类似.

利用测度的性质可以把开区间和闭区间上频率测度的定义推广到其他博雷尔集上.

我们还可以通过连续函数的积分来理解频率测度的定义. 假设 $\phi(x)$是相空间$\mathbb{R}$ 的连续函数，把它看成是相空间上的一个测量，比如温度、压力、速度或其他可测量的量，则可能找到 ϕ 关于频率测度 $\mu_{x_0,f}$的积分，即

$$\int \phi(y)\,\mathrm{d}\mu_{x_0,f}\,.$$

454

若 $\mu_{x_0,f}$的密度函数是 ρ，则此积分化为

$$\int \phi(y)\rho(y)\,\mathrm{d}y.$$

从而

$$\phi^*(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi(f^j(x_0)) = \int \phi(y)\,\mathrm{d}\mu_{x_0,f}.$$

在计算机图像上，如果用黑像素表示轨道上的点，则开区域 U 上的黑色部分就表示轨道回到此区域(不同点)的频率，这些黑色区域对应于测度频率$\mu_{x_0,f}(U)$的大小. 如果把 U 分成更小的子集或子区间，然后计算轨道落到各个子区间的次数，则频率测度就像是雨量测量器，能显示出轨道回到不同子区间的次数.

由于一条轨道趋向于它的 ω 极限集，所以频率测度的支集是此 ω 极限集的子集，即 $\mathrm{supp}(\mu_{x_0,f})\subset\omega(x_0;\,f)$，大多数情况下，二者相等，但也有特殊情况，比如 x_0 的轨道只是很少地靠近 $\omega(x_0;\,f)$中的某个点 y，则 y 不属于 $\mathrm{supp}(\mu_{x_0,f})$.

下面的定理给出了频率测度的一些性质，这些性质表明频率测度确实是一测度.

定理 11.4.6　设 f 是把欧式空间$\mathbb{R}^m$ 映射到自身的连续函数，取定初始值 x_0，设它的前行迭代轨道$\mathcal{O}_f^+(x_0)$是有界的(若是在度量空间 X 中，则需要假设$\mathcal{O}_f^+(x_0)$包含在 X 的一个紧子集中).

(a)对任意博雷尔集 S 有 $0\leqslant\mu_{x_0,f}(S)\leqslant 1$.

(b)全空间$\mathbb{R}^m$ 的测度是 1，即

$$\mu_{x_0,f}(\mathbb{R}^m) = 1.$$

(c)若$\{S_j: j\in\mathcal{I}\}$是一组有限个或可数个互不相交的集合，即当 $i\neq j$ 时 $S_i\cap S_j=\varnothing$，则

$$\mu_{x_0,f}\Big(\bigcup_{j\in\mathcal{I}}S_j\Big) = \sum_{j\in\mathcal{I}}\mu_{x_0,f}(S_j),$$

因此，此测度是可数可加的.

(d)若 S 是博雷尔集，则

$$\mu_{x_0,f}(f^{-1}(S)) = \mu_{x_0,f}(S),$$

因此，此测度经 f 是不变的.

证明思路　(a)和(b)可直接由定义推出.

对于(c)部分，只考虑两个集合. 首先，如果 U_1 和 U_2 是不相交的，则对任意 n 都有

$$\nu(U_1\cup U_2,n) = \nu(U_1,n)+\nu(U_2,n),$$

从而

$$\begin{aligned}\mu_{x_0,f}(U_1 \cup U_2) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\nu(U_1 \cup U_2,n)}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\nu(U_1,n)}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(U_2,n)}{n}\\ &= \mu_{x_0,f}(U_1)+\mu_{x_0,f}(U_2).\end{aligned}$$

455

其次，若 S_1 和 S_2 是不相交的闭集，对充分小的 $r>0$，$B(S_1, r)$ 和 $B(S_2, r)$ 是不相交的，且

$$B(S_1 \cup S_2,r) = B(S_1,r) \cup B(S_2,r).$$

则

$$\begin{aligned}\mu_{x_0,f}(S_1 \cup S_2) &= \lim_{r\to0^+}\mu_{x_0,f}(B(S_1 \cup S_2,r))\\ &= \lim_{r\to0^+}\mu_{x_0,f}(B(S_1,r))+\lim_{r\to0^+}\mu_{x_0,f}(B(S_2,r))\\ &= \mu_{x_0,f}(S_1)+\mu_{x_0,f}(S_2).\end{aligned}$$

同理可证有限个或可数个开集或闭集的情况，最后可推出对任意博雷尔集，结论都成立.

下面证明(d)部分，对于开集 U，由 f 的连续性知 $f^{-1}(U)$ 也是开集，又因为 x_0 的轨道必须穿过 $f^{-1}(U)$ 才能到达 U，即 $f^j(x_0)\in f^{-1}(U)$ 当且仅当 $f^{j+1}(x_0)\in U$，所以

$$\begin{aligned}&\#\{j: f^j(x_0) \in f^{-1}(U),\quad 0 \leqslant j < n\}\\ &= \#\{j: f^j(x_0) \in U,\quad 1 \leqslant j < n+1\},\end{aligned}$$

且

$$|\nu(f^{-1}(U),n) - \nu(U,n+1)| \leqslant 1.$$

故对于开集 U,

$$\begin{aligned}\mu_{x_0,f}(f^{-1}(U)) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\nu(f^{-1}(U),n)}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\nu(U,n)}{n} = \mu_{x_0,f}(U).\end{aligned}$$

对于闭集 S，因为 f(一致)连续，

$$\bigcap_{r>0} f^{-1}(B(S,r)) = f^{-1}(S),$$

所以

$$\begin{aligned}\mu_{x_0,f}(f^{-1}(S)) &= \mu_{x_0,f}\Big(\bigcap_{r>0} f^{-1}(B(S,r))\Big)\\ &= \lim_{r\to0^+}\mu_{x_0,f}(f^{-1}(B(S,r)))\\ &= \lim_{r\to0^+}\mu_{x_0,f}(B(S,r))\\ &= \mu_{x_0,f}(S).\end{aligned}$$

由于对开集和闭集结论都成立，可推出对任意博雷尔集结论也成立. ■

我们感兴趣的测度常常是不依赖于初始值的选取方式. 于是给出下面定义.

定义 11.4.7　一测度 μ_f 称为是 f 的自然测度(natural measure), 如果满足 $\mu_{x_0,f}=\mu_f$ 的点 x_0 的集合有正的勒贝格测度, 即

$$\lambda(\{x_0 : \mu_{x_0,f}=\mu_f\})>0.$$

456

满足 $\mu_{x_0,f}=\mu_f$ 的点 x_0 的集合有正的勒贝格测度这点表明在相空间中适当地选取初始值就能诱导出该测度, 所以在勒贝格测度的意义下有正的选择点 x_0 的机会使得 $\omega(x_0;f)=\text{supp}(\mu)$, 因此 $\text{supp}(\mu)$ 是米尔诺吸引子.

在高维空间中, 与自然测度对应的是通常所说的 SRB 测度(SRB measure), 其中缩写 SRB 来自 Ya. Sinai, D. Ruele 和 R. Bowen 这三个名字的第一个字母.

在 11.4.4 节, 我们将看到双倍映射和帐篷映射都保持勒贝格测度, 事实上, 如下面定理所述, 勒贝格测度是这两个映射的自然测度.

定理 11.4.8　在区间[0, 1]上的勒贝格测度是双倍映射和帐篷映射的自然测度.

与频率测度不同的是, 并不是所有点都有自然测度. 比如, 若 p 是 f 的 n-周期点, 则 $\mu_{p,f}$ 是其支集等于此周期轨的测度. 定义一测度 $\delta_q(S)$ 满足

$$\delta_q(S)=\begin{cases}1 & q\in S\\ 0 & q\notin S,\end{cases}$$

则由习题 11.4.3 知, 若 p 是 f 的 n-周期点, 则

$$\mu_{p,f}(S)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(p)}(S).$$

所以 $\mu_{p,f}$ 是个"原子"测度, 它只是测量了轨道 $\mathcal{O}_f^+(p)$ 落在集合 S 中的比例.

下面的定理表明 $a=4$ 的逻辑斯谛映射有一个不变测度.

定理 11.4.9　逻辑斯谛映射 $G(x)=4x(1-x)$ 有一个不变的概率测度 $\mu_G=\mu_{\rho_G}$, 它的密度函数是

$$\rho_G(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}}.$$

事实上, μ_G 是自然测度.

证明　逻辑斯谛映射 $G(x)=4x(1-x)$ 与斜率为 2 的帐篷映射通过下面的映射

$$x=C(s)=\frac{1-\cos(\pi s)}{2}=\sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

共轭, 即 $C\circ T(s)=G\circ C(s)$, 由命题 11.4.4 可知帐篷映射在区间[0, 1]上保持勒贝格测度 λ, 便可以利用共轭来诱导出 G 的一个不变测度.

若 $s_0\in T^{-1}(s_1)$, 则

$$\begin{aligned}T(s_0)&=s_1\\ C^{-1}\circ G\circ C(s_0)&=s_1\\ G\circ C(s_0)&=C(s_1)\\ C(s_0)&\in G^{-1}(C(s_1))\end{aligned}$$

$$s_0 \in C^{-1}[G^{-1}(C(s_1))].$$

因此，若 S' 是一个博雷尔集，则

457

$$T^{-1}(S') = C^{-1}G^{-1}C(S'),$$

或者，令 $C(S') = S$ 使得 $S' = C^{-1}(S)$，从而

$$T^{-1}[C^{-1}(S)] = C^{-1}[G^{-1}(S)].$$

由于对任意博雷尔集 S' 帐篷映射 T 都保持勒贝格测度，所以

$$\lambda(C^{-1}(S)) = \lambda(T^{-1}[C^{-1}(S)]) = \lambda(C^{-1}[G^{-1}(S)]).$$

因此，对任意博雷尔集 S，定义

$$\mu_G(S) = \lambda(C^{-1}(S)).$$

则有

$$\begin{aligned}\mu_G(G^{-1}(S)) &= \lambda(C^{-1}(G^{-1}(S)))\\ &= \lambda(C^{-1}(S)) = \mu_G(S),\end{aligned}$$

这表明 μ_G 是 G 的不变测度.

由于 $C^{-1}([0,1]) = [0,1]$，$\mu_G([0,1]) = \lambda(C^{-1}[0,1]) = \lambda([0,1]) = 1$，所以全测度等于 1.

注意到

458

$$\mu_G([0,x_0]) = \int_{s\in C^{-1}([0,x_0])} 1\,\mathrm{d}s.$$

如果作代换 $x = C(s) = \sin^2(\pi s/2)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= \pi\sin(\pi s/2)\cos(\pi s/2)\,\mathrm{d}s\\ &= \pi\sin(\pi s/2)\sqrt{1-\sin^2(\pi s/2)}\,\mathrm{d}s\\ &= \pi\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}s\\ &= \pi\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}s,\\ \mathrm{d}s &= \frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{x-x^2}},\end{aligned}$$

所以

$$\mu_G([0,x_0]) = \int_0^{x_0}\frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{x-x^2}}.$$

因此不变测度 μ_G 的密度函数是

$$\rho_G(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x-x^2}}.$$

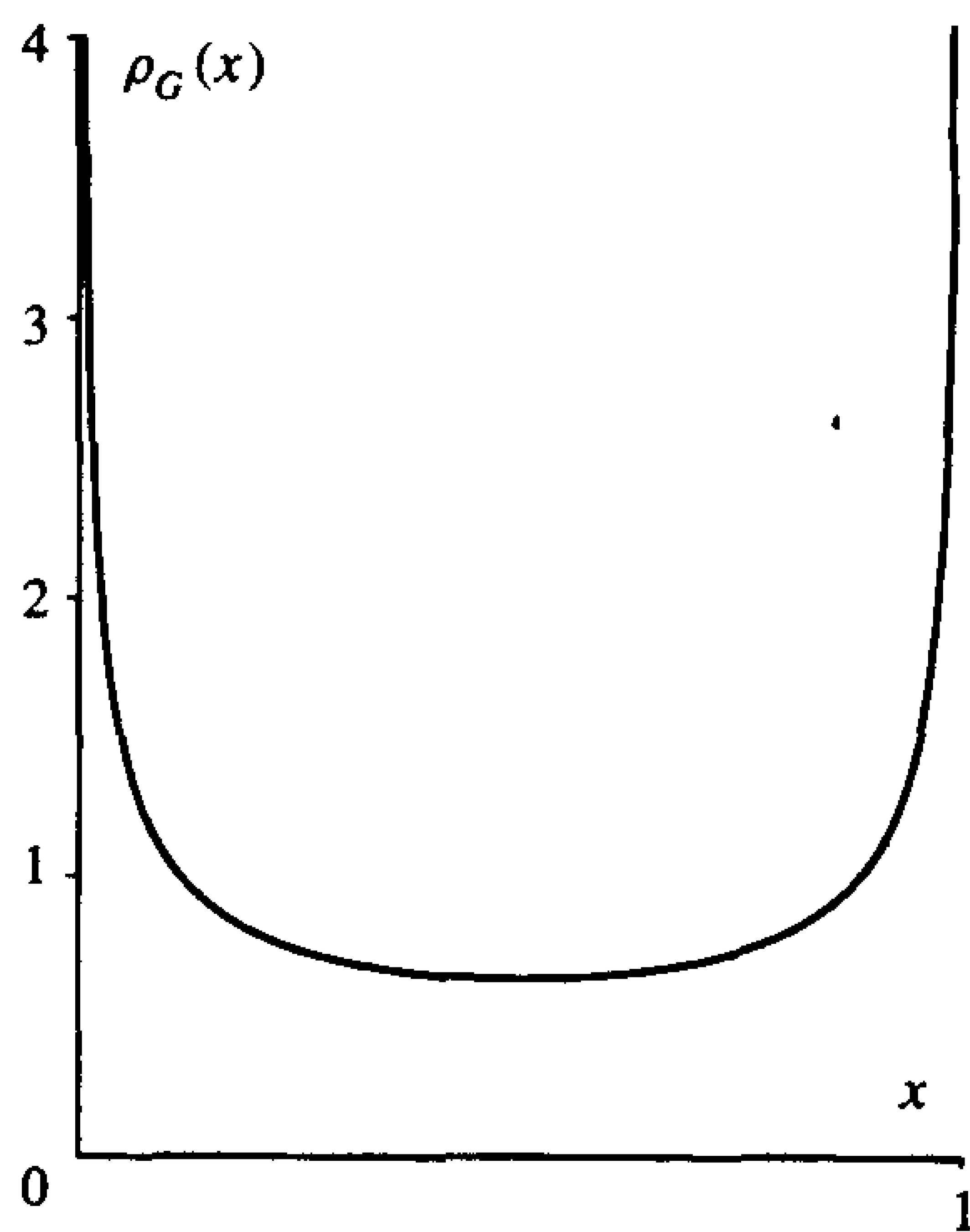


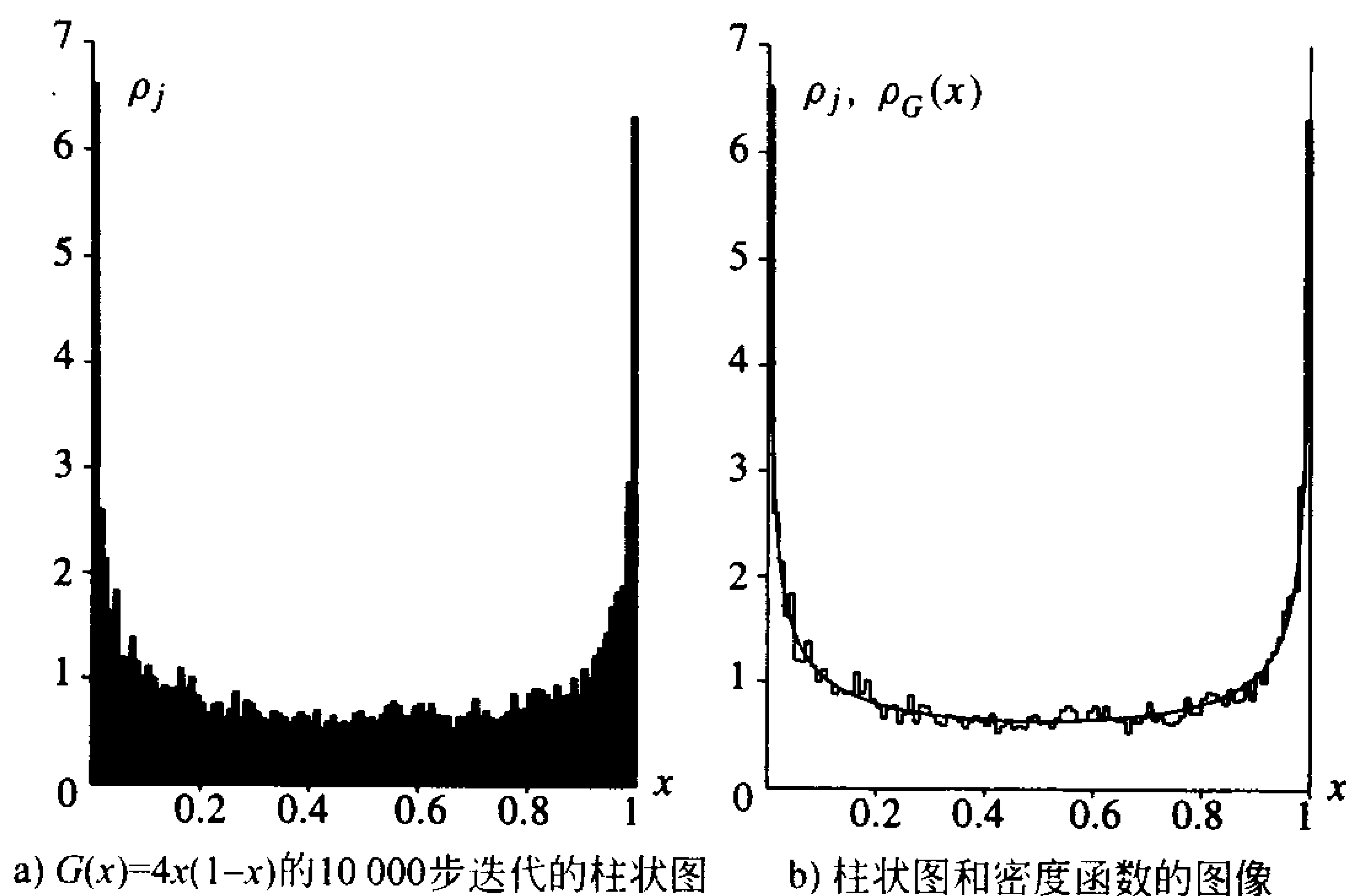
图 11.4.2　$G(x)=4x(1-x)$ 的密度函数 ρ_G

图 11.4.2 描绘了此密度函数的图像. 由于 G 把 0.5 附近一适当长度的区间映成 1 附近一个很小的区间，所以密度函数在 1 附近的值非常大，又因为 1 附近的点被映到 0 附近，从而密度函数在 0 附近也非常大.

由于勒贝格测度是帐篷映射的自然测度，所以 μ_G 也是 G 的自然测度.　■

因为当 $0<x<1$ 时 $\rho_G(x)>0$，这表明生成此自然测度的轨道 $\mathcal{O}_f^+(x_0)$ 不仅在[0, 1]上是稠密的，而且在[0, 1]的每个小子区间上的频率都为正，所以，映射 G 是拓扑传递的，因而是强意义下混沌的；我们还注意到 μ_G 在[0, 1]上是无界的，而且当 x 趋向于 0 或 1 时，μ_G 趋向于无穷，这与下一节将要介绍的分段扩张映射的有关结果形成对比.

下面我们通过计算初始值 x_0 的各步迭代回到[0, 1]的不同小子区间的频率来估计 $\rho_G(x)$ 的取值情况，先把[0, 1]区间 k 等分：$[j-1/k,\ j/k]$，$1\leqslant j\leqslant k$，可以计算出前 N 步迭代落在第 j 个子区间 $[j-1/k,\ j/k)$ 的次数 $n(j)$，令 $F_j=n(j)/N$ 表示回到这个区间的频率，$\rho_j=kF_j$ 就是密度的估计值(选取 ρ_j 使得它与区间长度 $1/k$ 的乘积等于 F_j). 图 11.4.3a 给出了反映 $N=10\,000$ 和 $k=100$ 时 ρ_j 的取值情况的柱状图；图 11.4.3b 同时画出了 ρ_j 和 ρ_G 的图像，可以看出它们有良好的吻合.



a) $G(x)=4x(1-x)$的10 000步迭代的柱状图　b) 柱状图和密度函数的图像

图 11.4.3

例 11.4.10 例 11.2.11 中的映射

$$F\begin{bmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+\dfrac{\operatorname{sign}(r_0-1)}{\sqrt{1+(r_0-1)^{-2}}} \\ \theta_0+\alpha 2\pi+\operatorname{sign}(r_0-1)(\sqrt{1+C}-\sqrt{C}) \pmod{2\pi} \end{bmatrix},$$

其中 $C=(r_0-1)^{-2}$，在所述空间上有对初始值的敏感依赖性，但限制到吸引子上时就不这样了. 同样，对于例 7.2.5 中的微分系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x-2x^3-y(-x^2+x^4+y^2), \end{aligned}$$

它有一个形如"8"的吸引子，该映射在所述空间有对初始值的敏感依赖性，但限制到吸引子上时就不是这样了(这个映射的李雅普诺夫指数均非零，其中一个是正的).

从频率测度的角度可以分析这两个例子的难度，比如对于映射 $F(x)$，取单位圆外一点 $\boldsymbol{x}_0$，易知 $\omega(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{F})$ 恰是整个单位圆，但是由于迭代非常慢地经过不动点 $\boldsymbol{p}$: $(r,\ \theta)=(1,\ 0)$，所以

此轨道在 p 附近用去了绝大部分时间，因而它的频率测度是 $\mu_{x_0,F}=\delta_p$，故

$$\mu_{x_0,F}(S)=\begin{cases}1 & p\in S\\ 0 & p\notin S.\end{cases}$$

因此，δ_p 是自然测度，但其支集不是整个吸引子，而只是该不动点. ■

11.4.3　扩张映射的不变测度

本节将讨论直线上(可能)不连续的分段扩张映射，这里允许它有有限个不连续点和有限个导数不存在的点. 设这些点为

$$q_0<q_1<\cdots<q_k,$$

并假设 f 在每个开区间 $A_j=(q_{j-1},\ q_j)$ 上是 C^2 的，并具有有界的一阶和二阶导数，此外设 f 是扩张的，从而可设存在 $\alpha>1$，对任意的 j，当 $q_0<x<q_k$，$x\neq q_j$ 时

$$|f'(x)|\geqslant\alpha.$$

459～460

最后，再假设区间 $[q_0,\ q_k]$ 是正不变的，即当 $x\in[q_0,\ q_k]$ 时 $f(x)\in[q_0,\ q_k]$. A. Lasota 和 J. Yorke 在[**63**]中证明了此类映射有一个不变测度，T. Y. Li 和 J. Yorke 在[**66**]中提出了一些相关结论.

定理 11.4.11(Lasota 和 Yorke)　设 f 是一可能不连续的分段 C^2 的扩张映射，并有扩张常数 $\alpha>1$，又设 f 和 f' 只有有限个不连续点 $q_0<\cdots<q_k$，而且 $[q_0,\ q_k]$ 是正不变的.

(a)则存在一不变测度 μ_{ρ^*}，它的密度函数 $\rho^*(x)$ 有界，即存在 $C>0$ 使得当 $x\in[q_0,\ q_k]$ 时 $\rho^*(x)\leqslant C$，因此对任意闭区间 $[a',\ b']\subset[q_0,\ q_k]$ 有 $\mu_{\rho^*}([a',\ b'])\leqslant C|b'-a'|$，这表明，若集合 S 的勒贝格测度等于零，即 $\lambda(S)=0$，则对此不变测度而言 S 的测度也为零，即 $\mu_{\rho^*}(S)=0$.

(b)测度 μ_{ρ^*} 可以分解为有限个测度 μ_{ρ_1}，…，μ_{ρ_k} 之和，而且(i)对每个 μ_{ρ_j} 都存在一点 x_0^j 使得 $\omega(x_0^j,\ f)=\operatorname{supp}(\mu_{\rho_j})$；(ii)函数 ρ_j 的支集的内部是互不相交的，即

$$\{x:\rho_i(x)>0\}\cap\{x:\rho_j(x)>0\}=\varnothing,\quad i\neq j.$$

每一个 μ_{ρ_j} 都是自然测度.

(c)如果存在点 x_0 使得 $\omega(x_0;\ f)=[q_0,\ q_k]$，则在 $[q_0,\ q_k]$ 上 $\rho^*(x)>0$，而且 μ_{ρ^*} 本身也是自然测度(即 μ_{ρ^*} 不能分解，(b)中 k 只能等于 1).

注 11.4.12　若 $\lambda(S)=0$ 蕴涵 $\mu_{\rho^*}(S)=0$，则称测度 μ_{ρ^*} 关于勒贝格测度是绝对连续的(absolutely continuous).

证明思路　(a)这个定理很有一般性，不需要假设 f 具有马尔可夫分割，证明思路是任取一个连续函数 $\rho_0(x)$，作为试用的密度函数，然后定义一个新的密度函数

$$\rho_1(x)=P(\rho_0)(x)=\sum_{y\in f^{-1}(x)}\frac{\rho_0(y)}{|f'(y)|}.$$

其中除以导数是必要的，因为映射 f 按这一因子拉伸诸点. 上述算子 P 称为是佩龙-弗罗贝尼乌斯(Perron-Frobenius operator)算子，它把一个密度函数映射为另一个密度函数. 如果把 ρ_0 看作初始密度函数，通过上述算子可以归纳地定义出一列密度函数：

$$\rho_j(x) = P(\rho_{j-1})(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\rho_{j-1}(y)}{|f'(y)|}.$$

对平均取极限，得

$$\rho^*(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x).$$

Lasota 和 Yorke 证明了当 n 趋于无穷大时上述前 n 个密度函数的平均收敛于一极限 ρ^*，该极限就是一不变测度 $\mu^* = \mu_{\rho^*}$ 的密度函数.

(b) Li 和 Yorke 证明了一不变概率测度的任何密度函数都可以分解成有限个部分，每个部分都有其密度函数，而且这些不同密度函数的支集的内部是互不相交的；最后，这些分离的密度函数都给出一不变测度，即自然测度.

(c) 如果存在点 x_0 使得 $\omega(x_0; f)$ 等于整个区间，则所有极限测度都不能分解，因此极限测度本身就是自然测度. ■

例 11.4.13 作为该定理的例子，我们将对一不具有马尔可夫性质的分段线性映射来应用密度函数的迭代过程，这个例子不能用下面要介绍的矩阵方法进行分析.

令

$$f(x) = \frac{4}{3}x \pmod 1.$$

461

此映射只有一个不连续点 $x = 3/4$，由于 $(4/3)^n$ 永远不会等于一个整数，所以此映射不具有马尔可夫分割，因此 $f^n(1)$ 永远不会回到 0.

若取 $\rho_0(x) \equiv 1$，$x \in [0, 1]$，则

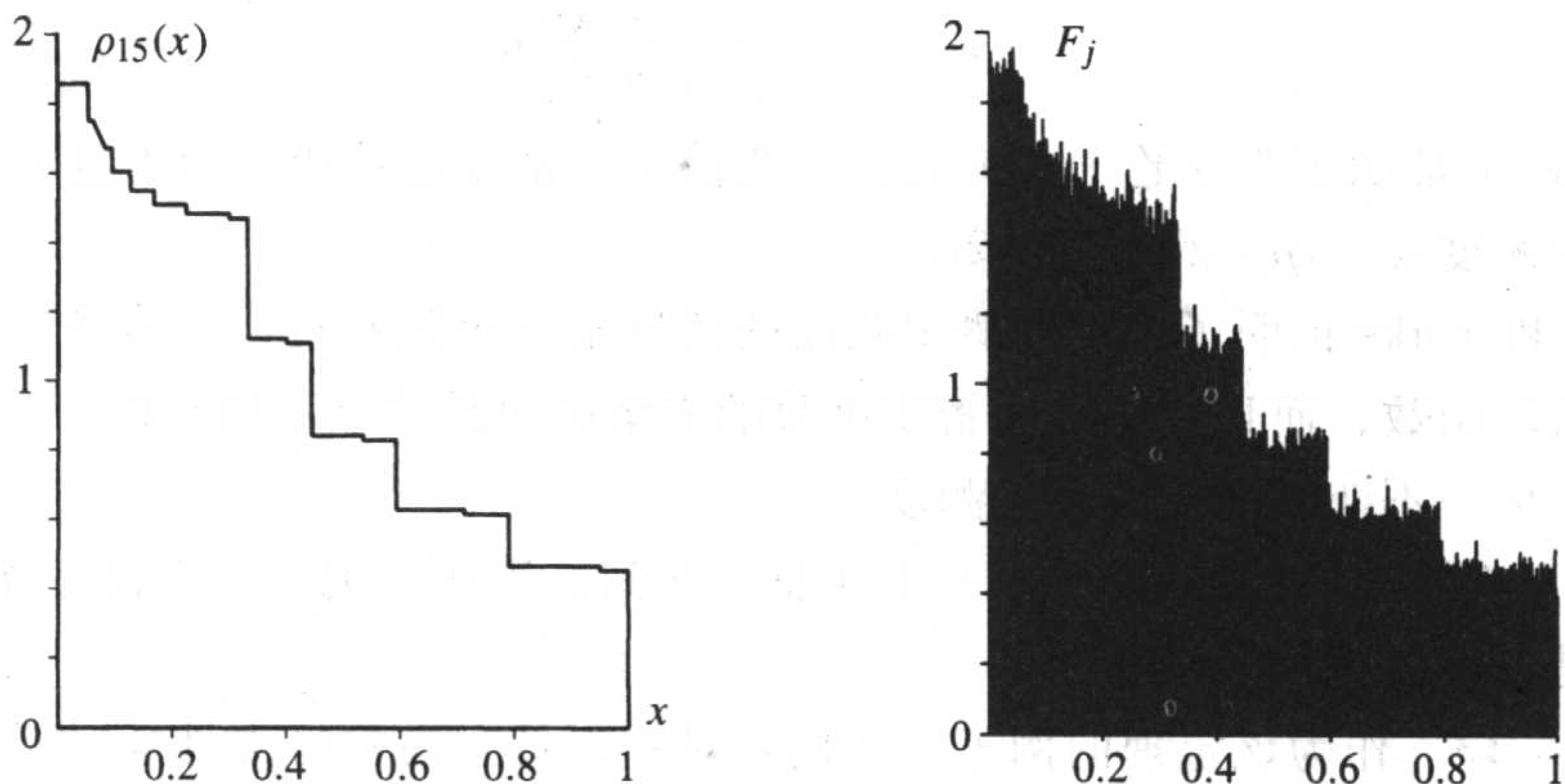
$$\rho_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\rho_2(x) = \begin{cases} \frac{27}{16} & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{9}{8} & \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{4}{9} \\ \frac{9}{16} & \frac{4}{9} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\rho_3(x) = \begin{cases} \frac{27}{16} & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{81}{64} & \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{4}{9} \\ \frac{27}{32} & \frac{4}{9} < x \leqslant \frac{16}{27} \\ \frac{27}{64} & \frac{16}{27} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

对此例我们并不算出极限密度函数的明显表达式，图 11.4.4a 画出了 $\rho_{15}(x)$ 的图像，它是利用

Maple 和迭代程序算出的；图 11.4.4b 画出了迭代 500 000 步并将[0，1]等分成 500 份的柱状图，可以看出这两个图像还是相当吻合的，对更大的 k，$\rho_k(x)$ 的图像变化不大，图中出现的穗状是因为我们没有用无限轨道，真正的极限密度函数是单调递减的.



a) 通过佩龙-弗罗贝尼乌斯算子算出的近似密度$\rho_{15}(x)$的图像 b) 迭代500 000步后的柱状图

图 11.4.4 例 11.4.13 中 $f(x)=\frac{4}{3}x(\mathrm{mod}\ 1)$ ■

具有马尔可夫性质的分段线性函数

为了更好地理解不变测度，下面考虑具有马尔可夫性质的分段线性函数，令 $\boldsymbol{A}_i=(q_{i-1}, q_i)$ 表示第 i 个开区间，其长度为 $L_i=q_i-q_{i-1}$，由于 f 是每个 $\boldsymbol{A}_i$ 上的线性函数，从而在每个 $\boldsymbol{A}_i$ 上它的斜率都是常数，设第 i 个区间上的斜率的绝对值是 s_i，再定义转换矩阵 (t_{ij}) 如下：

462

$$t_{ij}=\begin{cases}1 & f(\boldsymbol{A}_i)\supset \boldsymbol{A}_j\\ 0 & f(\boldsymbol{A}_i)\cap \mathrm{int}(\boldsymbol{A}_j)=\varnothing\end{cases}$$

（即如果有可能从第 i 个开区间 A_i 映射到第 j 个开区间 A_j，则 $t_{ij}=1$）.

假设存在一个不变的密度函数，它在 $\boldsymbol{A}_i$ 上取常值 ρ_i^*，令 $m_i^*=\rho_i^* L_i$ 表示 $\boldsymbol{A}_i$ 的总测度或总质量，下面推导 m^* 必须满足的条件，然后用此条件来确定 m^* 的值.

区间 $f(\boldsymbol{A}_i)$ 的长度等于 s_iL_i，也等于它所覆盖的区间的总长度，因此

$$s_iL_i=\sum_j t_{ij}L_j.$$

若 $t_{ij}=1$，则此长度映射到 A_j 上的百分比等于 A_j 的长度除以 $f(\boldsymbol{A}_i)$ 的总长度，即

$$\frac{t_{ij}L_j}{s_iL_i}.$$

因此

$$\mu_{\rho^*}(f^{-1}(\boldsymbol{A}_j)\cap \boldsymbol{A}_i)=\frac{t_{ij}L_j}{s_iL_i}m_i^*.$$

对映射到 $\boldsymbol{A}_j$ 上的每个 $\boldsymbol{A}_i$ 取和必定给出 $\boldsymbol{A}_j$ 的总测度：

$$\mu_{\rho^*}(A_j) = \mu_{\rho^*}(f^{-1}(A_j))$$
$$= \sum_i \mu_{\rho^*}(f^{-1}(A_j) \cap A_i)$$

$$m_j^* = \sum_i \frac{t_{ij}L_j}{s_i L_i} m_i^*.$$

用矩阵符号表示，得

$$m^* = m^* M,$$

其中 $m^* = (m_1^*, \cdots, m_k^*)$是行向量，且

$$M = \left(\frac{t_{ij}L_j}{L_i s_i}\right),$$

这里 i 表示 M 的行标，j 表示 M 的列标，为了使用列向量，对上面的等式取转置，得

$$M^{\mathrm{T}} m^{*\mathrm{T}} = m^{*\mathrm{T}}.$$

因为$f(A_i)$的总长度等于$f(A_i)$所覆盖的诸区间的长度之和，所以 M 的每一行加起来等于 1：

$$\sum_j \frac{t_{ij}L_j}{L_i s_i} = 1.$$

令 $e = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$表示每个元素都是 1 的列向量，则行之和为 1 给出

$$Me = e,$$

从而 1 是 M 的特征值，e 是对应的特征向量，又因为 1 也是 M^{T} 的特征值，所以存在行向量 $m^* = (m_1^*, \cdots, m_k^*)$使得 $M^{\mathrm{T}} m^{*\mathrm{T}} = m^{*\mathrm{T}}$或 $m^* M = m^*$，即 m^* 右乘矩阵 M 后是不变的，由佩龙-弗罗贝尼乌斯定理知可选取行特征向量 m^* 使其所有分量都是正数，再经改变尺度，可使得 m^* 的分量之和等于 1，即 [463]

$$\sum_j m_j^* = 1.$$

现在假设概率转换矩阵 M 是非周期的(最终正的)(即存在幂 $q_0 > 0$ 使得矩阵 M^{q_0}的元素都是正数)，这表明转换图是不可约的(即有可能从转换图中的任一顶点经一条可容许路径到达转换图的任何其他顶点)，再由佩龙-弗罗贝尼乌斯定理可知 M 的所有其他特征值 λ_j 都满足 $|\lambda_j| < 1$，而且如果 $m = (m_1, \cdots, m_k)$是区间上的质量或测度的一个不变分布的初始估计，其中 $m_j > 0$，$\sum_j m_j = 1$，则 $m\, M^n$ 收敛于特征向量 m^*. 欲进一步了解佩龙-弗罗贝尼乌斯定理可参看 12.5.1 节. 注意到，由 $\sum_j m_j = 1$ 和 $m' = mM$ 得

$$\sum_j m'_j = \sum_j \sum_k \frac{m_k t_{kj} L_j}{L_k s_k} = \sum_k m_k \sum_j \frac{t_{kj} L_j}{L_k s_k}$$
$$= \sum_k m_k \cdot 1 = 1,$$

所以，其和仍等于 1，这保证了极限向量的各分量之和也等于 1.

为了得到不变密度函数，令

$$\rho_j^* = \frac{m_j^*}{L_j}$$

表示第 j 个区间的测度与其长度的比，则

$$\rho_j^* = \frac{m_j^*}{L_j} = \frac{1}{L_j}\sum_i \frac{t_{ij}L_j}{L_i s_i}m_i^*$$

$$= \frac{1}{L_j}\sum_i \frac{t_{ij}L_j}{L_i s_i}L_i\rho_i^* = \sum_i \frac{t_{ij}}{s_i}\rho_i^*.$$

若定义矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 为

$$\boldsymbol{Z} = \left(\frac{t_{ij}}{s_i}\right);$$

则不变密度正是矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的与特征值为 1 对应的特征向量的分量，即

464

$$(\rho_1^*,\cdots,\rho_k^*)\boldsymbol{Z} = (\rho_1^*,\cdots,\rho_k^*).$$

注意到 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是线性共轭的，其共轭矩阵是

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}.$$

因此，$\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 有相同的特征值，由 $\boldsymbol{M}$ 的最大特征值是 1 可得 $\boldsymbol{Z}$ 的最大特征值也是 1（注意到 $\boldsymbol{Z}$ 各行分量之和不等于 1，所以上面结论并不能从对 $\boldsymbol{M}$ 的讨论直接得出）. 若 $(\rho_1, \cdots, \rho_k)$ 是密度函数的任一初始选择，且 $\rho_j > 0$ 且 $\sum_j \rho_j L_j = 1$，则

$$(\rho_1,\cdots,\rho_k)\boldsymbol{Z}^n$$

收敛于极限不变密度 $(\rho_1^*, \cdots, \rho_k^*)$，其中对任意的 j 有 $\rho_j^* > 0$.

例 11.4.14　考虑具有马尔可夫性质的有 4 个区间的分段线性扩张映射. 令 $\boldsymbol{A}_1$ 有长度 $L_1 = 2$，且按斜率 $s_1 = 3/2$ 映射到 $\boldsymbol{A}_2$ 上；令 $\boldsymbol{A}_2$ 的长度 $L_2 = 2(3/2) = 3$，且按斜率 $s_2 = 4/3$ 映射到 $\boldsymbol{A}_3$ 上；令 $\boldsymbol{A}_3$ 的长度 $L_3 = 3(4/3) = 4$，且按斜率 $s_3 = 5/4$ 映射到 $\boldsymbol{A}_4$ 和 $\boldsymbol{A}_3$；令 $\boldsymbol{A}_4$ 的长度 $L_4 = 4(5/4) - 1 = 1$，且按斜率 $s_4 = 2$ 映射到 $\boldsymbol{A}_1$ 上，参见图 11.4.5.

465

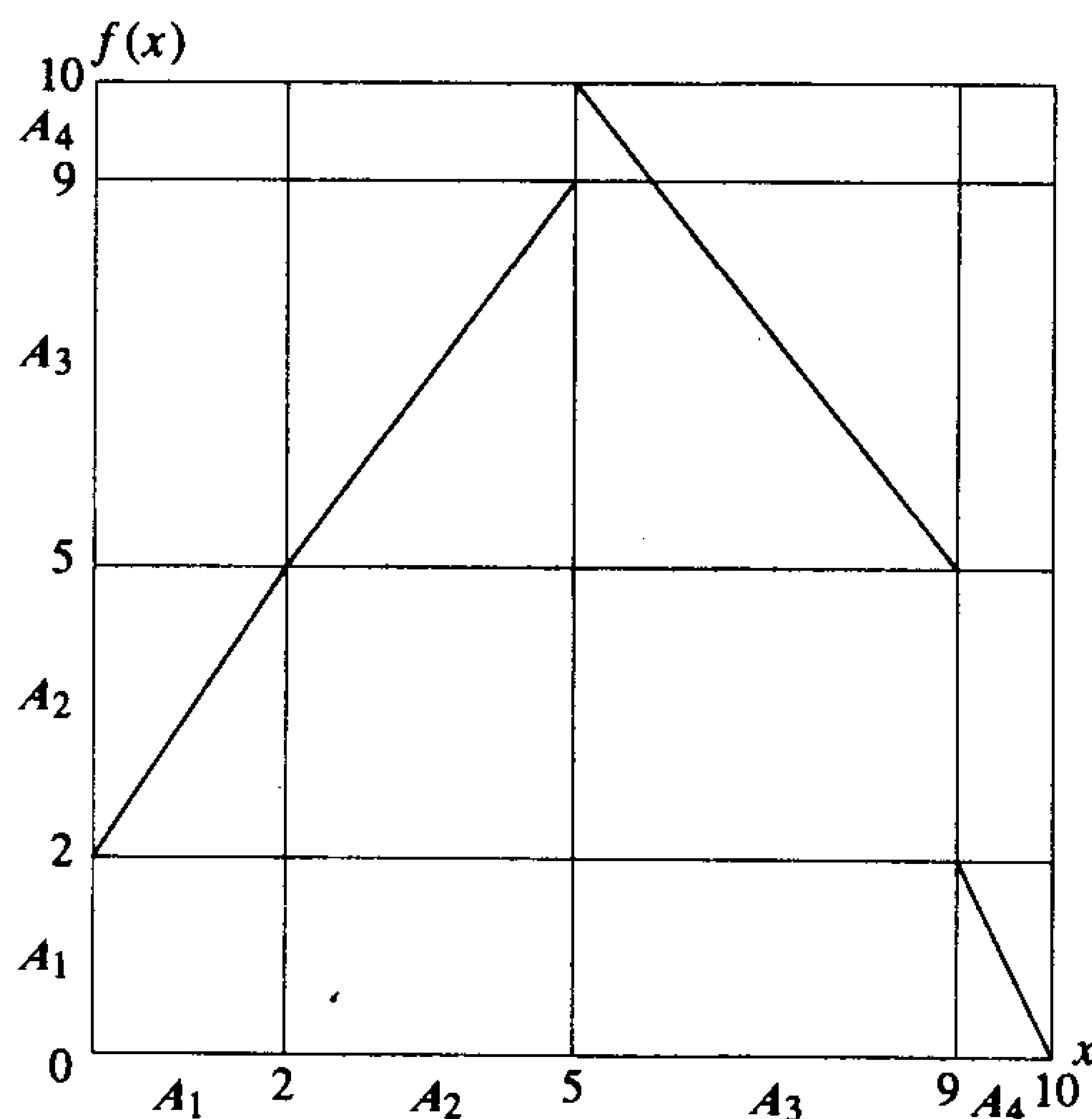


图 11.4.5　例 11.4.14 中的分段线性扩张映射

此例中矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 分别等于

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad 和 \quad \boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{3}&0&0\\0&0&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{4}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{1}{2}&0&0&0\end{bmatrix}.$$

为了得到矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应于特征值 1 的行特征向量，先取转置，再通过行初等变换得到 $\boldsymbol{M}^{\top}$ 的一个列特征向量：

$$\boldsymbol{M}^{\top}-\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\1&-1&0&0\\0&1&-\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{5}&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&0&1\\0&1&-\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{5}&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&-\frac{1}{5}&1\\0&0&\frac{1}{5}&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因此特征向量满足

$$m_1=m_2=m_4 \quad 和 \quad m_3=5m_4,$$

或

$$\boldsymbol{m}=(m_4,m_4,5m_4,m_4).$$

该行向量各分量的和为 $8m_4$，取 $m_4=1/8$ 使得各分量和等于 1，则有向量

$$\boldsymbol{m}^*=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{8}\right).$$

从而各区间的密度是

$$\rho_1^*=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16},$$

$$\rho_2^*=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24},$$

$$\rho_3^*=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{32},$$

$$\rho_4^*=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{8}.$$

图 11.4.6 画出了密度函数的图像.

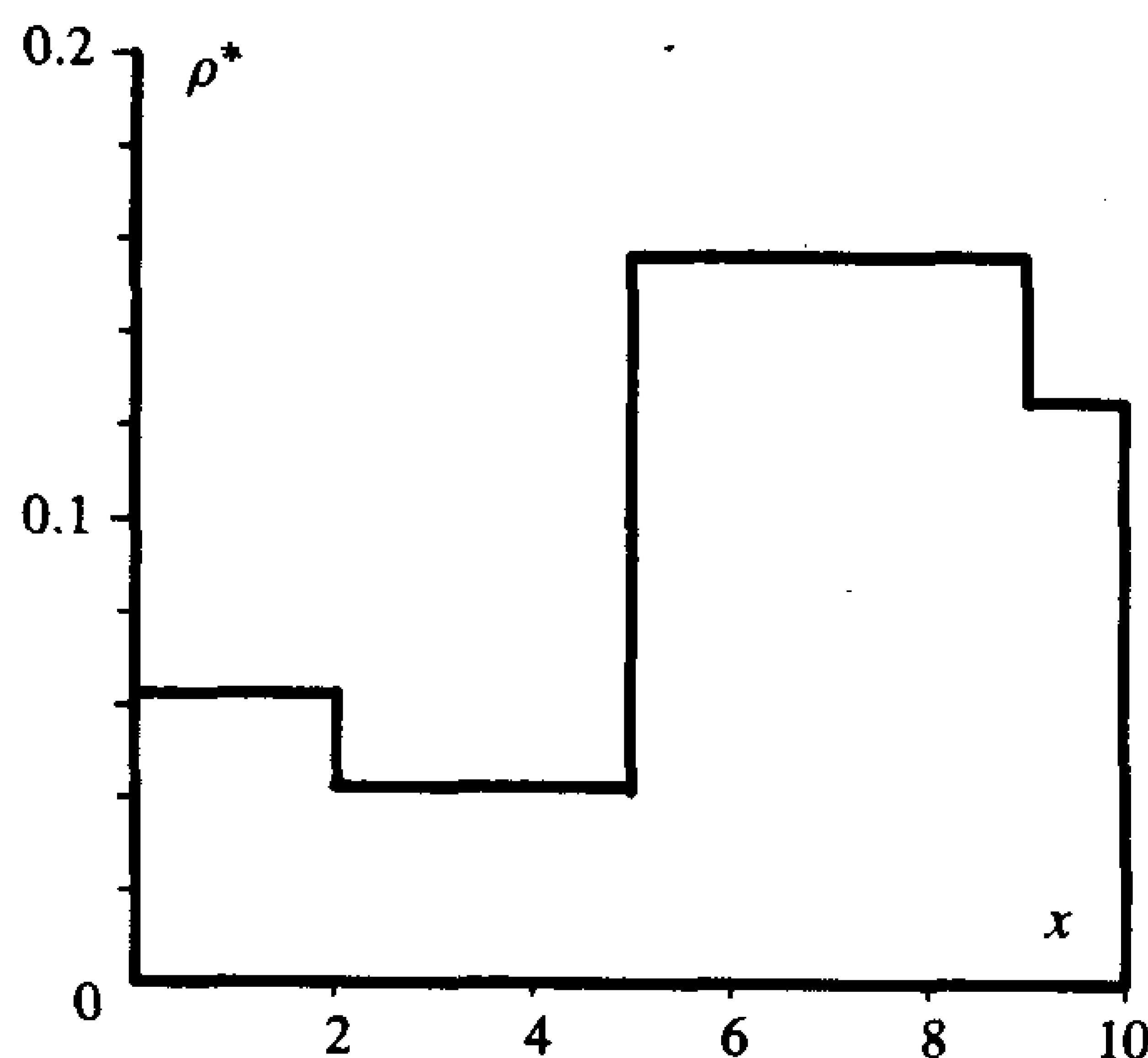


图 11.4.6　例 11.4.14 的密度函数　■

466

11.5　应用

11.5.1　资本积累

利用产量和储蓄水平可以模拟商业周期循环. Solow 增长模型在离散时间的情况下是如下形式的函数：

$$f(x) = \frac{s(x)P(x)}{1+\lambda},$$

这里 $s(x)$ 表示储蓄函数，$P(x)$ 表示单位资本的产量函数，$\lambda>0$ 表示来自人口增长的因子，参见[**30**]. 第 8 章曾指出如何利用科布–道格拉斯产量函数来导出函数

$$k_n = f(k_{n-1}) = \frac{\sigma A k_{n-1}^{\alpha}}{1+\lambda},$$

其中 $k=K/L$ 表示资本和劳动力之比，D. Day[**30**]得出变化的存储率和科布–道格拉斯产量函数可以导出形如

$$g(k) = \left(\frac{a}{1+\lambda}\right)\left(1-\frac{k^{1-\alpha}}{B}\right)k$$

的函数，其中参数 λ，a，$B>0$；$0<\alpha<1$，函数 g 满足

$$g(0)=0 \quad 和 \quad g(B^{1/(1-\alpha)})=0.$$

且它与只有一个极大值的逻辑斯谛映射有很多相同的性质，其动力学行为很像逻辑斯谛映射，图 11.5.1 专门给出了当 $\alpha=0.5$，$B=1$ 和 $c=6.5$ 时点 0.5 的图示迭代，这条轨道在近似于 [0.117, 0.963]的区间上是稠密的，所以此时函数 g 有混沌吸引子.

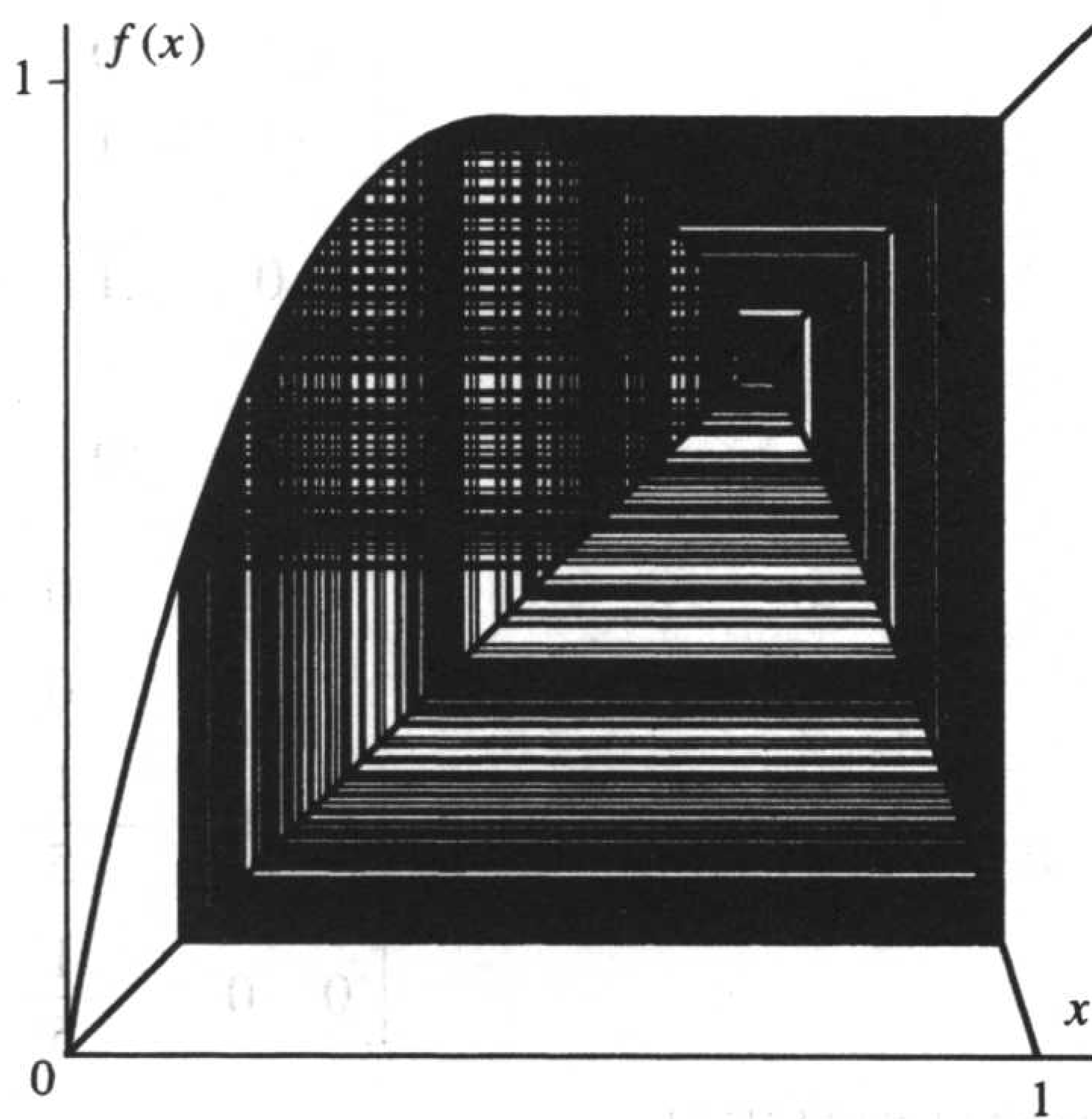


图 11.5.1　资本积累模型在 $\alpha=0.5$，$B=1$ 和 $c=6.5$ 时的图示迭代

467

11.5.2　混沌的血细胞种群

如 9.7.3 节所述，A. Lasota 在文献[**62**]中提出了红血细胞种群的离散模型

$$f_a(x) = (1-a)x + bx^r e^{-sx}.$$

根据实验数据，其中的参数 b，r 和 s 取值为

$$r=8, \quad s=16, \quad b=1.1\times 10^6.$$

本节要讨论的事实是当 $a=0.81$ 时此系统有一个混沌吸引子.

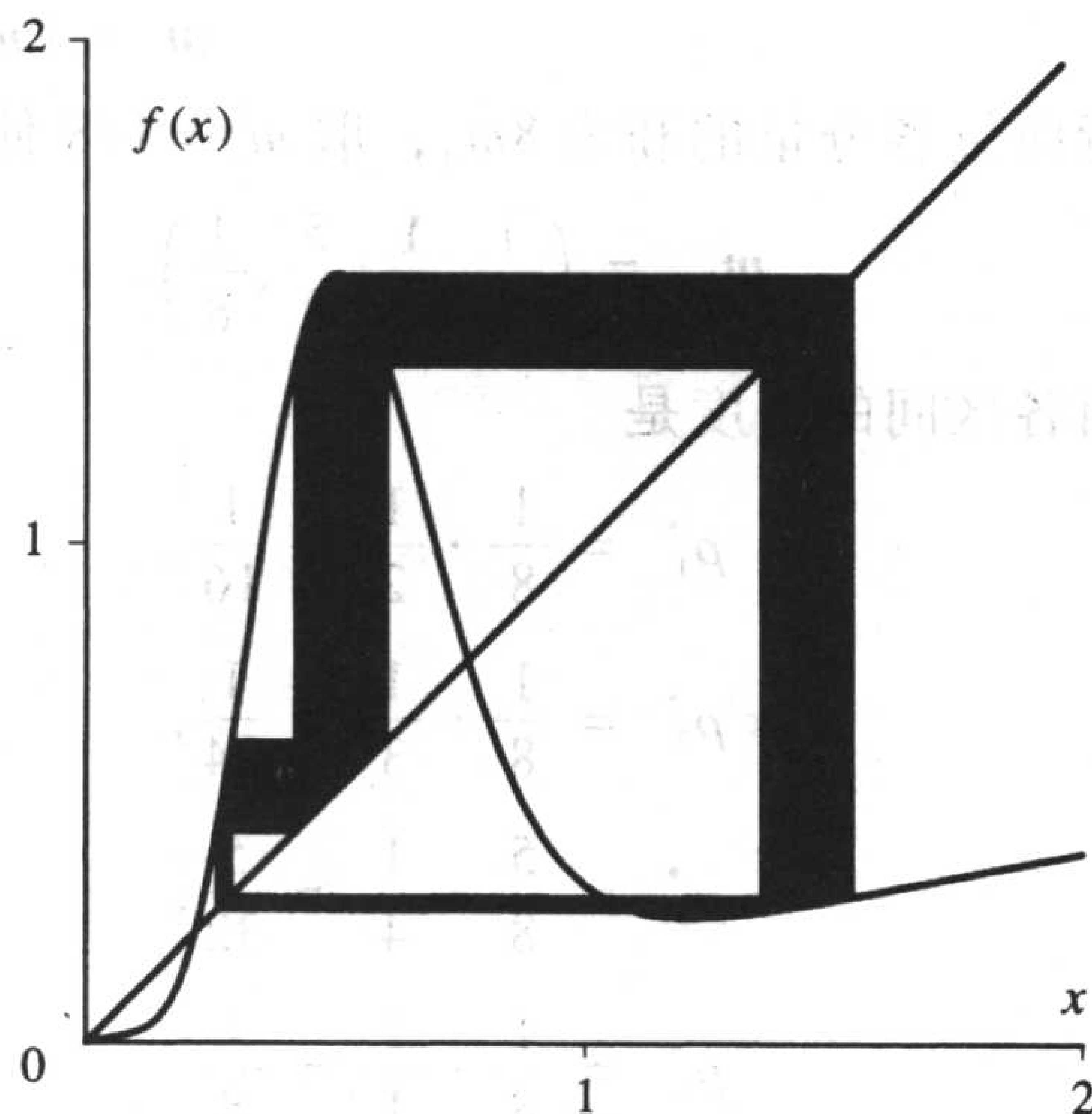


图 11.5.2　血细胞模型在 $a=0.81$ 时的图示迭代

图 11.5.2 所示的 $a=0.81$ 时点 0.5 的图像迭代可以看出，此模型有一条轨道在由三个子区间组

成的集合上是稠密的，这个集合近似等于[0.262, 0.293]∪[0.419, 0.64]∪[1.353, 1.54]. 因此数值研究显示$f_{0.81}$有一个如11.2节所定义混沌吸引子. 注意，虽然这个吸引子与11.2节中扩张映射的吸引子有相类似的特征性质，但$f_{0.81}$不是扩张映射，这是因为它在吸引子中有一个临界点.

在文献[**73**]中读者可以看到对此模型的进一步讨论和更多参考文献.

11.6　理论与证明

一维洛伦兹映射

定理 11.2.15(Williams)　设 $a<c<b$ 且 f 在区间 $[a, c)$ 和 $(c, b]$ 上有定义，在 $[a, b]$ 上取值，f 还满足：

(i) f 在 $[a, c)\cup(c, b]$ 上处处可微，且处处满足 $f'(x)\geqslant L>\sqrt{2}$，特别地，$f$ 在不连续点两侧都是单增的.

(ii) 点 c 是唯一的不连续点，且 $f(c^-)=b$，$f(c^+)=a$.　468

(iii) 端点 a 与 b 的两次迭代后仍呆在原侧，即

$$b\geqslant f(b)\geqslant f^2(b)>c\quad 且$$
$$a\leqslant f(a)\leqslant f^2(a)<c.$$

则下面的结论成立：

(a) 若 f 满足(i)和(ii)，则它在区间 $[a, b]$ 上有对初始值的敏感依赖性.

(b) 若 f 满足(i)、(ii)和(iii)，则对有正长度的任一子区间 $\boldsymbol{J}\subset[a, b]$，都存在 n 使得 $f^n(\boldsymbol{J})=(a, b)$.

(c) 若 f 满足(i)、(ii)和(iii)，则 f 在 $[a, b]$ 上是拓扑传递的.

证明　(a) 任取两个相邻的点 $x_0<y_0$，若 x_0，y_0 位于 c 的同侧，由中值定理可知存在介于 x_0，y_0 之间的点 z_0 使得

$$\begin{aligned}|y_1-x_1| &= |f(y_0)-f(x_0)|\\ &= |f'(z_0)(y_0-x_0)|\\ &\geqslant L|y_0-x_0|.\end{aligned}$$

重复上述讨论，只要对 $0\leqslant j<k$，$x_j=f^j(x_0)$，$y_j=f^j(y_0)$ 始终位于 c 的同侧，则

$$\begin{aligned}|y_k-x_k| &\geqslant L|y_{k-1}-x_{k-1}|\\ &\geqslant L^k|y_0-x_0|.\end{aligned}$$

由于这个绝对值随 k 的增大而增大，所以最终 x_k，y_k 必位于 c 两侧，又因为在 c 两侧 f 都是单调的，所以 $x_k<c<y_k$.

由条件(ii)，$f(c^-)=b>c$，$f(c^+)=a<c$；令 $r>0$ 满足当 $c-r\leqslant x<c$ 时 $f(x)\geqslant c+(r/2)$，当 $c<y\leqslant c+r$ 时 $f(y)\leqslant c-(r/2)$. 下面证明此 r 满足敏感依赖性的定义. 若 $y_k-x_k>r$，则结论已证. 否则，x_k，y_k 到 c 的距离都小于 r，则有　469

$$x_{k+1}-y_{k+1}\geqslant c+\frac{r}{2}-\left(c-\frac{r}{2}\right)=r.$$

因此，无论哪种情况出现，某步迭代后的距离一定大于 r. 结论(a)得证.

(b)令 J 表示 $[a, b]$ 中长度大于零的子区间，下面由归纳法定义一列区间，首先令

$$J_0 = \begin{cases} J & c \notin J \\ J \setminus \{c\} \text{ 中较长的子区间} & c \in J. \end{cases}$$

再归纳地令

$$J_{k+1} = \begin{cases} f(J_k) & c \notin f(J_k) \\ f(J_k) \setminus \{c\} \text{ 中较长的子区间} & c \in f(J_k). \end{cases}$$

由中值定理可知，若 $c \notin f(J_k)$，则 $\lambda(J_{k+1}) \geqslant L\lambda(J_k)$；若 $c \in f(J_k)$，由于我们总是把区间分成两部分并取较长的一个，所以 $\lambda(J_{k+1}) \geqslant (L/2)\lambda(J_k)$. 同理

$$\lambda(J_{k+2}) \geqslant \begin{cases} L^2\lambda(J_k) & c \notin f(J_k) \cup f(J_{k+1}) \\ \dfrac{L^2}{2}\lambda(J_k) & c \notin f(J_k) \cap f(J_{k+1}) \\ \dfrac{L^2}{4}\lambda(J_k) & c \in f(J_k) \cap f(J_{k+1}). \end{cases}$$

其中第一种情形假设 c 既不属于 $f(J_k)$ 也不属于 $f(J_{k+1})$；第二种情形假设 c 不同时属于 $f(J_k)$ 和 $f(J_{k+1})$；最后一种情形假设 c 同时属于 $f(J_k)$ 和 $f(J_{k+1})$(即两个相继的迭代). 由于 $L > \sqrt{2}$，$L^2/2 > 1$，则每个二次迭代之长度都是增长的，直到两个相继的迭代 $f(J_{n-4})$ 和 $f(J_{n-3})$ 同时包含 c.

因为 c 属于 $f(J_{n-4})$，故 c 是 J_{n-3} 的一个端点，再由条件(ii)中 $f(c^-) = b$ 和 $f(c^+) = a$ 可知 $f(J_{n-3})$ 以 a 或 b 为端点；又因为 c 属于 $f(J_{n-3})$，所以 $f(J_{n-3})$ 包含 $(a, c]$ 或 $[c, b)$，这两种情形类似，此处仅讨论后一种情形：$[c, b) \subset f(J_{n-3})$，那么

$$f^2(J_{n-3}) \supset f((c,b)) \supset (a,c] \cup [c,f(b)).$$

再迭代一次，则有

$$\begin{aligned} f^3(J_{n-3}) &\supset f((a,c)) \cup f((c,f(b)) \\ &\supset [c,b) \cup (a,f^2(b)) \\ &\supset [c,b) \cup (a,c] \\ &= (a,b), \end{aligned}$$

其中最后一步由条件(iii)推出，又因为 $f^n(J) \supset f^3(J_{n-3})$，所以结论成立.

(c)由结论(b)知，对 $[a, b]$ 中任意两个开区间 J_1 和 J_2，总存在 n 使得 $f^n(J_1) \cap J_2 \neq \varnothing$，再由下面的伯克霍夫传递定理可知存在稠密于 $[a, b]$ 的轨道. ■

不连续点两侧 f 的导数一正一负的情况更加复杂，Y. Choi 在[**25**]中得到了一些结果，这些结果的总结见[**88**].

470

下面是伯克霍夫传递定理的准确叙述.

定理 11.6.1(伯克霍夫传递定理)　*设* F *是把* $\mathbb{R}^n$ *映射到自身的连续映射，而且* F *把* $\mathbb{R}^n$ *闭子集* X *映射到自身(一般地，*X *可以是有可数基的完备度量空间)；再假设对* X *的任意两开子集* U *和* V*，存在正整数* k *使得* $F^k(U)$ *与* V *相交. 那么，存在* X *的稠密子集* Y *使得对任意* $p \in Y$*，其前行轨道* $\mathcal{O}_F^+(p)$ *在* X *中是稠密的. 此外，若* F *不在* X *或* $\mathbb{R}^n$ *上连续，但在* X *的稠密开子*

集 X' 上连续，则结论依然成立.

对该定理的进一步讨论见[**87**].

练习

11.1　极限集

11.1.1　证明如果点 x_0 的 ω 极限集包含一个吸引的周期点 p，则 $\omega(x_0;f)=\mathcal{O}_f^+(p)$. 提示：先证存在由有限个开区间的并构成的集合 U，它包含 $\mathcal{O}_f^+(p)$ 且

$$\bigcap_j f^j(U)=\mathcal{O}_f^+(p)$$

(在 11.2 节，U 就是 $\mathcal{O}_f^+(p)$ 的收缩域)，再证存在 k 使得 $f^k(x_0)$ 属于 U，最后说明 $\omega(x_0;f)=\omega(f^k(x_0);f)=\mathcal{O}_f^+(p)$.

11.1.2　令 $T(x)$ 表示斜率为 ± 2 的帐篷映射，再令

$$I_L=\left[\frac{1}{4},\frac{7}{16}\right]\quad 和\quad I_R=\left[\frac{9}{16},\frac{7}{8}\right],$$

以及

$$\Lambda=\bigcap_{j\geqslant 0}T^{-j}(I_L\cup I_R).$$

a. 解释为什么 Λ 是康托尔集(是[0, 1]的不可数子集)，及 T 在 Λ 上是拓扑传递的.

b. 解释为什么存在一个(特殊)点 x_0 使得 $\omega(x_0;T)=\Lambda$.

11.2　混沌吸引子

11.2.1　令 f 表示映射

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\arctan(x).$$

注意，f 满足 $f(0)=0$，$f(1)=1$ 且 $f(-1)=-1$，试确定 f 的所有吸引集，并判断哪些是吸引子？为什么没有混沌吸引子？请记住

$$f'(x)=\frac{4}{\pi(1+x^2)}.$$

11.2.2　考虑映射

$$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{3}{2}x & x\leqslant 0\\ 1-2x & x\geqslant 0.\end{cases}$$

471

a. 证明对于映射 f 区间[−1, 1]有一个收缩域，更准确地说，对于 f 存在收缩域 U 使得[−1, 1]是 U 中最大的不变集. 提示：先选取 $a<-1$ 使得 $f(a)=-1$，$b>1$ 使得 $a<f(b)<-1$；再证 $f([a,b])\subset(a,1]\subset(a,b)$ 以及 $f^n([a,b])=[-1,1]$，$n\geqslant 2$.

b. 证明 f 在[−1, 1]具有马尔可夫分割.

c. f 在[−1, 1]上是拓扑传递的吗？如果是，为什么？

d. f 是否有混沌吸引子？如果有，把它找出来.

11.2.3　考虑映射

$$f(x)=\begin{cases}3(1-x)+1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3(x-1)+1 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 3(3-x)+1 & 2\leqslant x\leqslant 3\\ 3(x-3)+1 & 3\leqslant x\leqslant 4\\ 3(5-x)+1 & 4\leqslant x\leqslant 5.\end{cases}$$

a. 证明 f 有一个吸引集且它有收缩域.

b. 证明此吸引集是混沌吸引子(即证(i) f 限制在吸引子上时具有对初始值的敏感依赖性;(ii) f 存在一个点,它的 ω 极限集等于这个吸引子).

11.2.4 (Choi)考虑映射

$$f(x)=\begin{cases}-1.3x-0.25 & x<0\\ -1.2x+0.2 & x\geq 0.\end{cases}$$

a. 计算 0^- 和 0^+ 的前四步迭代(即 $r^{\pm}$ 的前三步迭代).

b. 证明存在由三个区间构成的不变集 A,且中间一个区间的内部包含 0.

c. 找出一正一负两个不动点,它们都不属于上面提到的集合 A 中,却位于 A 中区间的间隔里.

d. 证明 A 至少是一个米尔诺吸引子.

e. 证明 A 的端点的迭代最终落到 A 的内部,这表明 A 有收缩域,从而它是混沌吸引子.

11.2.5 考虑$\mathbb{R}$上的映射 $f(x)=|4x(1-x)|$,证明它有混沌吸引子.

11.2.6 考虑映射

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x+18 & x\leq 0\\ -\frac{7}{6}x+18 & 0\leq x\leq 6\\ -5(x-6)+11 & 6\leq x\leq 10,\\ -\frac{9}{8}(x-10)-9 & 10\leq x.\end{cases}$$

导数的重要的不连续点是 $x=0$,在 $x=6$ 与 10,导数不变号.

a. 证明集合 $[-18,\ -9]\cup[-6,\ 6]\cup[10,\ 18]$ 是不变集(实际上它是个混沌吸引子).

b. 证明空隙 $(-9,\ -6)\cup(6,\ 10)$ 包含一个排斥的、不变的康托尔集,并可用有限型子位移来描述,该子位移是什么?

472

11.3 李雅普诺夫指数

11.3.1 当 $a=3\frac{1}{6}=19/6$ 时映射 $g_a(x)=ax(1-x)$ 有一条 2-周期轨道 $\{q_1=10/19,\ q_2=15/19\}$ 和两个不动点 0 和 $p_a=16/19$.

a. 求出两个不动点的李雅普诺夫指数并判断它们是吸引的还是排斥的.

b. 求出 q_1 的李雅普诺夫指数,并判断 2-周期轨道是吸引的还是排斥的.

c. 求出 $x_0=g_{19/6}(0.5)$ 的李雅普诺夫指数,并思考为什么答案是这样? 提示:该映射有负的施瓦茨导数,同时我们没有从临界点 0.5 开始迭代,而是从它的像开始.

d. 区间 $[0,\ 1]$ 中点 x_0 的李雅普诺夫指数是多少?

11.3.2 用数值方法分别计算当 $a=3.81$, 3.83, 3.85 和 3.87 时映射 $g_a(x)=ax(1-x)$ 在点 $x_a=g_a(0.5)$ 处的李雅普诺夫指数.

11.3.3 考虑映射 $g_5(x)=5x(1-x)$,设点 x_0 的整条轨道都属于区间 $[0,\ 1]$,且它的李雅普诺夫指数存在,证明 g_5 在 x_0 处的李雅普诺夫指数大于零,即 $\ell(x_0;\ g_5)>0$.

11.3.4 设 f 是 $[a,\ b]$ 上的分段扩张映射,满足 $f([a,\ b])=[a,\ b]$,且 f 不必连续,设它的不连续点和导数不存在的点为:$a=p_0<p_1<\cdots<p_k=b$,对任意 $p_{j-1}<x<p_j$ 和 $1\leq j\leq k$ 都有 $|f'(x)|\geq\lambda>1$,再设 x_0 为任一点,其正向迭代轨道不经过所有不连续点 p_j,试解释 x_0 的李雅普诺夫指数为何是正的.

11.3.5 设对于映射 f,点 x_0 的李雅普诺夫指数 $\ell(x_0;\ f)$ 存在,证明对于 f^k,点 x_0 的李雅普诺夫指数是 $k\ell(x_0;\ f)$,

即证

$$\ell(x_0, f^k) = k\ell(x_0; f).$$

11.3.6　令 $f(x) = 3x + \sin(x)$.

a. 求出 $x = 0$ 的李雅普诺夫指数.

b. 证明：若点 x_0 的李雅普诺夫指数 $\ell(x_0; f)$ 存在，则必有 $\ln(2) \leqslant \ell(x_0; f) \leqslant \ln(4)$.

11.3.7　考虑逻辑斯谛映射 $g_5(x) = 5x(1-x)$，它有一个不变的康托尔集 Λ_{g5}.

a. 求两个常数 $1 < A < B$ 使得对于任意 $x \in \Lambda_{g5}$ 都有

$$A \leqslant |g'_5(x)| \leqslant B,$$

试选取尽可能好的 A，B.

b. 由于对任意点 $x_0 \in \Lambda_{g5}$，$\ell(x_0; g_5)$ 都是关于 $\ln(|g'_5(x)|)$ 的平均的极限，且 $\ln(|g'_5(x)|)$ 介于 $\ln(A)$ 和 $\ln(B)$ 之间，试给出 Λ_{g5} 中任意点 x_0 的李雅普诺夫指数 $\ell(x_0; g_5)$ 的一个估计.

11.4　测度

11.4.1　解释为何旋转映射

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$$

在 $[0, 1]$ 上保持勒贝格测度.

11.4.2　证明映射 $f(x) = 3x \pmod 1$ 在 $[0, 1]$ 上保持勒贝格测度.

11.4.3　设 p 是映射 f 的 n-周期点，解释为何有

$$\mu_{p,f}(S) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(p)}(S).$$

473

11.4.4　考虑映射

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{3} \\ 2x - \dfrac{4}{3} & \dfrac{2}{3} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

a. 绘出 f 的图像，并解释为何 f 是具有马尔可夫分割的扩张映射.

b. 给出各个子区间质量之间的转换矩阵 $\boldsymbol{M}$，并找出不变质量 $\boldsymbol{m}^*$.

c. 给出对应于不变质量 $\boldsymbol{m}^*$ 的诸密度 ρ_i^*，作出取值 ρ_i^* 的密度函数 ρ^* 的简图.

d. 证明映射 f 的佩龙–弗罗贝尼乌斯算子保持(c)中所述的密度函数 ρ^*.

11.4.5　考虑映射

$$f(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{8} & \dfrac{1}{4} < x \leqslant \dfrac{3}{4} \\ 2x - \dfrac{5}{4} & \dfrac{1}{4} < x \leqslant \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

a. 绘出 f 的图像，并解释为何 f 是具有马尔可夫分割的扩张映射.

b. 给出子区间之间质量的转换矩阵 $\boldsymbol{M}$，并找出不变质量 $\boldsymbol{m}^*$.

c. 确定对应于不变质量 $\boldsymbol{m}^*$ 的密度 ρ_i^*，作出取值 ρ_i^* 的密度函数 ρ^* 的简图.

d. f 的所有可能的周期构成的集合是什么？

474

第12章　高维映射的周期点

第9~11章研究了单变量函数的迭代问题．第12~14章将研究多变量函数的迭代问题，在这种情形下，函数 $\boldsymbol{F}$ 把$\mathbb{R}^n$ 中的一点映射为$\mathbb{R}^n$ 内的另一点，8.2节中给出了此类函数的一些例题．

本章重点研究这类函数的周期点和周期点附近的动力学行为．首先研究线性映射以便理解不动点或周期点附近的典型动力学行为．然后讨论周期点的稳定性类型和分类．对那些既有压缩方向又有扩张方向的鞍周期点，引入"稳定流形"来表示趋于周期轨的点．本章最后探讨环面上映射的全局性质，将发现这些特殊映射有很多不同的周期点．

12.1　线性映射的动力学

对于具有不动点的非线性函数，不动点处的线性项确定了不动点附近的非线性映射相图的许多特性，因此，尽管我们的主要兴趣在非线性映射上，但还是先从讨论线性映射的迭代问题入手．

令 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 阶实矩阵，对于$\mathbb{R}^n$ 内任一点 $\boldsymbol{x}$，矩阵积 $\boldsymbol{Ax}$ 确定了$\mathbb{R}^n$ 内的一个新点，这种映射常被称为由 $\boldsymbol{A}$ 确定的线性映射(linear map)或线性变换(linear transformation)，此时无须担心如何区别该矩阵和它所产生的线性映射．(矩阵依赖于$\mathbb{R}^n$ 中基向量的选取，不同的基向量值所确定的矩阵也不同．)

因为对任意的 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都有 $\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$，即原点总是线性映射的不动点，且矩阵乘法具有线性性质：

$$\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{Ax}+b\boldsymbol{Ay},$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为两个任意向量，a 和 b 为两个任意标量．

例 12.1.1　考虑线性映射

$$L\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&0\\\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

475

以$\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\end{bmatrix}$为初始值的迭代为

$$\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&0\\\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}x_1^{(0)}\\\frac{4}{5}x_1^{(0)}+\frac{1}{5}x_2^{(0)}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&0\\\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{4}{5}\right)^2x_1^{(0)}\\\left(\frac{4^2}{5^2}+\frac{4}{5^2}\right)x_1^{(0)}+\left(\frac{1}{5}\right)^2x_2^{(0)}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{4}{5}\right)^3 x_1^{(0)} \\ \left(\frac{4^3}{5^3} + \frac{4^2}{5^3} + \frac{4}{5^3}\right) x_1^{(0)} + \left(\frac{1}{5}\right)^3 x_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

注意，上面的迭代结果中出现了 4/5 和 1/5 的幂，它们是对角线上的元素(特征值).

因为该线性映射系数矩阵的行列式为 $4/25 \neq 0$，所以该矩阵有逆

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

因此，可取向后迭代：

$$\begin{bmatrix} x_1^{(-1)} \\ x_2^{(-1)} \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

同样因为向后迭代涉及 5/4 和 5 的幂，它们是对角线上元素(和特征值)的逆．例 12.1.2 会对该线性映射给出更全面的分析．■

一般线性映射可用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示．若以 $\mathbb{R}^n$ 内的一点(一个向量) $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 为初始值，重复利用 $\boldsymbol{A}$ 可得到一系列新点，设为 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}$，…：

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)},$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}^{(0)}$$

和

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k-1)} = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}^{(0)}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于 0，则它有逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$，而且可构成向后迭代：

$$\boldsymbol{x}^{(-1)} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}^{(0)},$$

$$\boldsymbol{x}^{(-2)} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}^{(-1)} = \boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{x}^{(0)}$$

和

$$\boldsymbol{x}^{(-k)} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}^{(-k+1)} = \boldsymbol{A}^{-k}\boldsymbol{x}^{(0)}.$$

最容易的是这样一些点的迭代，这些点的像是其自身与一标量的乘积，这些点满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

这些向量和数分别被称为特征向量和特征值．若存在非零向量 $\boldsymbol{v}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

476

则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值(eigenvalue)，向量 $\boldsymbol{v}$ 被称为 $\boldsymbol{A}$ 的与特征值 λ 相对应的特征向量(eigenvector)．这些向量和数满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

其中，$\boldsymbol{v}$ 是非零向量，则

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0.$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程(characteristic equation).

特征值和特征向量

求特征值和特征向量的第一步是求特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

的根 λ_1，…，λ_n. λ_j 则是特征值，可为实数或复数. 对每个根 λ_j，对 $\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}$ 施行行变换以求方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

的非零解 $\boldsymbol{v}^j$. 向量 $\boldsymbol{v}^j$ 即为特征值 λ_j 对应的特征向量.

2×2 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

的特征方程是

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)-bc = \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc) \\ &= \lambda^2-\tau\lambda+\Delta, \end{aligned}$$

其中，$\tau=a+d=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$是矩阵的迹，而 $\Delta=ad-bc=\det(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 这种情况下的特征方程是极易给出的.

如果特征值不同(即当 $i\neq j$ 时，$\lambda_i\neq\lambda_j$)，则可证明 n 个特征向量 $\boldsymbol{v}^1$，…，$\boldsymbol{v}^n$ 是线性无关的(linearly independent)，即若

$$c_1\boldsymbol{v}^1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}^n=\boldsymbol{0},$$

则所有的 $c_j=0$. 这一性质可表示为矩阵方程

$$(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

的唯一解是 $c_1=\cdots=c_n=0$(即齐次方程只有平凡解). 齐次方程只有平凡解当且仅当

$$\det(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^n)\neq 0.$$

而且，对于任意列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，可求

$$(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^n)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

477

的系数 y_i，因此 $\boldsymbol{x}$ 可表示为特征向量的线性组合，即

$$\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{v}^1+\cdots+y_n\boldsymbol{v}^n.$$

所以任何向量均可表示为 $\boldsymbol{v}^1$，…，$\boldsymbol{v}^n$ 的线性组合，故$\mathbb{R}^n$ 内满足 $\det(\boldsymbol{v}^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}^n)\neq 0$ 的任意 n 个向量为$\mathbb{R}^n$ 的基(basis).

如果 v^j 是特征值 λ_j 对应的特征向量，则 $Av^j=\lambda_j v^j$，且

$$A^2v^j = A(Av^j) = A(\lambda_j v^j)$$
$$= \lambda_j(Av^j) = \lambda_j^2 v^j.$$

类似可得

$$A^3v^j = A(A^2v^j) = A(\lambda_j^2 v^j) = \lambda_j^2(Av^j) = \lambda_j^3 v^j$$

和

$$A^kv^j = A(A^{k-1}v^j) = A(\lambda_j^{k-1}v^j) = \lambda_j^{k-1}(Av^j) = \lambda_j^k v^j.$$

若 $\lambda_j \neq 0$，那么对负幂有

$$\lambda_j v^j = Av^j,$$
$$A^{-1}v^j = \lambda_j^{-1}v^j$$

和

$$A^{-k}v^j = \lambda_j^{-k}v^j.$$

将两者结合起来可知，对所有的整数 k 有

$$A^kv^j = \lambda_j^k v^j.$$

现在考虑特征值的类型．若 $|\lambda_j|<1$，则 $\|A^kv^j\| = |\lambda_j|^k \|v^j\|$ 当 k 趋于无穷时趋于 0，当 k 趋于负无穷时趋于无穷．若 $|\lambda_j|>1$，则 $\|A^kv^j\| = |\lambda_j|^k\|v^j\|$ 当 k 趋于无穷时趋于无穷，当 k 趋于负无穷时趋于 0.

设 $n=2$，且两个实特征值 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 满足 $|\lambda_1|<|\lambda_2|<1$. 令 v^1 和 v^2 为其相对应的特征向量，那么，任意点 x 可表示为这两个特征向量的线性组合：

$$x = y_1v^1 + y_2v^2.$$

则

$$A^kx = y_1A^kv^1 + y_2A^kv^2$$
$$= y_1\lambda_1^kv^1 + y_2\lambda_2^kv^2.$$

取绝对值并利用三角不等式可得

$$\|A^kx\| = \|y_1\lambda_1^kv^1 + y_2\lambda_2^kv^2\|$$
$$\leqslant |y_1|\cdot|\lambda_1|^k\cdot\|v^1\| + |y_2|\cdot|\lambda_2|^k\cdot\|v^2\|,$$

故当 k 趋于无穷时，$\|A^kx\|$ 趋于 0.

如果线性映射所有的特征值为不同实数且绝对值小于 1，则称原点为线性稳定结点(linear stable node)(或者称为稳定结点(stable node))或线性汇(linear sink).

478

例 12.1.2(线性稳定结点) 考虑线性映射

$$L\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

与一般情形一致，原点 $\mathbf{0}$ 是该线性映射的不动点．

特征方程

$$0=\det\begin{bmatrix}\frac{4}{5}-\lambda & 0\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=\left[\frac{4}{5}-\lambda\right]\left[\frac{1}{5}-\lambda\right]$$

的根为 $\lambda=4/5$，$1/5$，它们的绝对值都小于 1.

对于 $\lambda_2=4/5$ 有

$$A-\frac{4}{5}I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}4 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中，～表示行变换，因此，特征向量满足 $4v_1-3v_2=0$，$v_1=\frac{3}{4}v_2$，其有解：

$$\boldsymbol{v}^2=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}.$$

对 $\lambda_1=\frac{1}{5}$，读者可重复上面的过程或仅验证

$$\boldsymbol{v}^1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

是特征向量．因为两个特征值的绝对值都小于 1，k 趋于无穷时，对任意点 $\boldsymbol{x}$ 都有 $A^k\boldsymbol{x}$ 趋于 0，所以 0 是线性映射的吸引不动点．然而，

$$A\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}x_1\\ \frac{4}{5}x_1\end{bmatrix},$$

$$\left\|A\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}\right\|=|x_1|\frac{4\sqrt{2}}{5}>\left\|\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}\right\|.$$

即使高阶迭代最终收敛于 0，$\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}$的第一个迭代却离原点更远了．

如果用 $\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2$ 表示特征向量的线性组合，则

$$A(y_1\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2)=y_1A\boldsymbol{v}^1+y_2A\boldsymbol{v}^2$$
$$=y_1\frac{1}{5}\boldsymbol{v}^1+y_2\frac{4}{5}\boldsymbol{v}^2.$$

479

取 A 的幂可得

$$A^k(y_1\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2)=y_1\left(\frac{1}{5}\right)^k\boldsymbol{v}^1+y_2\left(\frac{4}{5}\right)^k\boldsymbol{v}^2.$$

因为$(1/5)^k$ 比$(4/5)^k$ 更快趋于 0，所以若 $y_2\neq0$，则

$$A^k(y_1\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2)=\left(\frac{4}{5}\right)^k\left[y_1\left(\frac{1}{4}\right)^k\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2\right],$$

即迭代沿特征值 4/5 对应的特征向量的方向趋于原点，而方括号中的部分趋于向量 $y_2\boldsymbol{v}^2$，因此，轨道沿着弱压缩特征方向渐近趋于原点．图 12.1.1 给出了这一映射几个具有代表性轨道的相图．■

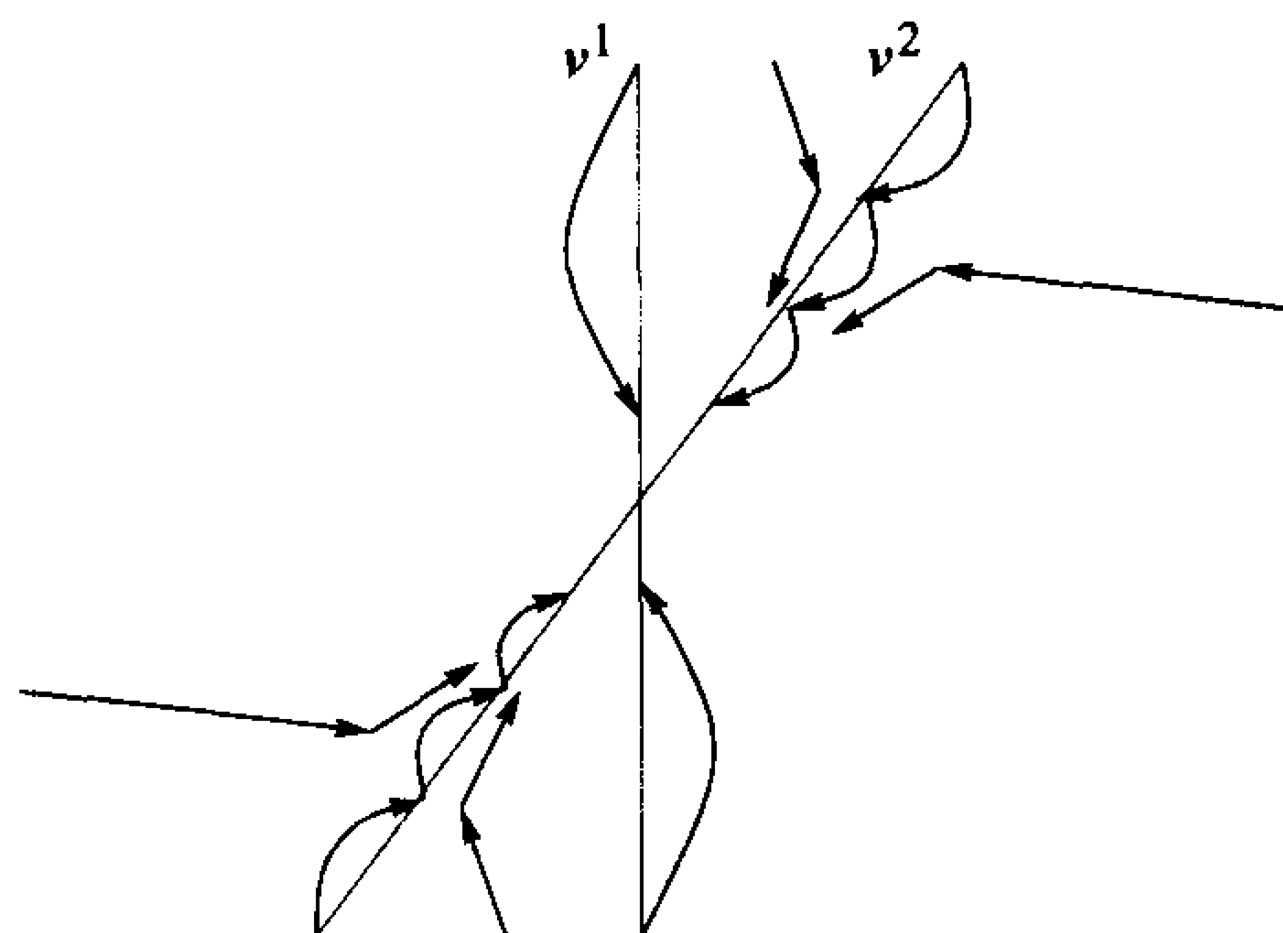


图 12.1.1　线性稳定结点的相图

表 12.1.1 给出了绘制稳定结点相图的一般步骤．

表 12.1.1　绘制稳定结点的相图

设两个不同的特征值 $\lvert\lambda_1\rvert<\lvert\lambda_2\rvert<1$，与它们相对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{v}^1$ 和 $\boldsymbol{v}^2$．
1. 沿两个特征向量 $\boldsymbol{v}^1$ 和 $\boldsymbol{v}^2$ 的方向画两条穿过原点的直线．在四条半直线上用箭头在各种轨道上的点之间标出代表性的轨道．
2. 在特征向量直线间的 4 个区域中，画出一些代表性轨道，它们是始于 $\boldsymbol{v}^1$ 和 $\boldsymbol{v}^2$ 的轨道的线性组合：$A^k(y_1\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2)=y_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}^1+y_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}^2.$
如果 $y_2\neq0$，则当 k 趋于无穷时，轨道沿着渐近于特征向量 $\boldsymbol{v}^2$ 的方向趋于原点，其中，$\boldsymbol{v}^2$ 是与绝对值接近 1 的特征值相对应的特征向量．

480

如果 $n=2$，且两个特征值都是实数而且$\lvert\lambda_1\rvert>\lvert\lambda_2\rvert>1$，那么，当 k 趋于无穷时，点的迭代趋于无穷；当 k 趋于负无穷时，向后迭代趋于原点．此类线性映射的特征值都是彼此不同的实数，且绝对值都大于 1，则称其原点为线性不稳定结点(linear unstable node)．绘制不稳定结点相图的步骤与绘制稳定结点相图的步骤相似，只是当 k 趋于正无穷和负无穷时有明显不同．练习题 12.1.1 中有一个线性不稳定结点的例子．

最后，设 $n=2$，且$\lvert\lambda_1\rvert<1<\lvert\lambda_2\rvert$，这一情形下的原点被称为线性鞍点(linear saddle)．令 $\boldsymbol{v}^1$ 和 $\boldsymbol{v}^2$ 是相应的特征向量．任何点都可写成是这两个特征向量的线性组合 $\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2$，则迭代

$$A^k\boldsymbol{x}=y_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}^1+y_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}^2$$

的第一项趋于 0，第二项趋于无穷(如果 $y_2\neq0$)，因此

$$A^k\boldsymbol{x}-y_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}^2=y_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}^1$$

趋于 0．因此，这些迭代渐近趋于 $\boldsymbol{v}^2$ 生成的直线，向后迭代渐近趋于 $\boldsymbol{v}^1$ 生成的直线：

$$A^{-k}\boldsymbol{x}-y_1\lambda_1^{-k}\boldsymbol{v}^1=y_2\lambda_2^{-k}\boldsymbol{v}^2$$

当 $-k$ 趋于负无穷时趋于 0．如果 y_1 和 y_2 非零，则 k 趋于正或负无穷时 $\lVert A^k\boldsymbol{x}\rVert$ 都趋于无穷．

例 12.1.3(鞍点)　考虑方程

$$L\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

其特征方程

$$0=\lambda^2-\frac{5}{2}\lambda+1$$

的根是 1/2 和 2. 直接计算可知相应的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{v}^2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

图 12.1.2 给出了迭代的相图.

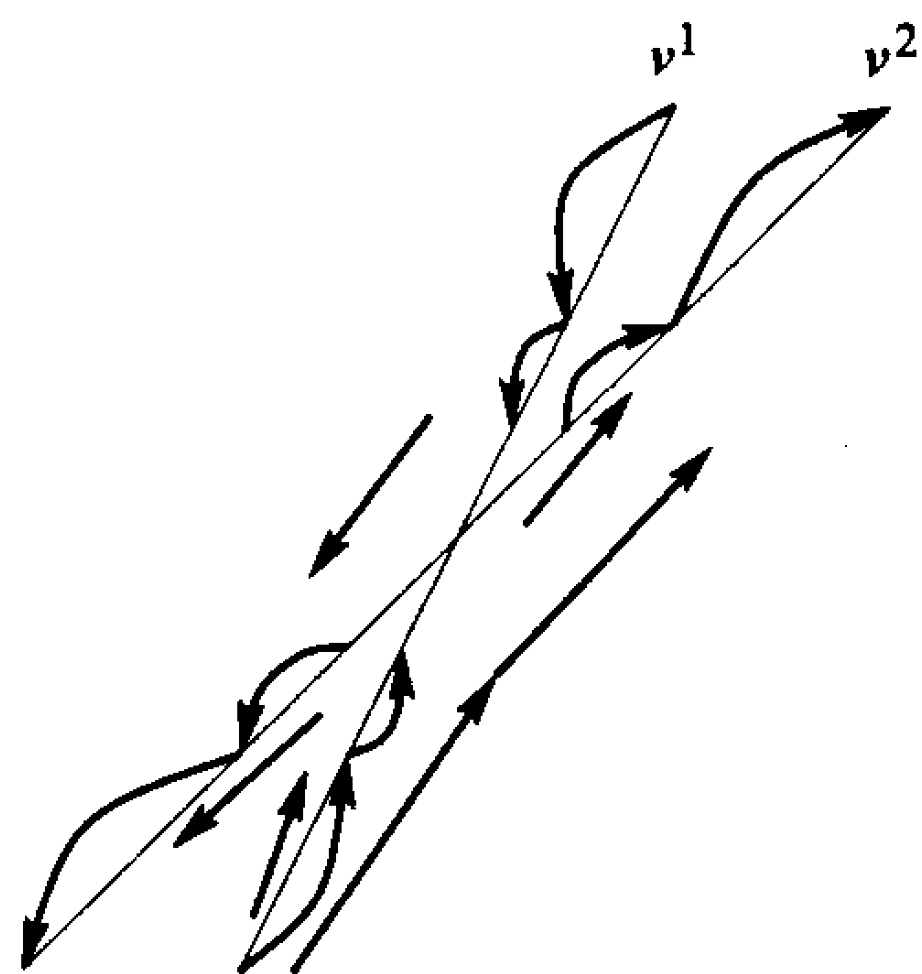


图 12.1.2　线性鞍点的相图

注意到当 k 趋于正无穷时 $\|\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}^1\|$ 趋于零，而当 k 趋于负无穷时 $\|\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}^1\|$ 趋于无穷. 另一方面，$\|\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}^2\|$ 当 k 趋于正无穷时趋于无穷，当 k 趋于负无穷时趋于零. 对于任意满足 $y_1\neq0$ 和 $y_2\neq0$ 的点 $\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{v}^1+y_2\boldsymbol{v}^2$，当 k 趋于正无穷或负无穷时 $\|\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}\|$ 都趋于无穷. ■

表 12.1.2 给出了绘制线性鞍点的相图的一般步骤.

表 12.1.2　绘制线性鞍点的相图

1. 沿着两特征向量的方向画两条穿过原点的直线. 在四条半直线上用箭头在各种轨道上的点之间标出代表性的轨道，沿一条直线的轨道在 k 趋于正无穷时趋于原点，而沿另一条直线的轨道在 k 趋于正无穷时也趋于无穷.
2. 在特征向量直线间的 4 个区域中，画出一些代表性轨道，它们是始于 $\boldsymbol{v}^1$ 和 $\boldsymbol{v}^2$ 的轨道的线性组合.

481

下面的例子给出了负特征值的情形.

例 12.1.4(负特征值)　考虑

$$L\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

它有特征方程

$$0=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda-1,$$

其特征值是 $\lambda=-1/2$，2. 直接计算可知相应的特征向量是

$$\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

其像

$$L\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

是在原点的对侧．二次迭代返回原来的一侧但多了因子$(-1/2)^2=1/4$：

$$L^2\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}.$$

因此，该线性映射在由特征值 $-1/2$ 对应的特征向量生成的直线上是一个反跳．参见图 12.1.3. ■

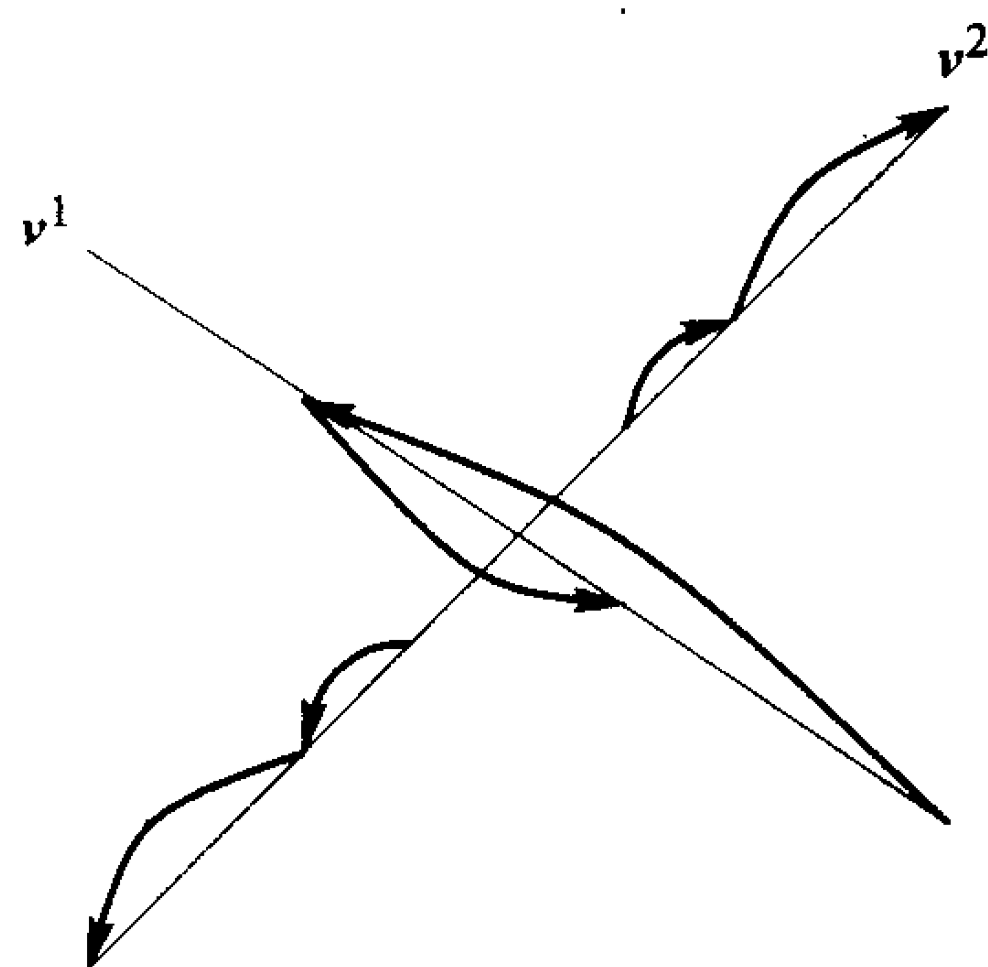


图 12.1.3　反跳线性鞍点的相图

重特征值

如果有一个重特征值，那么独立特征向量并不总是与特征多项式的特征值的重数一样多．当 $n=2$ 时，如果一个重特征值有两个独立的特征向量，则矩阵必为一个对角矩阵，例如：

$$\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}.$$

然而，矩阵

$$\begin{bmatrix}0.5 & 1\\0 & 0.5\end{bmatrix}$$

482

有唯一的独立特征向量 $\boldsymbol{v}=(1,\ 0)^{\mathrm{T}}$．为找到另一个独立解，由线性代数理论可知非齐次方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$$

关于向量 $\boldsymbol{w}$ 有一解，称此解 $\boldsymbol{w}$ 为广义特征向量(见附录 C)．则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}&=\lambda\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v},\\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{w}&=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda(\lambda\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v})+\lambda\boldsymbol{v}\\&=\lambda^2\boldsymbol{w}+2\lambda\boldsymbol{v},\\ \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{w}&=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{w}+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v}\\&=\lambda(\lambda^2\boldsymbol{w}+2\lambda\boldsymbol{v})+\lambda^2\boldsymbol{v}\\&=\lambda^3\boldsymbol{w}+3\lambda^2\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{w}&=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{v}\\&=\lambda(\lambda^{k-1}\boldsymbol{w}+(k-1)\lambda^{k-2}\boldsymbol{v})+\lambda^{k-1}\boldsymbol{v}\\&=\lambda^k\boldsymbol{w}+k\lambda^{k-1}\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

当$|\lambda|<1$ 时，$k\lambda^{k-1}$趋于零，所以这些迭代仍趋于原点．然而，第一次迭代可能变得更长．例

如设

$$A=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix},$$

其中 $0<a<1$，则

483

$$\left\|A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{1+a^2}>1.$$

当 $n=2$ 时，若满足 $|\lambda|<1$ 的多重特征值 λ 只有一个独立特征向量，则称原点为退化稳定结点(degenerate stable node)．如果满足 $|\lambda|>1$ 的多重特征值只有一个独立特征向量，则称原点为退化不稳定结点(degenerate unstable node)．

例 12.1.5(退化稳定结点) 考虑

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

A 有重数为 2 的单个特征值 1/2．为找到特征向量，对 $A-\frac{1}{2}I$ 施行行变换：

$$A-\frac{1}{2}I=\begin{bmatrix}-1&2\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&2\\0&0\end{bmatrix}.$$

因此，需要 $-v_1+2v_2=0$ 和 $v_1=2v_2$．特征向量是

$$v=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

为找到向量 w，对增广矩阵施行行变换：

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1&2&2\\-\frac{1}{2}&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}-1&2&2\\0&0&0\end{array}\right].$$

需 $-w_1+2w_2=2$；一个解是 $w_1=0$ 和 $w_2=1$，或

$$w=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

则

$$Aw=\frac{1}{2}w+v,$$

$$A^2w=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}w+v\right)+\frac{1}{2}v=\frac{1}{2^2}w+\frac{2}{2}v,$$

$$A^3w=\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}w+v\right)+\frac{2}{2^2}v=\frac{1}{2^3}w+\frac{3}{2^2}v$$

和

$$A^4 w = \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2}w + v\right) + \frac{3}{2^3}v = \frac{1}{2^4}w + \frac{4}{2^3}v.$$

w 的前几次迭代离原点更远，但最终趋于原点，其相图见图 12.1.4. 注意到每条轨道沿着特征向量生成直线的方向渐近趋于原点.

484

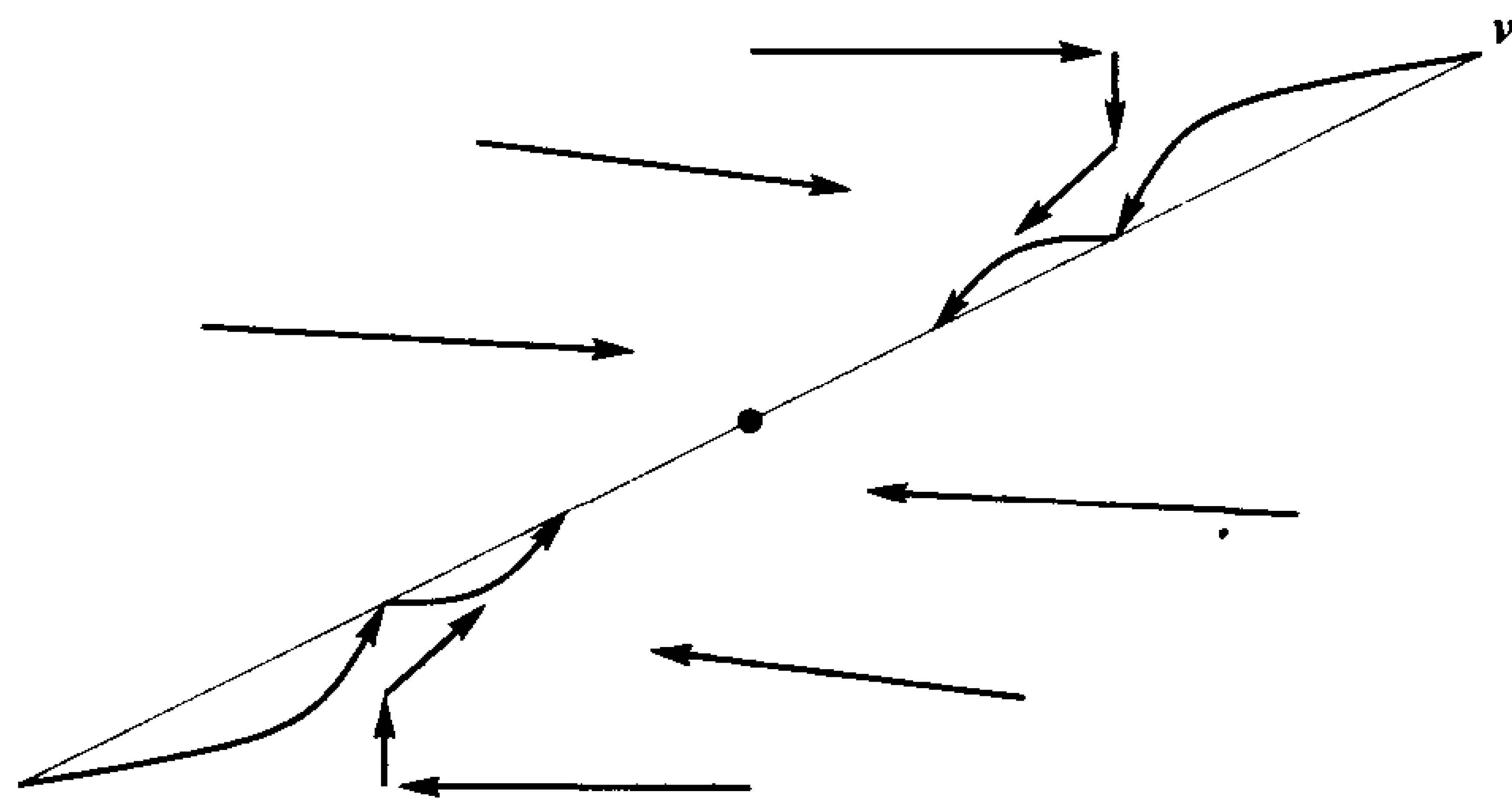


图 12.1.4 退化稳定结点的相图

■

表 12.1.3 给出了绘制两个相等实特征值的相图的一般步骤.

表 12.1.3 绘制两个相等实特征值的相图

这里只考虑稳定的情形，不稳定的情形与之类似，只是当 k 趋于正无穷和负无穷时明显不同. 首先设有两个独立的特征向量(矩阵是对角的).

如果有两个独立特征向量，则所有的解都趋于原点. 该系统的原点被称为*星型稳定的*(stable star). 所有点都沿直线方向趋于原点.

然后设只有一个独立特征向量 v 和另一个广义特征向量 w 满足 $(A-\lambda I)w=v$.

1. 画出沿 v 生成的直线趋于原点的两条轨道，并用箭头将轨道上的点连起来.
2. 然后画出有初始值 w 并趋于原点的轨道，其从原点出发的极限位移向量是向量 v 的倍数(即轨道 $\lambda^k w + k\lambda^{k-1}v$).
3. 画出具初始值 $-w$ 的轨道，它应该是上面轨道的过原点的反射像.

复特征值

当 $n=2$ 时，有一对复特征值的最简单矩阵可表示为

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda|\cos\theta & -|\lambda|\sin\theta \\ |\lambda|\sin\theta & |\lambda|\cos\theta \end{bmatrix} = |\lambda| \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

其中，$|\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$，$a = |\lambda|\cos\theta$ 和 $b = |\lambda|\sin\theta$. 直接验证表明特征值为

$$a \pm ib = |\lambda|(\cos\theta \pm i\sin\theta).$$

矩阵

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

485

对应于旋转角为 θ 的旋转，且标量 $|\lambda|$ 表示扩张或压缩因子．取幂可知

$$A^k = |\lambda|^k R(k\theta)$$

是旋转角为 $k\theta$ 的旋转，且有扩张或压缩因子 $|\lambda|^k$. 如果 $|\lambda|<1$，则映射是一个压缩，原点被称为稳定焦点(stable focus)；如果 $|\lambda|>1$，则该映射是一个扩张，原点被称为不稳定焦点(unstable focus)；若 $|\lambda|=1$，则该映射是一个旋转，原点被称为线性中心(linear center).

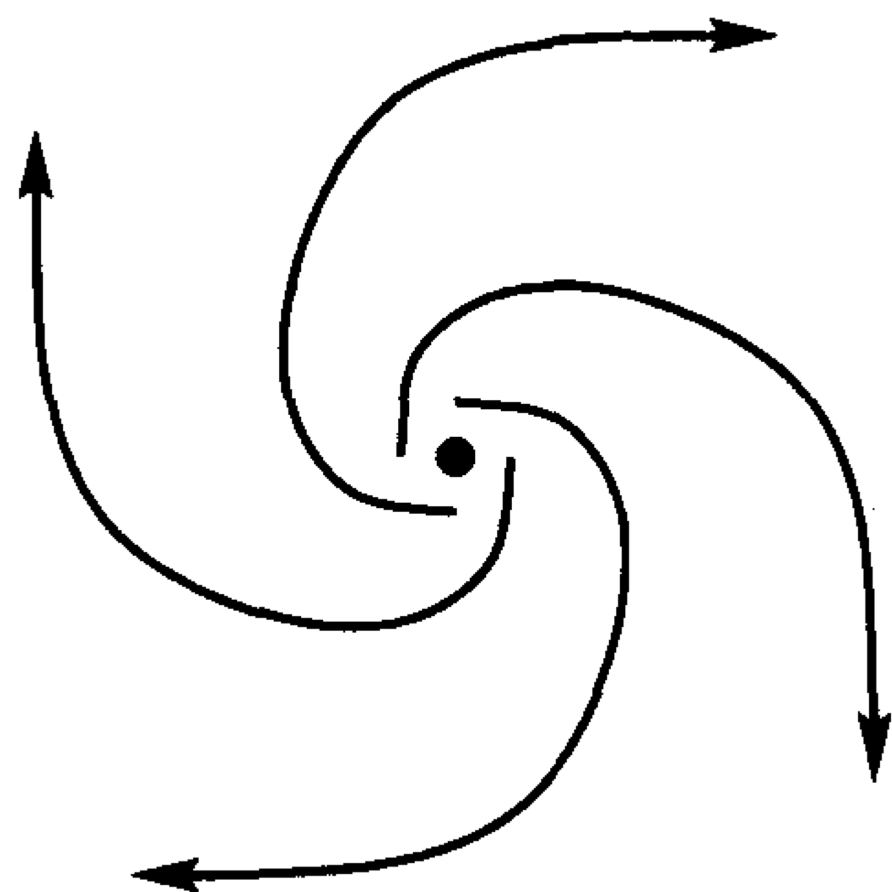


图 12.1.5　线性不稳定焦点的相图

例 12.1.6　令

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

那么特征方程是 $0 = \lambda^2 - 6\lambda + 25$，其特征值是 $\lambda = 3 \pm i4$. 所以 $|\lambda| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 > 1$，即该映射是个扩张．参见图 12.1.5. ■

表 12.1.4 给出了绘制具有一对复特征值的相图的一般步骤.

表 12.1.4　绘制具有一对复特征值的相图

设特征值 $\lambda = |\lambda| e^{\pm i\theta}$，$\theta \neq 0$，$\pi$，所以特征值不是实数.

1. 如果 $|\lambda|=1$，则原点是线性中心，它的每条轨道位于中心在原点的椭圆上．运动方向可以是顺时针的也可以是逆时针方向的，这要视矩阵中的元素而定．为确定方向，只需检验 $(1, 0)^{\mathrm{T}}$（或任意其他向量）的像.
2. 如果 $|\lambda|<1$，则原点是稳定焦点．轨道按顺时针或逆时针方向旋转趋于原点.
3. 如果 $|\lambda|>1$，则原点是不稳定焦点．随迭代次数增加时，轨道按顺时针或逆时针方向绕原点旋转.

486

矩阵的范数

通常希望知道一个线性映射拉伸一个向量的程度：比率 $\|A\boldsymbol{v}\|/\|\boldsymbol{v}\|$ 就是体现这种程度的量，所有非零向量 $\boldsymbol{v}$ 上的最大比率就是向量拉伸的最大值．因为 $\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ 是一个单位向量，而且

$$\frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \left\|A\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right\|,$$

所以

$$\max_{x\neq 0}\left\{\frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}\right\} = \max_{\|\boldsymbol{u}\|=1}\|A\boldsymbol{u}\|.$$

定义矩阵 A 的范数 $\|A\|$ 为

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{u}\|=1}\|A\boldsymbol{u}\|.$$

可见，$\|A\| \geq 0$. 事实上，范数 $\|A\|$ 是对称矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 最大特征值的平方根．见附录 C.

通常，我们并不需要知道范数的确切值，只需知道有这样一个数存在．利用范数，至少可看到一映射的线性部分能确定不动点附近的相图的许多性质.

例 12.1.7　考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

设其重特征值 a 满足 $0<a<1$. 正如下面的论证所显示，$\boldsymbol{A}$ 的幂的范数趋于零．幂为

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}$$

和

$$(\boldsymbol{A}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} a^{2k} & ka^{2k-1} \\ ka^{2k-1} & a^{2k}+k^2a^{2k-2} \end{bmatrix}.$$

该矩阵的特征值是

$$\frac{2a^{2k}+k^2a^{2k-2}\pm\sqrt{4k^2a^{4k-2}+k^4a^{4k-4}}}{2}$$
$$= a^{2k}+a^{2k-2}\frac{k^2}{2}\pm a^{2k-2}\frac{k^2}{2}\sqrt{4a^2/k^2+1}.$$

取正平方根可得到最大特征值．对于足够大的 k，它近似为 $a^{2k}+a^{2k-2}k^2$. 范数 $\|\boldsymbol{A}^k\|$ 是最大特征值的平方根，它近似为 $\sqrt{a^{2k}+a^{2k-2}k^2}$. 当 k 趋于正无穷时，a^{2k}和 $a^{2k-2}k^2$ 都趋于零，所以，范数 $\|A^k\|$ 趋于零，因而，所有点的迭代都收敛于原点．■

12.2　周期点的稳定性和分类

上一节讨论的是各类线性映射的相图．本节将回顾一下对一维映射曾给出的周期点稳定性的一些概念，这里重复叙述是因为这里讨论的是高维映射，希望能把线性映射的定义应用于非线性映射中．当看到这些定义时，读者应该想到上一节所给出的线性映射的部分例题．介绍完定义后，要简要说明用于区分不同稳定类型的线性映射的特征值满足的条件．此外，在高维情形下，鞍不动点是不稳定的但不是排斥的．

487

对于$\mathbb{R}^n$ 内的一点 $\boldsymbol{p}_0$，半径(radius)为 r 的开球(open ball)是集合(没有边界)

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}_0,r) = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_0\| < r\}.$$

有时，人们称其为开圆盘(open disk)，特别是在 $n=2$ 时．

定义 12.2.1　映射 $\boldsymbol{F}$ 的 k 周期点 $\boldsymbol{p}_0$ 是李雅普诺夫稳定的(Lyapunov stable)是指对每个 $r>0$，都存在 $\delta>0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}_0,\ \delta)$，$j\geq0$ 都有 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}_0),\ r)$. 常常将李雅普诺夫稳定的记为 L 稳定的．

例 12.1.2 中的线性稳定结点表明常需取 $\delta<r$. 定理 12.2.5 给出了线性映射是李雅普诺夫稳定的的精确条件．在二维情形下，原点是李雅普诺夫稳定的线性映射包括线性稳定结点、退化稳定结点、线性稳定焦点和线性中心．

定义 12.2.2　映射 $\boldsymbol{F}$ 的 k 周期点 $\boldsymbol{p}_0$ 是不稳定的(unstable)是指它不是李雅普诺夫稳定的.(即存在 $r_0>0$，对 $\forall\delta>0$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}_0,\ \delta)$ 内都存在一点 $\boldsymbol{x}_\delta$ 和一个 $j_\delta\geq0$ 使得

$$\|\boldsymbol{F}^{j_\delta}(\boldsymbol{x}_\delta)-\boldsymbol{F}^{j_\delta}(\boldsymbol{p}_0)\| \geq r_0.)$$

原点是不稳定的线性映射包括线性鞍点、不稳定结点和不稳定焦点．

定义 12.2.3　映射 $\boldsymbol{F}$ 的 k 周期点 $\boldsymbol{p}_0$ 是吸引的(attracting)(或说是渐近稳定的，或称其为周期汇)是指其满足

(i)它是李雅普诺夫稳定的.

(ii) 存在 $\delta_1>0$，使得若 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}_0,\ \delta_1)$，则当 j 趋于无穷时

$$\|\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}_0)\|$$

趋于零.

如果 $\boldsymbol{p}_0$ 是一个周期汇且 $\boldsymbol{x}_0$ 是集合 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}_0,\ \delta_1)$ 内的一点，其中 δ_1 定义如上，则 $\omega(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{F})=\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}^{+}(\boldsymbol{p}_0)$ 是过 $\boldsymbol{p}_0$ 的轨道.

所有特征值的绝对值都小于 1 的线性映射都以原点为吸引不动点，包括线性稳定结点、退化稳定结点和线性稳定焦点. 对于$\mathbb{R}^2$ 上的线性映射，若它有一对复特征值且其绝对值等于 1，则该映射在原点是 L 稳定的但不是吸引的.

定义 12.2.4　映射 $\boldsymbol{F}$ 的 k 周期点 $\boldsymbol{p}_0$ 是排斥的(repelling)(或周期源)是指存在 $r_1>0$，使得若 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}_0$ 且 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}_0,\ r_1)$，则存在 $j=j_x$ 使得

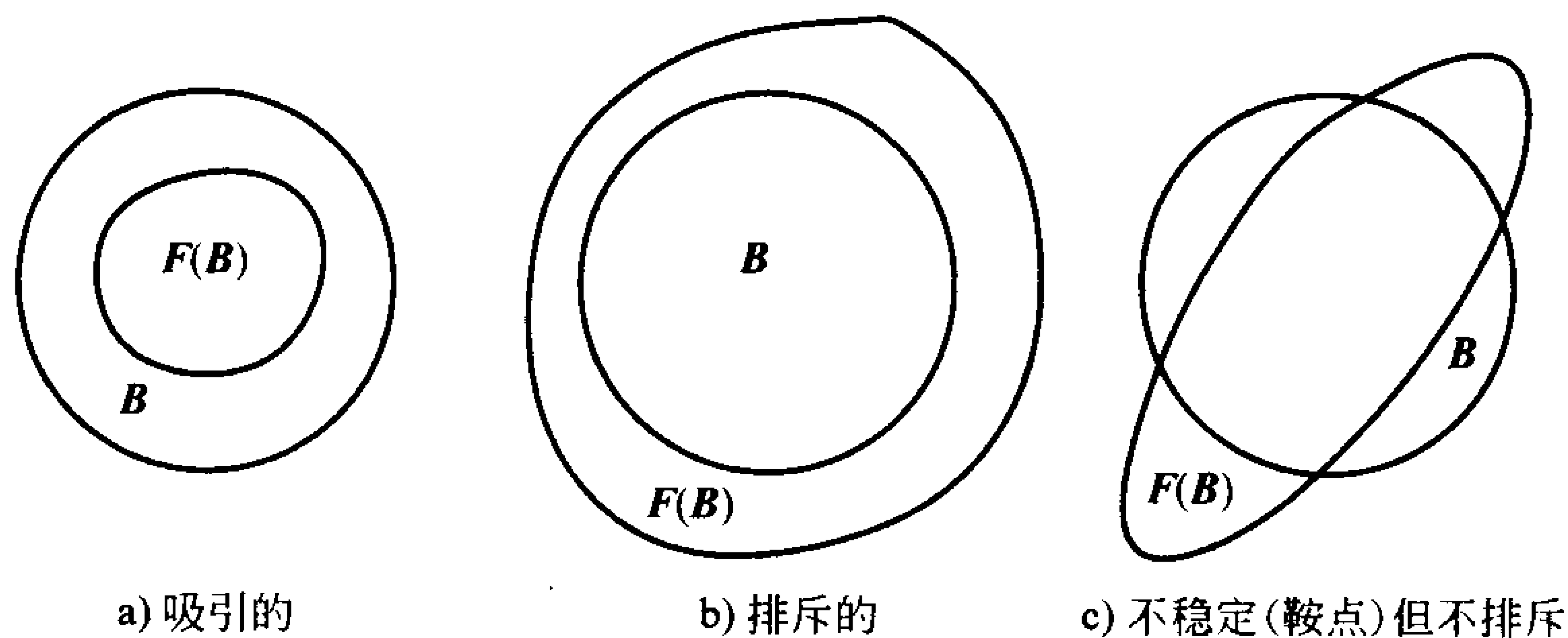
$$\|\boldsymbol{F}^{j_x}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}^{j_x}(\boldsymbol{p}_0)\|\geqslant r_1.$$

在上述排斥周期点的定义中其实应该加上 $\boldsymbol{p}_0$ 对 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 是 L 稳定的这一条件，这需要等到本节末讨论映射的逆时才行.

如果某周期点附近的某些点在迭代下离开，则该周期点就是不稳定的，如果其附近的所有点都离开，周期点就是排斥的. 对所有特征值的绝对值都大于 1 的线性映射来说，原点都是排斥的，这包括线性不稳定结点、退化不稳定结点和不稳定焦点.

488

上述定义见图 12.2.1.



a) 吸引的　　b) 排斥的　　c) 不稳定(鞍点)但不排斥

图 12.2.1

定理 12.2.5　对于线性映射 $\boldsymbol{Ax}$，稳定类型有如下几类：

(a) 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ_j 的绝对值都小于 1，则原点是吸引的.

(b) 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ_j 的绝对值都小于等于 1，且绝对值等于 1 的所有特征值都是一重的；则原点是 L 稳定的.

(c) 若 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 λ_{j_0} 的绝对值大于 1，则原点是不稳定的.

(d) 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ_j 的绝对值都大于 1，则原点是排斥的.

例 12.2.6　考虑一映射，其不动点满足吸引不动点 12.2.3 定义的条件(ii)，但不满足条件(i). 假设映射在极坐标下可表示为

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{r+1}{2} \\ \theta^2(2\pi-\theta)^2 \pmod{2\pi} \end{bmatrix},$$

则

$$F\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

是一个不动点．因为当 $0<\theta<2\pi$ 时 $\theta^2(2\pi-\theta)^2>0$，而且轨道绕 $r=1$ 旋转，所以 $r=1$ 上每点都满足 $\omega(1,\ \theta_0)=(1,\ 0)$．同理，对于 $(r_0,\ \theta_0)$ 的迭代，r_j 趋于 1，所以 $\omega(r_0,\ \theta_0)=(1,\ 0)$．因此，该不动点满足渐近稳定定义的条件(ii)．然而它不是 L 稳定的，因为具有很小的 $\theta_0>0$ 的点在迭代下在返回 $\theta=2\pi$ 附近之前一定经过 $\theta=\pi$ 附近，而 $\theta=2\pi$ 与 $\theta_0=0$ 相等．参见图 12.2.2. ■

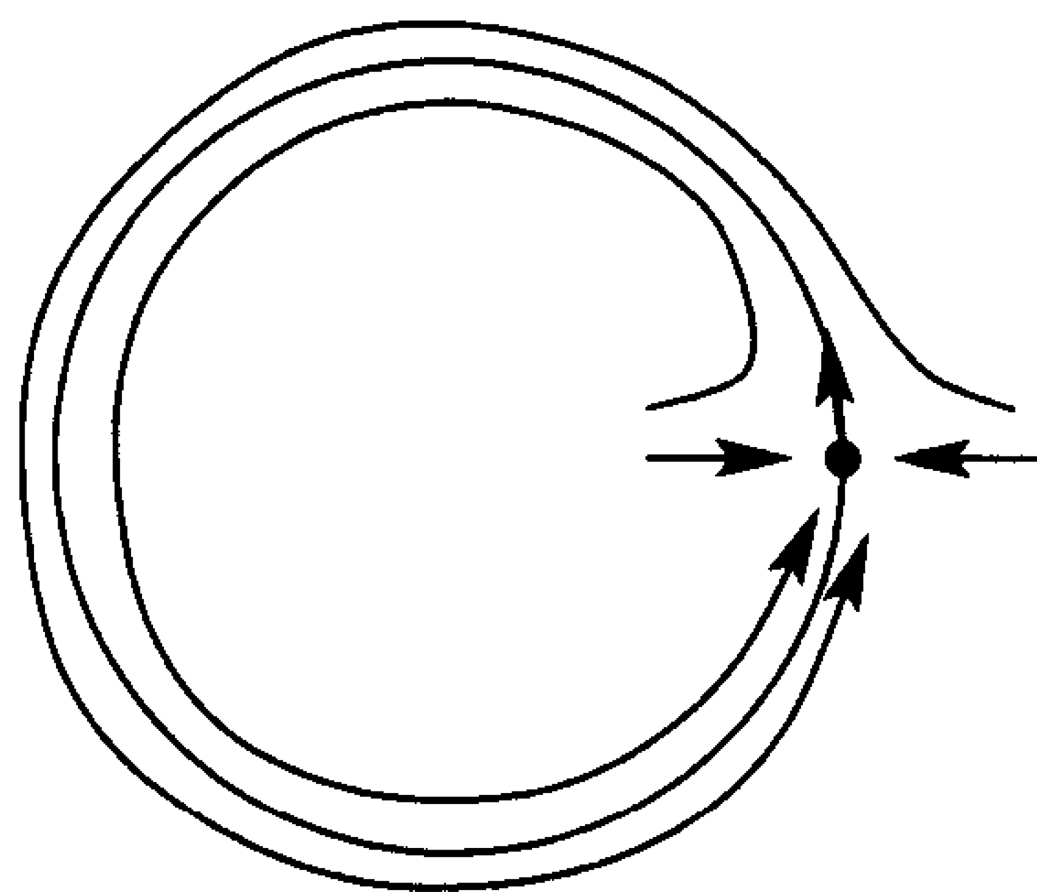


图 12.2.2　例 12.2.6 不稳定不动点图

对于非线性映射，可用偏导数矩阵来确定周期点的线性化稳定性(linearized stability)．后面的定理 12.2.9 给出非线性化映射在周期点处与线性化映射有相同的稳定类型的条件．

定义 12.2.7　令 F 是从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的一个非线性映射，其坐标函数是 F_i，在 p 点的偏导数矩阵(matrix of partial derivatives)或导数(derivative)是 $n\times n$ 阶矩阵：

$$DF_{(p)}=\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(p)\end{bmatrix}.$$

行数是由坐标函数个数来确定的，而列数是由计算偏导数的变量维数来确定的．

489

由附录 A 给出的多变量泰勒展开式可知

$$F(x)=F(p)+DF_{(p)}(x-p)+O(\|x-p\|^2),$$

其中，$|O(\|x-p\|^2)|\leqslant C\|x-p\|^2$，$C>0$ 为一常数．当位移小时，$O(\|x-p\|^2)$ 比 $DF_{(p)}(x-p)$ 更小，这就表明在不动点附近线性项起决定性作用的原因．

对于 p_0 的迭代，如果令 $p_j=F^j(p_0)$，对矩阵应用偏导数的链式法则可知

$$D(F^k)_{(p_0)}=DF_{(p_{k-1})}DF_{(p_{k-2})}\cdots DF_{(p_1)}DF_{(p_0)},$$

它是矩阵的乘积．对于一个变量的情形，导数相乘的顺序无关紧要，但对高维情形，导数相乘的顺序就起作用：最右边的矩阵在初始点处取值，而且它第一个作用于向量；最左边的矩阵在终点 p_{k-1}处取值，而且它最后一个作用于向量．

例如，考虑映射

$$F\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y^2\\x\end{bmatrix}.$$

其导数为

$$DF_{(x,y)}=\begin{bmatrix}1 & 2y\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

若 $p_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $p_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$，而且

$$D(F^2)_{(2,1)} = DF_{(3,2)} DF_{(2,1)}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

490

常需要假设映射有高阶偏导数，为此给出下面的定义．

定义 12.2.8 对整数 $r \geq 1$，从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的映射 $F(x)$ 被称为是 C^r 的，如果 F 是连续的，而且直到 r 阶的偏导数存在且连续，也就是说，对所有满足 $i_j \geq 0$ 和 $k = i_1 + \cdots + i_n \leq r$ 的 $(i_1, \cdots, i_n)$，

$$\frac{\partial^k F}{\partial^{i_1} x_1 \cdots \partial^{i_n} x_n}(x)$$

都存在，这些偏导数作为 x 的函数都连续．如果各阶偏导数都存在(即对所有的 r，F 都是 C^r 的)，则称 F 为 C^∞ 的．

下面的定理将给出非线性映射周期点的稳定性．

定理 12.2.9 设 F 是从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的 C^2 映射．设 p_0 是 k-周期点．令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $D(F^k)_{(p_0)}$ 的特征值．

(a) 如果 $D(F^k)_{(p_0)}$ 的所有特征值 λ_j 的绝对值都小于 1，则周期轨 $\mathcal{O}_F^+(p_0)$ 是吸引的．

(b) 如果 $D(F^k)_{(p_0)}$ 有绝对值大于 1 的特征值 λ_{j_0}，则周期轨 $\mathcal{O}_F^+(p_0)$ 是不稳定的．

(c) 如果 $D(F^k)_{(p_0)}$ 的所有特征值 λ_j 的绝对值都大于 1，则周期轨 $\mathcal{O}_F^+(p_0)$ 是排斥的．

注 12.2.10 如果 $D(F^k)_{(p_0)}$ 的所有特征值 λ_j 都满足 $|\lambda_j| \leq 1$，至少有一个特征值满足 $|\lambda_{j_0}| = 1$，且满足 $|\lambda_j| = 1$ 的特征值都是一重的，则周期点可能是吸引的、L 稳定的或是不稳定的，此时线性项不足以确定稳定类型．

定义 12.2.11 称 k-周期点 p_0 为双曲的(hyperbolic)如果 $D(F^k)_{(p_0)}$ 的每一个特征值 λ_j 都满足 $|\lambda_j| \neq 1$.

双曲 k-周期点 p_0 为鞍点(saddle)是指对于某个 j_1 和 j_2 有 $|\lambda_{j_1}| < 1$，$|\lambda_{j_2}| > 1$(即既有吸引方向也有排斥方向).

下面给出非线性映射不动点和周期点的一些例题．

例 12.2.12 考虑映射

$$F(x,y) = (y, a\sin(x) - y).$$

其偏导数矩阵为

$$DF_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\cos(x) & -1 \end{bmatrix}.$$

不动点满足

$$x = y$$

和

$$y = a\sin(x) - y.$$

用 x 代替 y，第二个方程可化为

$$2x = a\sin(x)$$

或

$$\sin(x) = \frac{2x}{a}.$$

总存在不动点 $x=y=0$. 当 $0<a<2$ 时，$2x/a$ 的斜率大于 1，它是唯一的不动点．当 $a>2$ 时，$2x/a$ 的斜率小于 1，至少还有一个满足 $0<x_a<\pi$ 的不动点 (x_a, x_a).

在原点处，

$$DF_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix},$$

491

它有特征方程 $\lambda^2+\lambda-a=0$ 和特征值

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

我们考虑特征值为实数或复数时参数 a 的各种范围．

当 $a<-1/4$ 时，特征值不为实数，且

$$|\lambda_{\pm}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{-4a-1}{4}} = \sqrt{-a} = \sqrt{|a|}.$$

因此，当 $a<-1$ 时，特征值是复数，原点为排斥不动点；当 $-1<a<-1/4$ 时，特征值是复数，原点为吸引不动点．

当 $a \geqslant -1/4$ 时，特征值是实数．对于 $a=0$，$\lambda_-=-1$，所以当 $-1/4 \leqslant a<0$ 时，$-1<\lambda_- \leqslant -1/2$，$-1/2 \leqslant \lambda_+<0$，因此原点是吸引的．当 $a=2$ 时，特征值 $\lambda_+=1$，所以当 $0<a<2$ 时，$\lambda_-<-1$，$0<\lambda_+<1$，因此原点是鞍点．最后，当 $2<a$ 时 $\lambda_-<-2$，$1<\lambda_+$，因此原点是排斥的.

总结原点的稳定性可得如下性质：

当 $a<-1$ 时，　特征值为复数，原点为源

当 $-1<a<-\frac{1}{4}$ 时，　特征值为复数，原点为汇

当 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时，　特征值为实数，原点为汇

当 $0<a<2$ 时，　特征值为实数，原点为鞍点

当 $2<a$ 时，　特征值为实数，原点为源．

当 $a>2$ 时考虑不动点 (x_a, x_a)，偏导数矩阵是

$$DF_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\cos(x_a) & -1 \end{bmatrix}.$$

它有特征方程 $\lambda^2+\lambda-a\cos(x_a)=0$ 和特征值

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a\cos(x_a)}}{2}.$$

当 $\cos(x_a)=0$，$x_a=\pi/2$，$a\sin(\pi/2)=\pi$ 或 $a=\pi$ 时，$\lambda_-=-1$. 对于参数值 $a=\pi$ 有 $\lambda_-=-1$，$\lambda_+=0$. 当 $2<a<\pi$ 时 $0<x_a<\pi/2$. 因为 $\cos(x_a)>0$，所以 $\lambda_-<-1$，$\lambda_+>0$，对于这一参数范围欲得 $\lambda_+<1$ 或 $\sqrt{1+4a\cos(x_a)}<3$，需要

$$3>\sqrt{1+4a\cos(x_a)},$$

$$\cos(x_a)<\frac{2}{a}=\frac{\sin(x_a)}{x_a},$$

或

$$x_a<\tan(x_a).$$

最后一个不等式在 $0<x_a<\pi/2$ 时成立，所以此时前几个不等式成立．因此，$2<a<\pi$ 时，$0<\lambda_+<1$，且 (x_a, x_a) 是鞍点．特别地，对于 $a=3$，$x_3\approx1.50$，$\lambda_-\approx-1.189$，$\lambda_+\approx0.189$.

当 $a>\pi$ 时，特征值可能是实的，也可能是复的．因为 x_a 是 a 的递增函数，所以存在分支值 a_2 使得当 $\pi<a\leqslant a_2$ 时特征值是实的，当 $a_2<a$ 时特征值是复的．当 $\pi<a\leqslant a_2$ 时，特征值是实的，且 $\cos(x_a)<0$，所以，$0\leqslant\sqrt{1+4a\cos(x_a)}<1$ 且 $-1<\lambda_-\leqslant\lambda_+<0$，因此 (x_a, x_a) 是一个汇．

492

当 $a_2<a$ 时，

$$\begin{aligned}|\lambda_\pm| &= \frac{\sqrt{1-(1+4a\cos(x_a))}}{2}\\ &= \sqrt{a|\cos(x_a)|}=\sqrt{a}(1-\sin^2(x_a))^{1/2}\\ &= \sqrt{a}\left(1-\frac{4x_a^2}{a^2}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

当 a 趋于无穷时 $|\lambda_\pm|$ 趋于无穷．因此，对于足够大的 a，此不动点是源，而且存在分支值 a_3 使得当 $a_2<a<a_3$ 时 $|\lambda_\pm|<1$；当 $a_3<a$ 时，$|\lambda_\pm|>1$.

下面的列表总结了不动点 (x_a, x_a) 的稳定性：

当 $2<a<\pi$ 时，　有实特征值，(x_a, x_a) 为鞍点

当 $\pi<a\leqslant a_2$ 时，　有实特征值，(x_a, x_a) 为汇

当 $a_2<a<a_3$ 时，　有复特征值，(x_a, x_a) 为汇

当 $a_3<a$ 时，　有复特征值，(x_a, x_a) 为源．

当参数值足够大时会出现满足 $x>\pi$ 的不动点，此处不做考虑．■

Hénon 映射

M. Hénon 曾引入以其名字命名的映射，它是含有一个特殊二次项，且可在电脑上进行迭代的例子．这种映射也例证了不动点和 2-周期点的稳定性思想，它与 Logistic 映射存在相似之处．

Hénon 映射由下式给出

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(a-x^2-by,x).$$

常数 a 和 b 是参数．有些作者，包括 Hénon 本人在内，采用这一映射的不同表达式，而且参数 b 的符号与此式中的相反．

Hénon 映射的不动点

不动点满足

$$(a - x^2 - by, x) = (x, y)$$

或

$$y = x \quad 和 \quad x = a - x^2 - by.$$

用 x 代替 y，可得如下方程

$$0 = x^2 + (b + 1)x - a$$

的根

$$x_{\pm} = \frac{-(b+1) \pm \sqrt{(1+b)^2 + 4a}}{2}.$$

因此，两个不动点为

$$(x_+, x_+) \quad 和 \quad (x_-, x_-).$$

若

$$(1 + b)^2 + 4a \geqslant 0,$$

则不动点是实的．

493

对于一般的参数值，偏导数矩阵是

$$DF_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

行列式 $\det(DF_{(x,y)}) = b$ 是面积因子的变化．若 b 是负数，则该映射在一个方向成反射，且为反转定向．(在原论文中，$b<0$ 对应于保持定向，而 $b>0$ 对应于反转定向．)

例如，如果 $a=0$，$b=-0.3$，则

$$x_{\pm} = \frac{-0.7 \pm \sqrt{(0.7)^2}}{2} = 0, -0.7,$$

而且两个不动点是

$$(0,0)$$

和

$$(-0.7, -0.7).$$

对 $a=0$，$b=-0.3$，在不动点(0，0)处，

$$DF_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其特征方程

$$0 = \lambda^2 - 0.3$$

的特征值 $\lambda = \pm\sqrt{0.3} \approx \pm 0.5477$．因为两个特征值都满足 $|\lambda| = \sqrt{0.3} < 1$，所以不动点(0，0)是吸引的．

在另一不动点(−0.7，−0.7)处，

$$DF_{(-0.7,-0.7)} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其特征方程

$$0 = \lambda^2 - 1.4\lambda - 0.3$$

的特征值

$$\lambda = \frac{1.4 \pm \sqrt{(1.4)^2 + 1.2}}{2}$$

$$= \frac{1.4 \pm \sqrt{3.16}}{2}$$

$$\approx 1.5888, -0.1888.$$

因为$|-0.1888| < 1$ 且$|1.5888| > 1$，所以不动点$(-0.7, -0.7)$是鞍点，且是不稳定的，但不是排斥的．

Hénon 映射的 2-周期点

2-周期点满足

$$(x_1, y_1) = \boldsymbol{F}(x_0, y_0) = (a - x_0^2 - by_0, x_0)$$

和

$$(x_0, y_0) = \boldsymbol{F}(x_1, y_1) = (a - x_1^2 - by_1, x_1).$$

所以 $y_1 = x_0$，$y_0 = x_1$，

494

$$x_0 = a - x_1^2 - by_1 = a - y_0^2 - bx_0$$

$$0 = y_0^2 + (1 + b)x_0 - a$$

和

$$x_1 = a - x_0^2 - by_0 = a - y_1^2 - bx_1$$

$$0 = y_1^2 + (1 + b)x_1 - a.$$

可证 2-周期轨道上的点满足（留作练习题）

$$x_j + y_j = 1 + b.$$

将 $x_0 = 1 + b - y_0$ 代入方程 $0 = y_0^2 + (1 + b)x_0 - a$ 可得

$$0 = y_0^2 - (1 + b)y_0 + (1 + b)^2 - a.$$

为使方程的根有一个简单的表达式，取参数值 $b = -0.3$ 和 $a = 0.57$. 此时，两个不动点都是鞍点，证明留给读者自己．求 2-周期点，y_0 满足

$$0 = y_0^2 - (0.7)y_0 + (0.7)^2 - 0.57$$

$$= y_0^2 - 0.7y_0 - 0.08,$$

其根为 $y_0 = 0.8$，-0.1. 因此，2-周期轨道是

$$\left\{\begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.8 \end{pmatrix}\right\},$$

满足

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

和

$$F\begin{bmatrix}-0.1\\0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8\\-0.1\end{bmatrix}.$$

偏导数矩阵是

$$\begin{aligned}DF^2_{(0.8,-0.1)}&=DF_{(-0.1,0.8)}DF_{(0.8,-0.1)}\\&=\begin{bmatrix}0.2&0.3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.6&0.3\\1&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-0.02&0.06\\-1.6&0.3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

特征方程

$$0=\lambda^2-0.28\lambda+0.09$$

的特征值为

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{0.28\pm\sqrt{(0.28)^2-0.36}}{2}\\&=0.14\pm i\sqrt{0.0704}\\&\approx 0.14\pm i0.2653.\end{aligned}$$

特征值的绝对值满足

$$\begin{aligned}|\lambda|&=\sqrt{(0.14)^2+0.0704}\\&=\sqrt{0.09}=0.3<1.\end{aligned}$$

因此，2-周期轨道是吸引的．

495

逆和 α 极限集

11.1 节给出了 ω 极限集的定义．如果映射有逆，就可能有向后迭代的轨道，由此可给出 α 极限集的定义．在对一维映射和线性映射定义共轭时已出现过逆．然而，为了牢固认识多变量非线性映射逆的概念，首先从定义函数的逆并计算 Hénon 映射的逆开始．

称映射 F 是一对一的，如果当 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2)$ 时必有 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$. 对直线上的一个连续函数来说，这等于说此函数是单调的，处处单调递增或处处单调递减．

对一个一对一函数，可在其像集上定义逆函数．函数 $\boldsymbol{F}$ 的像(image)是的所有函数值 $\boldsymbol{y}$ 的集合，对这样的值，存在 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$，即

$$\text{image}(\boldsymbol{F})=\{\boldsymbol{y}:\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\text{ 属于 }\boldsymbol{F}\text{ 的定义域}\}.$$

称从 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{Y}$ 的映射 $\boldsymbol{F}$ 为满的，如果 image$(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{Y}$. 有时为强调映像，常说 $\boldsymbol{F}$ 是映满 $\boldsymbol{Y}$ 的．

假设 $\boldsymbol{F}$ 是从空间 $\boldsymbol{X}$ 到空间 $\boldsymbol{Y}$ 的一对一映射，其像为 $\boldsymbol{J}$，那么按下法可定义从 $\boldsymbol{J}$ 映满 $\boldsymbol{X}$ 上的逆(inverse)$\boldsymbol{F}^{-1}$：$\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}_0$ 当且仅当 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_1$. 复合映射 $\boldsymbol{F}^{-1}\circ\boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的恒等映射，而 $\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{F}^{-1}$ 则是 $\boldsymbol{J}$ 上的恒等映射．

定义 12.2.13　令 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$(或度量空间)内的两个开集．称从 U 到 V 的映射 $\boldsymbol{h}$ 是一同胚(homeomorphism)如果(i)$\boldsymbol{h}$ 是连续的，(ii)$\boldsymbol{h}$ 在 U 上是一对一的，(iii)$\boldsymbol{h}$ 在 V 上是满的，即

$h(U)=V$，(iv) h 的逆 h^{-1} 是从 V 到 U 的连续映射．

定义 12.2.14　令 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 内的两个开集．对 $r\geqslant 1$ 的整数，若 F 是从 U 到 V 的同胚且 F 和它的逆 F^{-1} 都是 C^r 的，则称 F 为从 U 到 V 的 C^r 微分同胚(diffeomorphism).

对一个微分同胚而言，在所有点 x 都 $\det(DF_{(x)})\neq 0$ 成立且

$$D(F^{-1})_{(y)}=(DF_{(x)})^{-1},$$

其中 $y=F(x)$.

例 12.2.15　计算 Hénon 映射的逆．如果

$$(x_1,y_1)=F(x_0,y_0)=(a-x_0^2-by_0,x_0),$$

则

$$x_1=a-x_0^2-by_0$$
$$y_1=x_0.$$

用 y_1 代替 x_0，并求 y_0 得

$$x_1=a-y_1^2-by_0$$
$$by_0=a-y_1^2-x_1$$
$$y_0=\frac{a-y_1^2-x_1}{b}.$$

因此，可用 x_1 和 y_1 来表示 x_0 和 y_0，而且逆可表示为

$$(x_0,y_0)=F^{-1}(x_1,y_1)=\left(y_1,\frac{a-y_1^2-x_1}{b}\right).$$

496　因为该映射和它的逆都有各阶连续偏导数，所以 Hénon 映射是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的 C^∞ 微分同胚．■

定义 12.2.16　如果映射 F 有逆，则把点 x_0 的所有迭代集称为 x_0 的轨道(orbit)，表示为

$$\mathcal{O}_F(x_0)=\{F^j(x_0):-\infty<j<\infty\}.$$

定义 12.2.17　令 F 是空间 X 上的映射，并令 x_0 是 X 内的一个初始值．设 F 有逆 F^{-1}. 称点 q 是映射点 x_0 关于 F 的 α 极限点(limit point)，如果存在趋于负无穷的迭代序列 $-k_j$ 使得 $F^{-k_j}(x_0)$ 收敛于 q. 也就是说，x_0 的轨道在向后迭代时越来越靠近 q. 更准确的表述是，$\forall N>0$ 和 $\forall\varepsilon>0$ 时，存在 $k\geqslant N$ 使得

$$\|F^{-k}(x_0)-q\|<\varepsilon.$$

点 x_0 关于映射 F 的 α 极限集是点 x_0 关于 F 的所有 α 极限点的集合：

$$\alpha(x_0;\ F)=\{q:\ q\text{ 是点 }x_0\text{ 关于 }F\text{ 的 }\alpha\text{ 极限点}\}.$$

排斥周期点的概念可以用映射的逆来表述．$\mathbb{R}^n$ 上一个同胚 F 的 k-周期点 p_0 是排斥的，如果它关于 F^{-1} 是吸引的，即满足下列条件：

(i) 对任意 $r>0$，存在 $\delta>0$ 使得对所有的 $j\geqslant 0$（因此 $-j\leqslant 0$）有

$$F^{-j}(B(p_0,\delta))\subset B(F^{-j}(p_0),r).$$

(ii) 存在 $r_1>0$ 使得当 $x_0\in B(p_0,\ r_1)$ 时，$\alpha(x_0;\ F)=\mathcal{O}_F(p_0)$.

由条件(i)和前面的定义可推出条件(ii)，虽然这一点并不很明显．

12.3　稳定流形

以原点为鞍点的线性映射有压缩和扩张方向．如果非线性映射有一不动点，使该点是其偏导数矩阵的鞍点，则有过该点的曲线(或曲面)，使该非线性映射在这些曲线上的点处有与不动点相似的动力学行为．

对于有一鞍不动点的二维非线性映射，则存在一条曲线，称之为*稳定流形*(stable manifold)，它在前行迭代下收敛于不动点．还存在另一条曲线，称之为*不稳定流形*(unstable manifold)，它在向后迭代下收敛于不动点．这些曲线将在一侧经过不动点的一些点与在另一侧经过不动点的另一些点区分开，因此，在二维情况下他们也称为*分界线*(separatrix)．

有不少理由说明这些稳定和不稳定流形是很重要的．鞍不动点的稳定流形可以构成一吸引不动点的吸引子域边界，如 12.3.2 节所例证的．在 13.3 节中将解释不动点的稳定流形与不稳定流形的交集如何推得一不变集的存在性，使得映射在此集合上有复杂的动力学行为．

在高维情形下，这些曲线由曲面或更高维"稳定流形"取而代之．在数学上，术语*流形*指的是曲线、曲面和高维对象．("流形"习惯上是指多次或有多个开口之物．)附录 B 对这一术语进行了进一步讨论．

497

如果原点是平面上线性映射的鞍不动点，则线性映射在过原点的一条直线上是压缩的，在另一条直线上则是扩张的．例如，对于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

当 $k\geqslant 0$ 时，有映射值

$$\boldsymbol{A}^{k}\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{A}^{k}\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}=2^{k}\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{A}^{-k}\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}=2^{-k}\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}$$

位于 $\lambda=1/2$ 的特征空间上的点是所有这样点 $\boldsymbol{x}$ 的集合，使得当 k 趋于无穷时 $\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{x}$ 趋于0，称这些点的集合为*原点的稳定流形*，表示为

$$W^{s}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}:\ \text{当}\ k\ \text{趋于无穷时，}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{x}\ \text{趋于}\ \boldsymbol{0}\}=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}\right\}.$$

位于 $\lambda=2$ 的特征空间上的点是所有满足当 k 趋于负无穷时 $\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{0}$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 的集合，称这一

集合为原点的不稳定流形，表示为

$$W^u(\mathbf{0},\ \boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}:\ \text{当 } k \text{ 趋于负无穷时，} \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} \text{ 趋于 } \mathbf{0}\}=\left\{\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}\right\}.$$

考虑$\mathbb{R}^2$内有不动点$\boldsymbol{p}$的非线性映射$\boldsymbol{F}$，使得其线性化映射$\boldsymbol{A}=D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p})}$以原点为鞍点．本节的主要定理指出存在与直线$\boldsymbol{p}+W^s(\mathbf{0},\ \boldsymbol{A})$和$\boldsymbol{p}+W^u(\mathbf{0},\ \boldsymbol{A})$相切的不变曲线，它们由当$k$趋于正无穷或负无穷时迭代$\boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{x})$趋于$\boldsymbol{p}$的点组成．这两条不变曲线(见图12.3.1)可分别表示为

$$W^s(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{F})=\{\boldsymbol{x}:\ \text{当 } k \text{ 趋于无穷时，} \|\boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\| \text{ 趋于 } 0\}$$

$$W^u(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{F})=\{\boldsymbol{x}:\ \text{当 } k \text{ 趋于负无穷时，} \|\boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\| \text{ 趋于 } 0\}.$$

首先来看一个可以精确求出这些曲线的例子．

例 12.3.1　考虑映射

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x\\ 2y+x^2\end{bmatrix},$$

其在原点有不动点，导数矩阵

$$D\boldsymbol{F}_{(\mathbf{0})}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

该映射保持y轴不变，并在其上是一个扩张，使有

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2y\end{bmatrix}.$$

498

因而，点在逆映射之下的迭代

$$\boldsymbol{F}^{-k}\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2^{-k}y\end{bmatrix}$$

收敛于不动点(原点)，所以不动点的不稳定流形是y轴：

$$W^u(\mathbf{0},\boldsymbol{F})=\{(0,y)^{\mathrm{T}}\}.$$

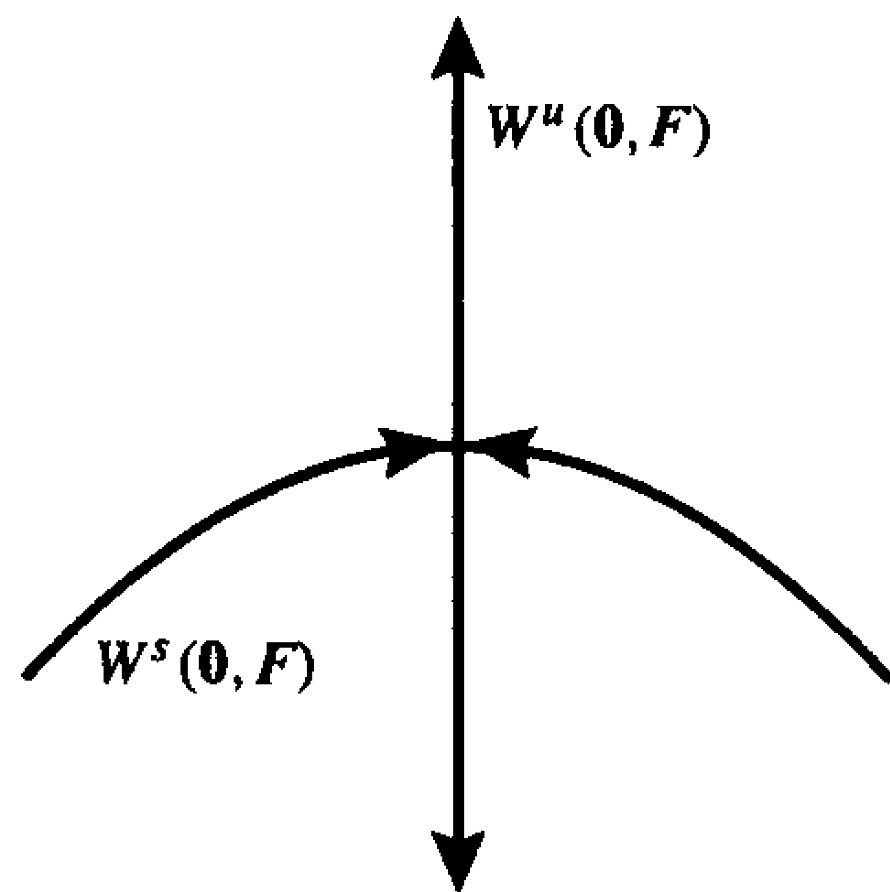


图 12.3.1　例 12.3.1 的稳定和不稳定流形

稳定流形是不易找到的．设它是某函数$y=\psi(x)$的图．因为该曲线过原点，所以$\psi(0)=0$；又因为该曲线与特征方向$(1,\ 0)^{\mathrm{T}}$相切，所以$\psi'(0)=0$. 于是ψ可以表示为没有常数项和线性项的幂级数

$$y=\psi(x)=a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

因此，其迭代为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \sum_{j=2}^{\infty}a_jx_1^j\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}x\\ \sum_{j=2}^{\infty}a_jx^j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x\\ x^2+\sum_{j=2}^{\infty}2a_jx^j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x\\ (2a_2+1)x^2+\sum_{j=3}^{\infty}2a_jx^j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1\\ 4(2a_2+1)x_1^2+\sum_{j=3}^{\infty}2^{j+1}a_jx_1^j\end{bmatrix},$$

其中已用到 $2x_1=x$. 令等式两端 x_1^2 的系数相等，即 $a_2=4(2a_2+1)$，因此 $-4=7a_2$，即 $a_2=-4/7$. 令$j>2$ 时 x_1^j 的系数相等，即 $a_j=2^{j+1}a_j$，因此$(2^{j+1}-1)a_j=0$，于是 $a_j=0$. 因此不变曲线是

$$y=\psi(x)=-\frac{4}{7}x^2.$$

499

因为此曲线为 $\boldsymbol{F}$ 的不变曲线，所以曲线上点的迭代满足

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \psi(x_1)\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}x_0\\ \psi(x_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x_0\\ \psi(x_1)\end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix}x_k\\ \psi(x_k)\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}x_{k-1}\\ \psi(x_{k-1})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x_{k-1}\\ \psi(x_k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^k}x_0\\ \psi(x_k)\end{bmatrix}.$$

因此，当 k 趋于无穷时，$x_k=x_0 2^{-k}$趋于 0；而且，因为 ψ 是连续的，所以 $y_k=\psi(x_k)$必趋于 0. 因此，(x_k, y_k)趋于不动点，且

$$W^s(\boldsymbol{0},\boldsymbol{F})=\left\{\left(x,-\frac{4}{7}x^2\right)^{\mathrm{T}}\right\}.$$

参见图 12.3.1. ■

下面给出周期点的稳定流形和不稳定流形的定义.

定义 12.3.2　令 $\boldsymbol{F}$ 是微分同胚，$\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的 q-周期点. 点 $\boldsymbol{p}$ 的稳定流形是所有这些点的集合，其迭代渐近于点 $\boldsymbol{p}$ 的迭代，即

$$W^s(\boldsymbol{p},\boldsymbol{F})=\{\boldsymbol{x}:\text{当 } k \text{ 趋于无穷时，} \|\boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{p})\| \text{ 趋于 } 0\}.$$

点 $\boldsymbol{p}$ 的轨道的稳定流形是所有这些点的集合，其迭代渐近于点 $\boldsymbol{p}$ 的迭代，即

$$W^s(\mathcal{O}_F(p),F)=\bigcup_{j=0}^{q-1}W^s(F^j(p),F)$$
$$=\{x:\omega(x)=\mathcal{O}_F(p)\}.$$

周期点p的不稳定流形是所有这些点的集合，其向后迭代渐近于点p的迭代，即

$$W^u(p,F)=\{x:\text{当}k\text{趋于负无穷时，}\|F^k(x)-F^k(p)\|\text{趋于}0\}.$$

周期点p的轨道的不稳定流形是所有这些点的集合，其向后迭代渐近于点p的迭代，即

$$W^s(\mathcal{O}_F(p),F)=\bigcup_{j=0}^{q-1}W^u(F^j(p),F)$$
$$=\{x:\alpha(x)=\mathcal{O}_F(p)\}.$$

我们也需要定义局部稳定流形和局部不稳定流形．对$\delta>0$，p的δ局部稳定流形定义为

500

$$W^s_\delta(p,F)=\{x\in W^s(p,F):\text{对于任意的}k\geqslant 0\text{有}\|F^k(x)-F^k(p)\|\leqslant\delta\}.$$

同理，对$\delta>0$，p的δ局部不稳定流形定义为

$$W^u_\delta(p,F)=\{x\in W^u(p,F):\text{对于任意的}k\leqslant 0\text{有}\|F^k(x)-F^k(p)\|\leqslant\delta\}$$
$$=\{x:\text{对于任意的}k\leqslant 0\text{有}\|F^k(x)-F^k(p)\|\leqslant\delta\}.$$

稳定流形定理指出，对于足够小的$\delta>0$，双曲周期点的局部稳定流形就是这样一些点的集合，其迭代在点p迭代的δ领域内，也就是说，

$$W^s_\delta(p,F)=\{x:\text{对于任意的}k\geqslant 0\text{有}\|F^k(x)-F^k(p)\|\leqslant\delta\}.$$

上述等式并不是定义.

注 12.3.3 如果p是一个吸引不动点，那么p的稳定流形就是先前所说的吸引域(basin of attraction)：

$$W^s(p,F)=\mathcal{B}(p,F).$$

以后，对吸引不动点就用稳定流形的符号表示吸引域.

下述定理给出了局部稳定与不稳定流形的特征.

定理 12.3.4(稳定流形定理) 设F是$\mathbb{R}^2$上的C^r微分同胚，$r\geqslant 1$，p是q-周期鞍周期点，其特征值λ_s和λ_u满足$|\lambda_s|<1$，$|\lambda_u|>1$. 则对足够小的$\delta>0$，p的δ局部稳定和不稳定流形$W^s_\delta(p,F)$和$W^u_\delta(p,F)$是C^r曲线，且分别与特征值λ_s和λ_u的特征向量的方向相切．这些曲线是局部不变的，即

$$F(W^s_\delta(p,F))\subset W^s_\delta(F(p),F)$$
$$F(W^u_\delta(p,F))\supset W^u_\delta(F(p),F).$$

(全局)稳定和不稳定流形分别等于局部稳定和不稳定流形迭代的并集，即

$$W^s(p,F)=\bigcup_{k=1}^{\infty}F^{-k}(W^s_\delta(F^k(p),F))$$
$$W^u(p,F)=\bigcup_{k=1}^{\infty}F^{k}(W^u_\delta(F^{-k}(p),F)).$$

全局稳定流形不自交，但却能以一种复杂的方式自行缠绕．图 12.3.2 给出的 $a=1.6$ 且 $b=-0.3$ 时的 Hénon 映射是有这种现象的例子．在图 12.3.2 中，鞍不动点 $\mathbf{p}=(x_-,x_-)$ 的稳定流形包含较陡的曲线，而不稳定流形包含较平坦的曲线．（不稳定流形看上去像是有尖角，但实际上它的弯曲是尖而光滑的．）该图还显示了第二个不动点 $\mathbf{q}=(x_+,x_+)$，但未显示其稳定和不稳定流形．对于 13.3 节的同宿点，我们证明，如果同一个鞍不动点的稳定流形与不稳定流形有交叉，那么这些流形都以一种复杂的方式嵌套在一起，且该映射有一不变集，该集呈现由符号动力学所模拟的复杂性态．

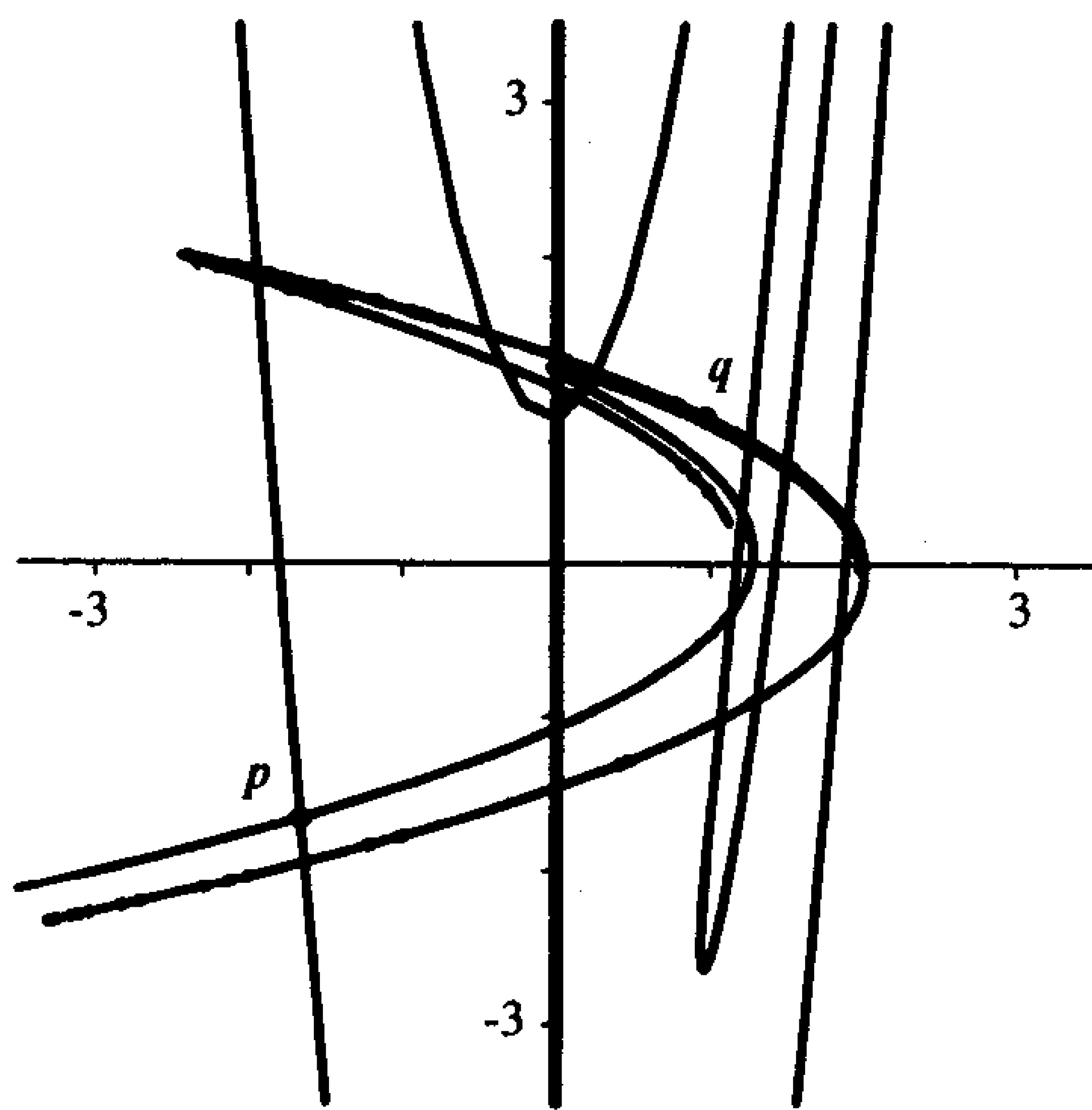


图 12.3.2　$a=1.6$ 且 $b=-0.3$ 时，Hénon 映射不动点 $\mathbf{p}$ 的稳定和不稳定流形

注 12.3.5　*庞加莱在 19 世纪后期发现了稳定和不稳定流形的重要性．特别地，当周期轨的不稳定流形穿过同一周期轨的稳定流形时，复杂的动力学性态就会出现．他利用这些思想解释了牛顿引力定律所阐释的 N 体问题（例如太阳系）是不稳定的原因．他的这些思想与 13.3 节给出的横向同宿点的马蹄构造有关．*

501

12.3.1　稳定流形的数值计算

定理 12.3.4 证明了稳定和不稳定流形的存在性．利用电脑模拟，有多种方法可用来估计二维空间中微分同胚的稳定和不稳定流形．最简单的方法是假设局部不稳定流形是沿不稳定特征向量 $\mathbf{v}^u$ 方向且过不动点 $\mathbf{p}$ 的一短线段：

$$W_\delta^u(\mathbf{p}) = \{\mathbf{p}+t\mathbf{v}^u : -\delta \leqslant t \leqslant \delta\}.$$

对 $W_\delta^u(\mathbf{p})$ 上的点进行迭代来确定全局不稳定流形．设均匀地取 N 个点，位于这个局部不稳定流形上不动点的同一侧，即当 $1\leqslant j\leqslant N$ 时有

$$\mathbf{x}^j = \mathbf{p} + \left(\frac{j}{N}\right)\delta\mathbf{v}^u,$$

取若干步迭代，以得到变长了的不稳定流形，即对固定的 $k>0$，

$$\{\mathbf{F}^k(\mathbf{x}^j) : 1 \leqslant j \leqslant N\},$$

例如可取 $N=1000$ 和 $k=5$.

同理，利用向后迭代可得到其稳定流形．令

$$\mathbf{y}^j = \mathbf{p} + \left(\frac{j}{N}\right)\delta\mathbf{v}^s,$$

$1\leqslant j\leqslant N$，则对固定的 $k>0$，

$$\{\mathbf{F}^{-k}(\mathbf{y}^j) : 1 \leqslant j \leqslant N\}$$

近似于其稳定流形．

这种简单的方法常用于绘制平面内不动点的稳定和不稳定流形．但有两三个问题会造成这

些数值曲线的位置不精确，所得曲线很长时尤其如此．首先，局部稳定和不稳定流形是利用直线段来近似的；其次，点的数值迭代有舍入误差；最后，进行高次迭代时，曲线上的点会渐渐散开．然而，映射的压缩和扩张特性却常能使流形的一般形状相当正确，即使无法验证数值的精确度．

502

Parker 和 Chua 的书[**82**]给出了一个较好的算法，它通过沿不稳定流形改变点的数量，使这些点均匀分散在流形上．他们的算法还可以在曲线急剧弯曲处增加点的数量．

为使计算更精确，可采用打靶法．这一方法是要核对点 $\boldsymbol{x}$ 的迭代经过 $\boldsymbol{p}$ 的哪一侧．若 $\boldsymbol{x}_1$ 经过某一侧而另一点 $\boldsymbol{x}_2$ 经过另一侧，则较好的选择就是 $\boldsymbol{x}_3=(1/2)(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$，新点 $\boldsymbol{x}_3$ 就与上述两点之一经过 $\boldsymbol{p}$ 的不同侧．利用这两个点可进一步确定稳定流形上的点．

12.3.2　吸引域边界

如 12.3 节开头所提到的，鞍不动点的稳定流形可构成吸引不动点的吸引域的边界．可以利用满足 $b=0.3$ 的 Hénon 映射族例证这一点：

$$\boldsymbol{F}_{a,0.3}(x,y)=(a-x^2-0.3y,x).$$

当 $a\geqslant-(1.3)^2/4=-0.4225$ 时，这一映射族有不动点．当这些不动点最先出现(即 $a\approx-0.4225$)时，其中一个不动点 $\boldsymbol{p}=(x_-,x_-)$ 是鞍不动点，而另一个不动点 $\boldsymbol{q}=(x_+,x_+)$ 是吸引不动点．点 $\boldsymbol{q}$ 的稳定流形是一平面开集，即前面提到的不动点的吸引域．对于 -0.4225 邻近的 a 值，计算机实验表明吸引域 $W^s(\boldsymbol{q};\boldsymbol{F}_{a,0.3})$ 以稳定流形 $W^s(\boldsymbol{p};\boldsymbol{F}_{a,0.3})$ 为其边界，参见图 12.3.3. 这点不仅对 Hénon 映射族成立，而且对平面上当参数变化时与 Hénon 映射族以同样方式有两个不动点的任意映射也成立(见[**83**]).

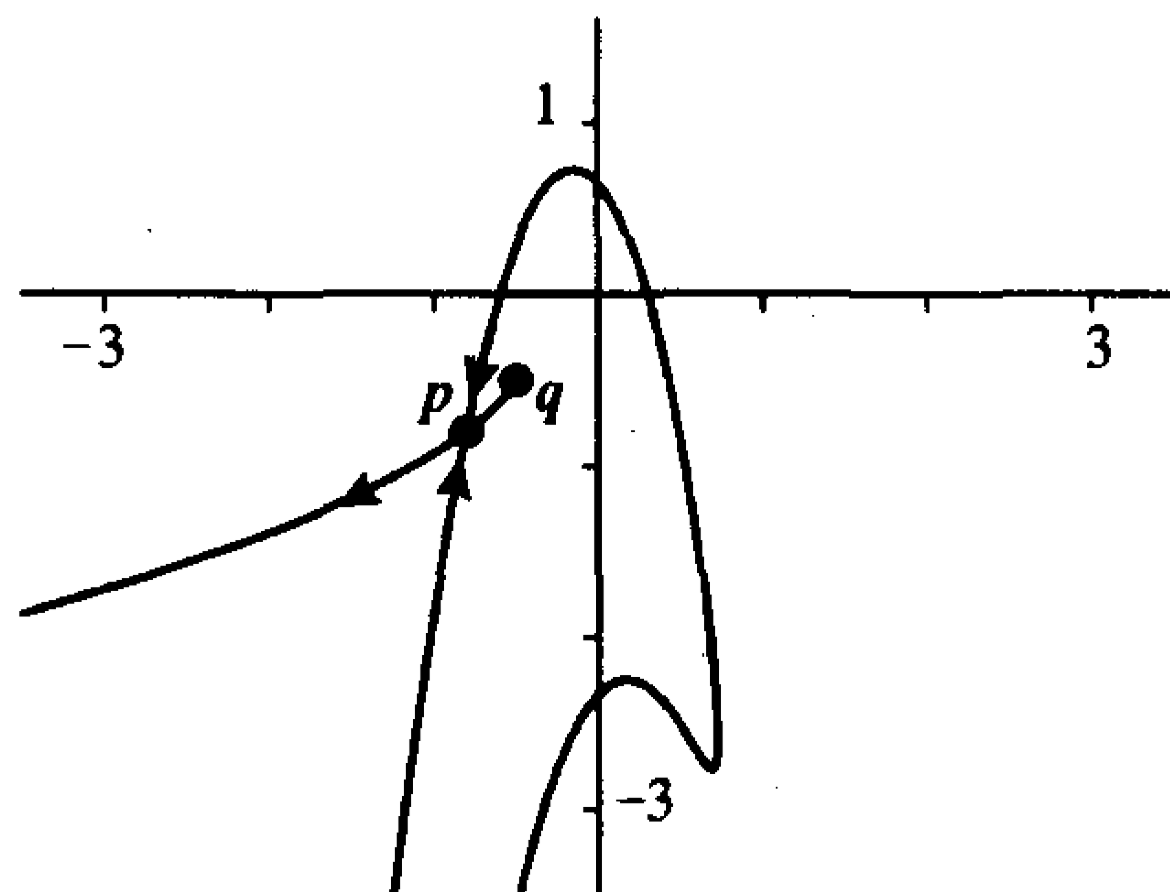


图 12.3.3　鞍不动点 $\boldsymbol{p}$ 的稳定流形作为 $a=-0.4$，$b=0.3$ 时 Hénon 映射另一个不动点 $\boldsymbol{q}$ 的吸引域边界

12.3.3　高维映射的稳定流形

对于$\mathbb{R}^n$ 中的鞍周期点也有稳定流形定理．设 $\boldsymbol{p}$ 是$\mathbb{R}^n$ 上微分同胚 $\boldsymbol{F}$ 的一 q-周期点．令

503

$$\boldsymbol{A}=D(\boldsymbol{F}^q)_{(\boldsymbol{p})},$$

其特征值为 λ_j，$1\leqslant j\leqslant n$. 设当 $1\leqslant j\leqslant n_s<n$ 时 $|\lambda_j|<1$，且 $n_s+1\leqslant j\leqslant n$ 时 $|\lambda_j|>1$. 令 $\boldsymbol{v}^j$ 是与 λ_j 相对应的特征向量或广义特征向量，则 $\boldsymbol{p}$ 的稳定特征空间(stable eigenspace)是向量集

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^s&=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}^j:1\leqslant j\leqslant n_s\}\\&=\{y_1\boldsymbol{v}^1+\cdots+y_{n_s}\boldsymbol{v}^{n_s}:y_1,\cdots,y_{n_s}\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

将这一子空间平移至 $\boldsymbol{p}$ 可得超平面 $\boldsymbol{p}+\mathbb{E}^s$. 同理，$\boldsymbol{p}$ 的不稳定特征空间(unstable eigenspace)是向量集

$$\mathbb{E}^u=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}^j:n_s+1\leqslant j\leqslant n\}$$

$$= \{y_{n_s+1}v^{n_s+1} + \cdots + y_n v^n : y_{n_s+1}, \cdots, y_n \in \mathbb{R}\},$$

且过 p 的相应超平面是 $p + \mathbb{E}^u$.

对于鞍周期点，$\mathbb{E}^s$ 和$\mathbb{E}^u$ 都包含非零向量．在$\mathbb{R}^3$ 中，它们之一为直线，另一为平面．

定理 12.3.6　设 F 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个 C^r 微分同胚，$r \geq 1$. 令 p 是 q-周期鞍周期点．则对足够小的 $\delta > 0$，p 的 δ 稳定和不稳定流形 $W_\delta^s(p, F)$ 和 $W_\delta^u(p, F)$ 是 C^r 流形，它们可分别是超平面 $p + \mathbb{E}^s$ 和 $p + \mathbb{E}^u$ 上的图．流形 $W_\delta^s(p, F)$ 与超平面 $p + \mathbb{E}^s$ 在 p 处相切，而 $W_\delta^u(p, F)$ 与超平面 $p + \mathbb{E}^u$也在 p 处相切．这些流形是局部不变的，即

$$F(W_\delta^s(p,F)) \subset W_\delta^s(F(p),F)$$

$$F(W_\delta^u(p,F)) \supset W_\delta^u(F(p),F).$$

全局稳定和不稳定流形是局部稳定和不稳定流形迭代的并集，即

$$W^s(p,F) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^{-k}(W_\delta^s(F^k(p),F))$$

和

$$W^u(p,F) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^{k}(W_\delta^u(F^{-k}(p),F)).$$

例 12.3.7　考虑映射

$$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, 2z + x^2 + y^2\right),$$

原点是其不动点．在原点的偏导数矩阵是

$$DF_{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

z 轴是该映射的不变集，即

$$F\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{bmatrix}.$$

所以，F 在 z 轴上扩张，而且

$$W^u(0,F) = \{(0,0,z)^{\mathrm{T}} : z \in \mathbb{R}\}.$$

如例 12.3.1 中所给出的$\mathbb{R}^2$ 中的映射一样，其稳定流形可表示为

$$W^s(0,F) = \left\{(x,y,z) : z = -\frac{4}{7}(x^2 + y^2)\right\}.$$ ■　504

12.4　双曲环面自同构

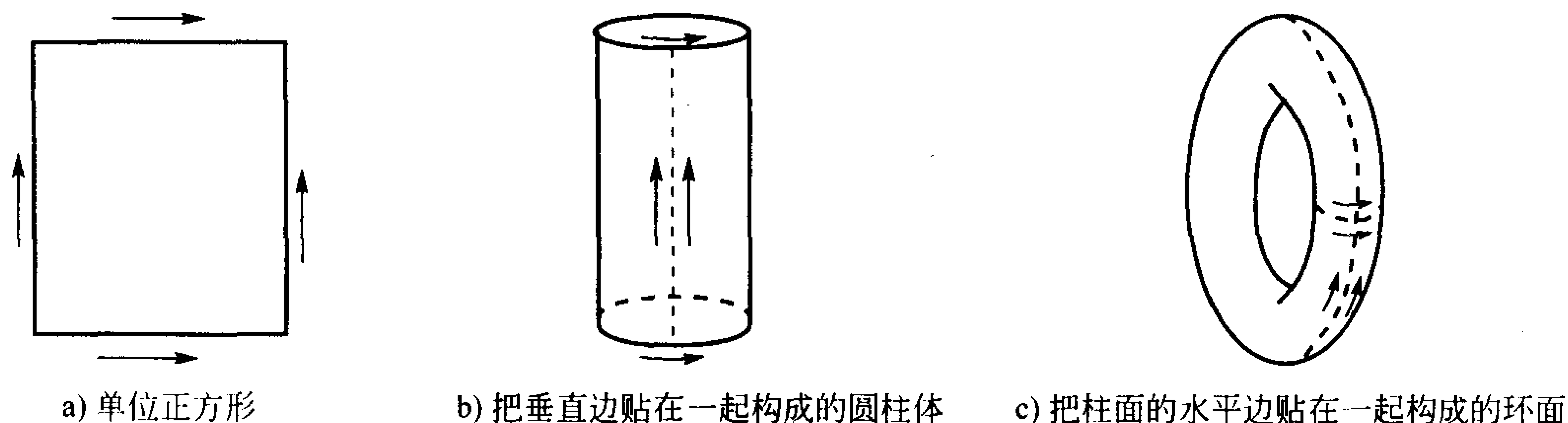
本节考虑环面上的一类映射．这类映射有无穷多个周期点，它们在整个空间内是稠密的．与一维双倍映射相比，它们是高一维映射，而且都有逆．

斯梅尔(S. Smale)的工作使这些映射成为有无穷多个周期点的典型例子，而阿诺索夫对一些具体例子进行了广泛的研究，因此常称它们为**阿诺索夫微分同胚**(Anosov diffeomorphism).因为它们是借助于欧几里得空间上的双曲线性映射而定义在环面上，所以也称为**双曲环面自同构**(hyperbolic toral automorphism).

环面(torus)或**二环面**(two torus)$\mathbb{T}^2$ 是对坐标 x，y 都取模 1 的点(x, y)的集．每个变量都可看作是取模 1 的角变量．由下面的过程可知，该空间可被看作轮胎面．任意数 x 取模 1 后可用满足 $0 \leqslant x' < 1$ 的数 x'表示，因此，$\mathbb{T}^2$ 中的点与单位正方形有关：

$$S = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

若将 S 沿 x 的方向卷起来，并且把线段$\{0\} \times [0, 1]$与线段$\{1\} \times [0, 1]$粘在一起，其中$(0, y)$与$(1, y)$相粘，则结果就是柱面，参见图 12.4.1b. 然后，把柱面沿 y 的方向弯曲并使“圆”$[0, 1] \times \{0\}$粘贴在“圆”$[0, 1] \times \{1\}$上，这样将柱面的两端粘贴在一起就形成一个像轮胎面一样的曲面，参见图 12.4.1c. 因为 $x=0$ 粘贴在 $x=1$ 上，所以，x 坐标接近 0 的点与 x 坐标接近 1 的点是彼此相近的．对于 y 坐标接近 0 和 1 的点有同样的结论．



a) 单位正方形　　b) 把垂直边贴在一起构成的圆柱体　　c) 把柱面的水平边贴在一起构成的环面

图 12.4.1　环面的构成

下面利用$\mathbb{R}^2$ 上的线性映射定义所要考虑的映射，先引入定义于$\mathbb{R}^2$ 而取值于环面的“商映射”π. 商映射本质上等同于对点的每个坐标取模 1. 如果

$$x' = x(\bmod 1)$$

和

$$y' = y(\bmod 1),$$

则对某两个整数 m 和 n(正数，0 或负数)有

$$x' = x + m$$

和

505

$$y' = y + n,$$

如果这样的整数存在，那么$\mathbb{R}^2$ 内的点(x, y)和(x', y')代表环面上的相同点．令 π 是从$\mathbb{R}^2$ 到$\mathbb{T}^2$ 的映射，使得 $\pi(x, y) = \pi(x', y')$当且仅当有两个整数 m 和 n 使得 $x' = x + m$ 和 $y' = y + n$ 成立．这一投影体现了前面描述的粘贴．

下面利用具体例子来介绍双曲环面自同构．令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

这个矩阵的元素为整数，而且行列式为 1.（行列式为 -1 的矩阵也可以.）因为行列式是 1，所以逆矩阵的元素也是整数

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

矩阵 A 确定了从$\mathbb{R}^2$ 到其自身的一个线性映射：

$$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

如果 $\pi(x, y) = \pi(x', y')$，满足 $x' = x + m$ 和 $y' = y + n$，则

$$\mathrm{A}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x + m \\ y + n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

$$= A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m + n \\ m + n \end{bmatrix},$$

因此，

$$\pi\left(A\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = \pi\left(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

所以，在 π 下相同的两点被 A 作用后所得的两点在 π 下仍是相同的．因而，A 诱导出从$\mathbb{T}^2$ 到$\mathbb{T}^2$ 的一个映射 F_A. 事实上，如果 p 是$\mathbb{T}^2$ 内一点，且(x, y)是满足 $\pi(x, y) = p$ 的任意点，则有

$$F_A(p) = \pi\left(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

因此，如果 x 和 y 是模 1 的变量，为求 F_A 的像，只需先求出 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，再对每个新坐标取模 1 就可以了．

同理，由于 A^{-1} 也有整数元，所以它也可诱导一映射

$$F_A^{-1}: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,$$

它是 F_A 的逆，所以 F_A 是$\mathbb{T}^2$ 上的一对一的满射．

图 12.4.2 表示的是单位正方形 S 在矩阵 A 作用下的像．有相同投影的区域用同样的字母来表示，由此可看出像集 $A(S)$ 正好将该单位正方形覆盖一次．

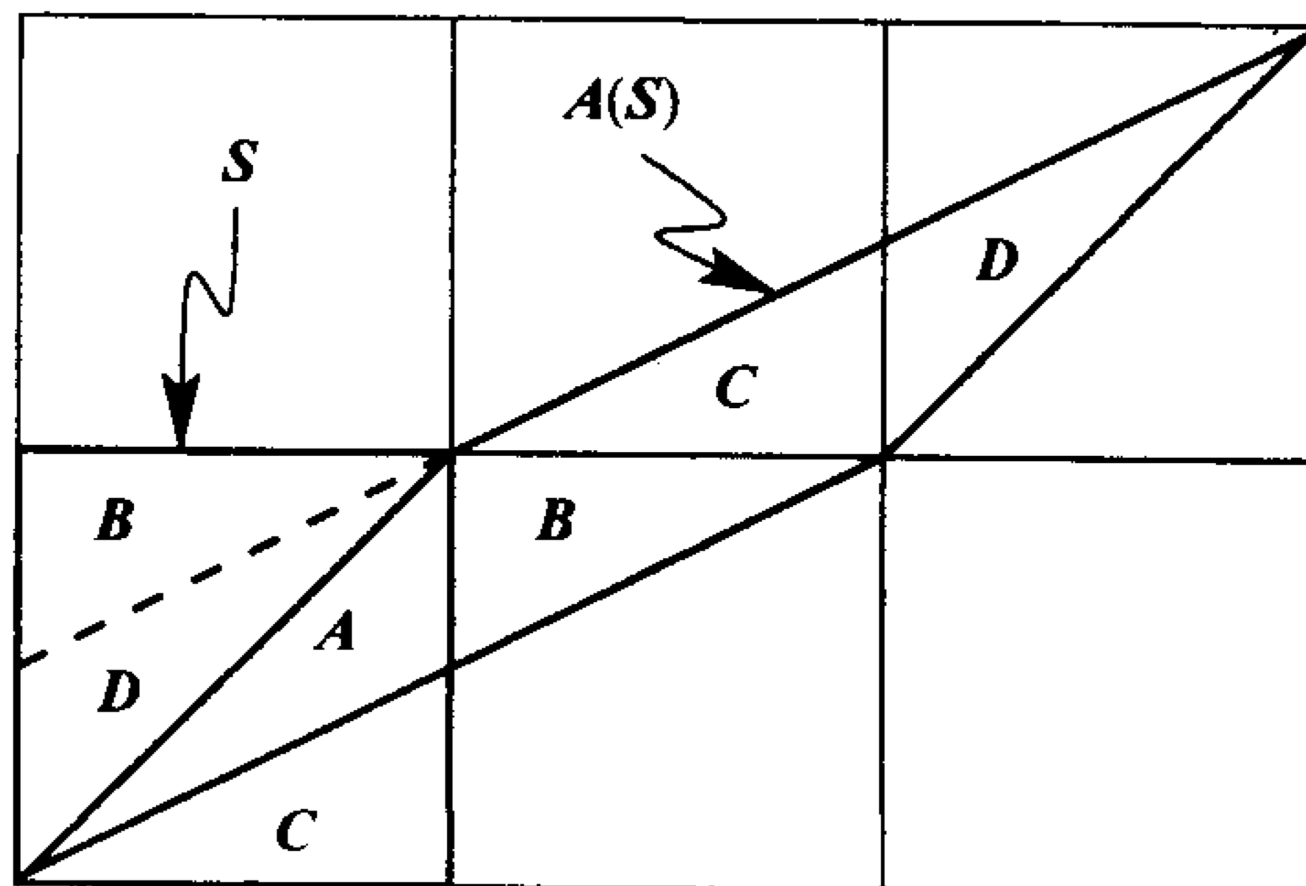


图 12.4.2

A 的特征值是

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$$

和

$$0 < \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1,$$

所以，该矩阵是双曲的.

对于任意 2×2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果(i)其元素都为整数，(ii)行列式为 ±1，而且(iii)特征值满足 $0<|\lambda_2|<1<|\lambda_1|$，则相应的诱导映射 $\boldsymbol{F}_A$ 称为双曲环面自同构(hyperbolic toral

506

automorphism)或阿诺索夫微分同胚(Anosov diffeomorphism). 对于一 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，假设是基本相同的，只是将(iii)改为(iii′)所有特征值都满足 $|\lambda_i|\neq1$，至少有一个特征值满足 $|\lambda_j|>1$，一个特征值满足 $|\lambda_k|<1$.

下面讨论映射 $\boldsymbol{F}_A$ 的周期点问题.

定理 12.4.1 *$\boldsymbol{F}_A$ 的周期点恰好是这样的点 $\pi(x, y)$，其中 x 和 y 都是有理数，因此 $\boldsymbol{F}_A$ 有无穷多个周期点，而且它们在 $\mathbb{T}^2$ 内是稠密的.*

此外，所有的周期点都是双曲的：如果 $\boldsymbol{p}$ 是 k-周期点，则 $D(\boldsymbol{F}_A^k)_{(p)}$ 的特征值是 λ_1^k 和 λ_2^k，其中

$$\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}>1$$

和

$$0<\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1.$$

证明 考虑有相同分母 q 的有理点集：

$$\boldsymbol{Q}_q=\left\{\left(\frac{m}{q},\frac{n}{q}\right): 0\leqslant m<q, 0\leqslant n<q\right\}.$$

这些数不一定用最小项来表示，即 m 和 q 或 n 和 q 可能有公因子. 因为

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\frac{m}{q}\\ \frac{n}{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2m+n}{q}\\ \frac{m+n}{q}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{F}_A$ 映 $\pi(\boldsymbol{Q}_q)$ 到其自身. 又因为 $\boldsymbol{F}_A^{-1}$ 也保持 $\pi(\boldsymbol{Q}_q)$ 不变，所以 $\boldsymbol{F}_A$ 限制在 $\pi(\boldsymbol{Q}_q)$ 上必是一对一的满射(即它是有 q^2 个元素的有限集 $\boldsymbol{Q}_q$ 上的一个置换). 因为这个集是有限的，所以每个点必是周期的，且周期小于或等于 q^2.

这些集的并

$$\bigcup_{q=1}^{\infty}\boldsymbol{Q}_q=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}: 0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<1,\ x\text{ 和 }y\text{ 是有理数}\right\}$$

在单位正方形内是稠密的，因而此并集在 π 下的投影必在 $\mathbb{T}^2$ 内是稠密的. 于是证明了周期点

507

在 $\mathbb{T}^2$ 内是稠密的.

现在设 $\boldsymbol{p}$ 是周期的，则 $\boldsymbol{F}_A^k(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}$. 若 $\pi(x, y)=\boldsymbol{p}$，则

$$\boldsymbol{A}^k\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}^k-\boldsymbol{I})\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (A^k - I)^{-1} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}.$$

矩阵 $A^k - I$ 有整数元素且可逆，所以其逆的元素为有理数且分母等于 $A^k - I$ 的行列式．这证明 $\mathbb{R}^2$ 内的向量 (x, y) 的坐标为有理数，而 $p = \pi(x, y)$ 是具有理坐标的向量的投影．这正是要证明的结论．

A 的特征值是 λ_1 和 λ_2，如定理所述．映射 F_A 在所有点的导数都是 A，如果 p 是 k-周期点，则

$$D(F_A^k)_{(p)} = A^k.$$

A^k 的特征值是 A 的特征值的 k 次幂，即定理中所说的 λ_1^k 和 λ_2^k. ■

例 12.4.2　考虑向量 $(1/3, 2/3)^{\mathrm{T}}$ 和上述矩阵 A，则

$$A\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{3} \\ \frac{2+1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{0}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathrm{mod}\ 1 \\ \mathrm{mod}\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{0}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{3} \\ \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{0}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathrm{mod}\ 1 \\ \mathrm{mod}\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{0}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathrm{mod}\ 1 \\ \mathrm{mod}\ 1 \end{bmatrix}$$

给出了一条 4-周期轨道． ■

稳定流形

如果 $\mathbb{R}^2$ 内的两点 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 之差是一个标量与稳定特征向量的乘积，即

$$\bar{q} - \bar{p} = t v^s,$$

则它们前行迭代间的距离趋于 0：

$$\| A^k \bar{q} - A^k \bar{p} \| = | t | \lambda_s^k \| v^s \|.$$

因此，$\mathbb{R}^2$ 内的点 $\bar{q} = \bar{p} + t v^s$ 在 $\bar{p}$ 的稳定流形上：

$$W^s(\bar{p}, A) = \{ \bar{p} + t v^s : t \in \mathbb{R} \}.$$

这个稳定流形在 $\mathbb{R}^2$ 内是一条直线．因为其稳定特征向量的斜率是无理数，所以稳定流形在 $\mathbb{T}^2$ 内是稠密的，也就是说，

$$W^s(p, F_A) = \pi W^s(\bar{p}, A),$$

508　其中，$\pi\bar{p}=p$.

同理，

$$W^u(\bar{p},A)=\{\bar{p}+tv^u : t\in\mathbb{R}\}$$

和

$$W^u(p,F_A)=\pi W^u(\bar{p},A)$$

（其中，$\pi\bar{p}=p$）在$\mathbb{T}^2$ 内是稠密的．

12.5　应用

12.5.1　马尔可夫链

在 11.4.3 节中讨论马尔可夫分割的扩张映射时，我们曾碰到行元素之和等于 1 的矩阵，这些矩阵产生马尔可夫链(Markov chain)，本节将进行更多的讨论．

假设某物质被分放在 n 个地点，设在 0 时刻第 i 个地点的储量是 $x_i^{(0)}\geqslant 0$. 设物质从第 i 个地点搬到第 j 个地点的概率是 $m_{ij}\geqslant 0$，则在时刻 1 从第 i 个地点返回到第 j 个地点的物质的总量是 $x_i^{(0)}m_{ij}$. 在时刻 1 第 j 个地点的物质总量就是从所有的地点返回量的总和，即

$$x_j^{(1)}=\sum_i x_i^{(0)}m_{ij}.$$

令 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$是相应的 $n\times n$ 阶矩阵(即 m_{ij}为第 i 行第 j 列的元素)，并令

$$x^{(q)}=(x_1^{(q)},\cdots,x_n^{(q)})$$

是表示 q 时刻在所有地点物质储量的行向量．由前面的公式可知

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{M},$$

更一般地有

$$\boldsymbol{x}^{(q)}=\boldsymbol{x}^{(q-1)}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{x}^{(0)}\boldsymbol{M}^q,$$

它是时刻 $q-1$ 到时刻 q 的分配的转移．

从第 i 个地点到另一点的概率总和为 1，即 $\sum_j m_{ij}=1$，而且 $\boldsymbol{M}$ 的每一行的和都是 1. 假设从一地点到另一地点的转移都是可行的，使得 $\boldsymbol{M}$ 的每一列都有非零元素．最后，假设至少从一个地点能够转移到多个地点，因此，某行有多个正元素．

因为在时刻 q 和时刻 $q-1$ 的物质总量相等，且与时刻 0 时的总量也相等，所以

$$\begin{aligned}\sum_j x_j^{(q)}&=\sum_j\Big(\sum_i x_i^{(q-1)}m_{ij}\Big)\\&=\sum_i\Big(\sum_j m_{ij}\Big)x_i^{(q-1)}\\&=\sum_i x_i^{(q-1)}\end{aligned}$$

（运用各行元素和等于 1 的事实）. 设总量为 $X=\sum_j x_j^{(0)}=\sum_j x_j^{(q)}$，则

$$p_i^{(q)}=\frac{x_i^{(q)}}{X}$$

是时刻 q 在第 i 个地点的物质比．令

$$\boldsymbol{p}^{(q)} = (p_1^{(q)},\cdots,p_n^{(q)}) = \frac{1}{X}\boldsymbol{x}^{(q)}$$

509

是这些物质比构成的行向量，可得

$$\boldsymbol{p}^{(q-1)}\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{x}^{(q-1)}}{X}\boldsymbol{M} = \frac{1}{X}(\boldsymbol{x}^{(q-1)}\boldsymbol{M}) = \frac{1}{X}\boldsymbol{x}^{(q)} = \boldsymbol{p}^{(q)},$$

也是用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作乘法的变换．

下面的定义总结了有关矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的假设．

定义 12.5.1　称有实元素 m_{ij} 的 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为随机矩阵(stochastic matrix)或概率转换矩阵(probability transition matrix)，如果下列条件成立：

(i)所有元素 m_{ij} 都满足 $0\leqslant m_{ij}\leqslant 1$.

(ii)每一行元素和都等于 1，即对所有的 i 都有 $\sum_j m_{ij} = 1$.

(iii)每列都有非零元素．

(iv)某行有多于一个的非零元素．

定义 12.5.2　随机矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为非周期的(aperiodic)(或最终正的(eventually positive))如果存在 $q_0>0$ 使得 $\boldsymbol{M}^{q_0}$ 的所有元素均为正(即对于这一迭代，任意两个地点间的物质都能相互转换)，于是对于 $q\geqslant q_0$，矩阵 $\boldsymbol{M}^q$ 的所有元素都是正的．非周期随机矩阵自动满足随机矩阵定义中的条件(iii)和(iv).

定义 12.5.3　与转换矩阵的情况一样，随机矩阵为不可约的(irreducible)是指对指定的任意两个地点 i_1 和 i_2，都可经有限次转换从 i_1 到达 i_2. 换句话说，对于任意一场对$(i_1,\ i_2)$，存在满足 $1\leqslant j_k\leqslant n$ 的指数 j_k，$k=0,\ \cdots,\ q$(其中 q 可能依赖于$(i_1,\ i_2)$)使得 $j_0=i_1$，$j_m=i_2$，而且 $m_{j_{k-1}j_k}>0$，$k=1,\ \cdots,\ q$(即 $\boldsymbol{M}^q$ 第$(i_2,\ j_2)$个元素不等于零).

保证随机矩阵为非周期的方法之一是让它不可约，且主对角上出现正元素．我们只限于考虑不可约的非周期矩阵．

对于随机矩阵 $\boldsymbol{M}$，1 总是特征值，并有列特征向量$(1,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}$：

$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_j m_{1j}\\ \vdots\\ \sum_j m_{nj}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 有相同的特征值，所以 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ 也总以 1 为其特征值，相应的特征向量设为$(p_1^*,\ \cdots,\ p_n^*)^{\mathrm{T}}$，这等价于说行向量$(p_1^*,\ \cdots,\ p_n^*)$满足

$$(p_1^*,\cdots,p_n^*) = (p_1^*,\cdots,p_n^*)\boldsymbol{M}.$$

由佩龙-弗罗贝尼乌斯定理知可适当地选取该向量，使得 $p_j^*>0$ 且 $\sum_j p_j^* = 1$. 如果 $\boldsymbol{M}$ 是非周期

的，则所有其他特征值都满足$|\lambda_j|<1$. 因此若$(p_1, \cdots, p_n)$是任意初始概率分布，则当q趋于无穷时，$(p_1, \cdots, p_n)\boldsymbol{M}^q$收敛于$(p_1^*, \cdots, p_n^*)$.

在给出一般结果前，先给出一些例题.

例 12.5.4　令

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.8 & 0\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}.$$

510

该矩阵有特征值 1，0.5 和 2.（这里并不给出特征多项式，但却导出每个特征值对应的特征向量$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$.）

对于$\lambda_1=1$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}&=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & -0.2 & 0.3\\ 0.2 & 0 & -0.6\end{bmatrix}\\ &\sim\begin{bmatrix}1 & -0.4 & -0.6\\ 0 & -0.08 & 0.48\\ 0 & 0.08 & -0.48\end{bmatrix}\\ &\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此，$v_1=3v_3$，$v_2=6v_3$. 因为欲有$1=v_1+v_2+v_3=(3+6+1)v_3=10v_3$，则$v_3=0.1$且$\boldsymbol{p}^*=\boldsymbol{v}^1=(0.3, 0.6, 0.1)$.

对于$\lambda_2=0.5$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}-0.5\boldsymbol{I}&=\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0.2 & 0 & -0.1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &\sim\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1.5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此，$2v_1=v_3$，$2v_2=3v_3$且$\boldsymbol{v}^2=(1, -3.2)$. 注意到$v_1+v_2+v_3=1-3+2=0$. 其他特征值对应的特征向量总是这样.

对于$\lambda_3=0.2$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}-0.2\boldsymbol{I}&=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.6 & 0.3\\ 0.2 & 0 & 0.2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 6 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}\\ &\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此，$v_1=-v_3$，$v_2=0$ 且 $\boldsymbol{v}^3=(1,\ 0,\ -1)$. 同样，$v_1+v_2+v_3=1+0-1=0$.

511

如果最初的分布为

$$\boldsymbol{p}^{(0)}=(0.45,0.45,0.1)=(0.3,0.6,0.1)+\frac{1}{20}(1,-3,2)+\frac{1}{10}(1,0,-1),$$

则

$$\boldsymbol{p}^{(0)}\boldsymbol{M}^q=(0.3,0.6,0.1)+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^q(1,-3,2)+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^q(1,0,-1),$$

当 q 趋于无穷时，上式收敛于分布 $\boldsymbol{v}^1=(0.3,\ 0.6,\ 0.1)$. 这一性质对于任意初始分布 $\boldsymbol{p}^{(0)}$ 都成立. 参见定理 12.5.7. ■

例 12.5.5(复特征值)　下面的随机矩阵例证非周期随机矩阵可以有复特征值. 设

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.1 & 0.3\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{bmatrix}.$$

其特征值是 $\lambda=1$ 和 $0.4\pm \mathrm{i}0.1\sqrt{3}$，并有 $\left|0.4\pm \mathrm{i}0.1\sqrt{3}\right|=\sqrt{0.16+0.03}=\sqrt{0.19}<1$. ■

例 12.5.6(不是非周期)　不是非周期的(也不是不可约的)随机矩阵举例如下：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0\\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4\\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7\end{bmatrix},$$

其特征值为 $\lambda=1,\ 1,\ 0.5$ 和 0.3. 在地点 1 和地点 2 之间的转换是可行的，在地点 3 和地点 4 之间也同样，但从地点 1 和地点 2 到地点 3 和地点 4 的转换是不可能的.

不是非周期的不可约的随机矩阵举例如下：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.8 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

其特征值为 $\lambda=1,\ -1$ 和 $\pm\sqrt{0.5}$. 在此，从任一地点到另一地点的转换都是可以的，但从地点 1 出发的奇数次迭代总是在地点 3 或 4，而偶数次迭代总是在地点 1 或 2. 因此，使所有转换概率都为正的幂是不存在的. 因此，$\boldsymbol{M}$ 不是非周期的. 而且，这一矩阵有另一特征值 -1，其绝对值等于 1. ■

定理 12.5.7(佩龙-弗罗贝尼乌斯)　*设 $\boldsymbol{M}$ 是一个非周期的随机矩阵.*

(a)矩阵 $\boldsymbol{M}$ 以 1 为单重特征值(即 1 是其特征方程的单根). 可选取特征值 1 的行特征向量 $\boldsymbol{p}^*$，使其所有元素为正，且 $\sum_j p_j^*=1$.

(b)所有其他特征值 λ_j 满足 $|\lambda_j|<1$. 如果 $\boldsymbol{v}^k$ 是 λ_k 的行特征向量，则 $\sum_j v_j^k=0$.

(c)若 $\boldsymbol{p}$ 是满足 $p_j>0$，$\sum_j p_j=1$ 的任意概率分布，则存在 $y_2,\cdots,y_n$ 使得

$$p = p^{*} + \sum_{j=2}^{n} y_k v^k$$

512　又，当 q 趋于无穷时，pM^q 收敛于 p^*.

证明梗概　基于[87]中利用动力系统思想，此处给出证明梗概.

不失一般性，下设所有的 $m_{ij}>0$，否则的话，可通过选取 M 的幂得到.

(a)如前所述，M 总有特征值1，所以它也是 M^{T} 的特征值(即 M 总有与特征值1相应的行特征向量). 为讨论特征值的重数，设另有一列特征向量 v，满足 $Mv=v$，且其所有的元素 v_j 不全相等. 则有指数 k，使 $|v_k|$ 为最大的分量. 不妨设 v_k 为正(否则，乘以 -1 即可). 因此，对所有的 j 有 $v_k=|v_k| \geqslant |v_j|$，而对于某 ℓ 有 $v_k>|v_\ell|$，则

$$v_k = \sum_j m_{kj} v_j < \sum_j m_{kj} v_k = v_k.$$

严格不等式成立是因为所有的 $m_{ij}>0$(即 M 是非周期的). 上式 $v_k>v_k$ 给出矛盾，故相应于特征值1只有一个特征向量.

为完成证明，还必须考虑1是多重特征值这一情况. 具体证明见参考文献.

(b)情形(i)：假设 $\lambda \neq 1$ 是实特征值. 同前设 $Mv=\lambda v$. 设 k 满足 $v_k=|v_k| \geqslant |v_j|$ 对所有 j 成立，且对某 ℓ 有 $v_k>|v_\ell|$，则

$$\lambda v_k = \sum_j m_{kj} v_j < \sum_j m_{kj} v_k = v_k.$$

即 $\lambda v_k<v_k$，故 $\lambda<1$.

下面证明 $\lambda>-1$. 因为对所有的 j 都有 $v_j \geqslant -v_k$，而对某 ℓ 有 $v_\ell>-v_k$，因此，

$$\lambda v_k = \sum_j m_{kj} v_j > \sum_j m_{kj}(-v_k) = -v_k.$$

即 $\lambda v_k>-v_k$，故 $\lambda>-1$. 结合起来可知，对不等于1的实特征值，有 $-1<\lambda<1$.

情形(ii)：假设 $\lambda=re^{2\pi\omega i}$ 是一复特征值，相应的特征向量为 v，其中 $r=|\lambda|$ 且 $e^{2\pi\omega i}$ 为复数. 假设已选取 v_j，使得 v_k 为实数且对所有的 j 有 $v_k \geqslant \mathrm{Re}(v_j)$. 由 $M^q v=\lambda^q v$ 可知

$$\begin{aligned} r^q \mathrm{Re}(e^{2\pi q\omega i}) v_k &= \mathrm{Re}(\lambda^q) v_k = \mathrm{Re}((M^q v)_k) \\ &= (M^q \mathrm{Re}(v))_k = \sum_j (m_{kj}^{(q)} \mathrm{Re}(v_j)) \\ &< \sum_j (m_{kj}^{(q)} v_k) = v_k. \end{aligned}$$

513

因此，对于所有的 q 有 $r^q \mathrm{Re}(e^{2\pi q\omega i})<1$. 又可找到数 q_1，使得 $\mathrm{Re}(e^{2\pi q_1 \omega i})$ 非常接近于1，于是 $r^{q_1}<1$，所以 $r=|\lambda|<1$.

(c)令 p 是满足 $\sum_j p_j=1$ 的概率分布. 由于特征向量是一个基，所以存在 y_1，…，y_n 使得

$$p = \sum_{i=1}^{n} y_i v^i.$$

其中，所有的向量都是行向量，且 $v^1=p^*$，则

$$1 = \sum_j p_j = y_1 \sum_j v_j^1 + \sum_{i=2}^{n} y_i \sum_j v_j^i$$

$$= y_1 + \sum_{i=2}^{n} y_i \cdot 0 = y_1.$$

因此,

$$p = v^1 + \sum_{i=2}^{n} y_i v^i,$$

正如所声称的那样.

就像特征值都是实数那样进行迭代，则有

$$pM^q = v^1 M^q + \sum_{i=2}^{n} y_i v^i M^q = v^1 + \sum_{i=2}^{n} y_i \lambda_i^q v^i,$$

上式趋于 v^1，这是因为当 $i \geqslant 2$ 时 $|\lambda_i^q| < 1$. ■

12.5.2 $\mathbb{R}^n$ 中的牛顿映射

在 9.3.1 节讨论过单变量的牛顿映射．用相似的方法可以寻找从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的函数的零点．

令 $\boldsymbol{F}$ 是从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的映射．假设 $\boldsymbol{x}_j$ 逼近于 $\boldsymbol{F}$ 的零点．$\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{x}_j$ 处的线性近似为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j) + D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}_j)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j).$$

令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$，并将变量 $\boldsymbol{x}$ 解出，所得解定义为 $\boldsymbol{x}_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j) + D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}_j)}(\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j) \\ -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j) &= D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}_j)}(\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j) \\ -(D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}_j)})^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j) &= \boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j \\ \boldsymbol{x}_{j+1} &= \boldsymbol{x}_j - (D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}_j)})^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j). \end{aligned}$$

这样就定义了辅助牛顿映射

$$\boldsymbol{N}_F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})})^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

514

正如单变量时的情形一样，在 $\boldsymbol{F}$ 的零点处 $\boldsymbol{N}_F$ 的导数是零．假设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$，令 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵，则

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{N}_F)_{\boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{I} - (D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p})})^{-1}(D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p})}) - D[(D\boldsymbol{F}_{(\cdot)})^{-1}]_{(\boldsymbol{p})}\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p})} \\ &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I} - D[(D\boldsymbol{F}_{(\cdot)})^{-1}]_{(\boldsymbol{p})}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

项 $D[(D\boldsymbol{F}_{(\cdot)})^{-1}]_{(\boldsymbol{p})}$有点神秘，它是导数的导数(二阶导数)，其中右下角的点代表被求导的变量．因为该项作用在零向量上，所以不必知道它具体是什么．由二阶泰勒展开式可证当 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{p}$ 附近时

$$\| \boldsymbol{N}_F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p} \| \leqslant C \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} \|^2,$$

其中 $C > 0$ 是依赖二阶导数的某常数．因此，从零点附近之点出发就得到快速收敛于 $\boldsymbol{p}$ 的轨道(即 $\boldsymbol{p}$ 是超吸引的).

12.5.3 甲虫种群模型

例 8.2.1 中介绍了粉甲虫分幼虫、蛹和成年虫等三个阶段的种群模型．那里给出的模型函数为

$$L_{n+1} = bA_n e^{-C_{LA}A_n} e^{-C_{LL}L_n}$$
$$P_{n+1} = (1-\mu_L)L_n$$
$$A_{n+1} = P_n e^{-C_{PA}A_n} + (1-\mu_A)A_n,$$

其中，$b>0$，$0\leqslant\mu_L\leqslant1$，$0\leqslant\mu_A\leqslant1$，$C_{LA}\geqslant0$，$C_{LL}\geqslant0$ 且 $C_{PA}\geqslant0$. 量 $\exp(-C_{LA}A_n)$ 和 $\exp(-C_{LL}L_n)$ 分别表示卵不被成年虫种群 A_n 和幼虫种群 L_n 吃掉的概率；$\exp(-C_{PA}A_n)$ 是蛹生长为成年虫的存活概率；b 是成年虫产生的幼虫出生率，μ_L 是（未转变成蛹的）幼虫的死亡率，而 μ_A 是成年虫的死亡率. F. Brauer 和 C. Castillo-Chávez 的书[**20**]中对这一系统的不动点进行了分析，这里沿用他们的方法对简化情形进行分析.

为了分析这一离散系统，做简化假设 $C_{LL}=0$(即忽略幼虫对卵的食杀)，此时函数成为

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} \\ P_{n+1} \\ A_{n+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}\begin{bmatrix} L_n \\ P_n \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bA_n e^{-C_{LA}A_n} \\ (1-\mu_L)L_n \\ P_n e^{-C_{PA}A_n} + (1-\mu_A)A_n \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{F}$ 的不动点满足

$$L = bAe^{-C_{LA}A},$$
$$P = (1-\mu_L)L$$

和

$$P = A\mu_A e^{C_{PA}A}.$$

消去 P 可得

$$L = bAe^{-C_{LA}A}$$

和

515

$$(1-\mu_L)L = A\mu_A e^{C_{PA}A}.$$

当然，$L=A=P=0$ 是一个解，称其为灭绝不动点(extinction fixed point). 如果这些变量不是零，那么两个方程相除，得到

$$(1-\mu_L) = \frac{\mu_A}{b}e^{(C_{LA}+C_{PA})A^*},$$

$$e^{(C_{LA}+C_{PA})A^*} = \frac{b(1-\mu_L)}{\mu_A},$$

或

$$A^* = \frac{\ln(\theta)}{C_{LA}+C_{PA}},$$

其中，

$$\theta = \frac{b(1-\mu_L)}{\mu_A}.$$

一旦解出了 A^*，则有

$$L^* = bA^* e^{-C_{LA}A^*}$$

和

$$P^* = (1-\mu_L)L^* = (1-\mu_L)bAe^{-C_{LA}A^*}.$$

当 $\theta>1$ 时，得到第二个不动点(L^*, P^*, A^*)，这时每个种群都为正，称其为存活不动点(survival fixed point).

$\boldsymbol{F}$ 的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & be^{-C_{LA}A}(1-C_{LA}A) \\ (1-\mu_L) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-C_{PA}A} & 1-\mu_A-PC_{PA}e^{-C_{PA}A} \end{bmatrix}.$$

在灭绝不动点(0, 0, 0)处，上述矩阵化为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ (1-\mu_L) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\mu_A \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$0=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3,$$

其中

$$a_1=-(1-\mu_A),$$
$$a_2=0$$

和

$$a_3=-b(1-\mu_L).$$

下述引理引自 P. Samuelson 的论文[**94**]. 它给出了三元函数不动点稳定性的判定准则(也可见[**20**]).

引理 12.5.8　设 $p(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$.

(a)如果 $1+a_1+a_2+a_3<0$ 或 $1-a_1+a_2-a_3<0$，则至少有一个根的绝对值大于 1.

(b)如果

$$1+a_1+a_2+a_3>0, \qquad 1-a_1+a_2-a_3>0,$$
$$3+a_1-a_2-3a_3>0, \qquad 1+a_1a_3-a_2-a_3^2>0,$$

则每个根(实根或复根)的绝对值都小于 1.

由于 $p(1)=1+a_1+a_2+a_3$ 且 λ^3 的系数为正，所以当 $p(1)<0$ 时，存在大于 1 的实根．同理，$p(-1)=-1+a_1-a_2+a_3$，所以当 $p(-1)>0$ 时，存在小于 -1 的实根(显然，其绝对值大于 1).

516

对于灭绝不动点的特征方程，如果 $\theta>1$，则

$$1+a_1+a_2+a_3=1-(1-\mu_A)-b(1-\mu_L)$$
$$=\mu_A-b(1-\mu_L)<0,$$

从而不动点是不稳定的．如果 $\theta<1$，则第一个量大于 0，第二个和第三个量都为正数，事实上：

$$1-a_1+a_2-a_3=1+(1-\mu_A)+b(1-\mu_L)>1>0$$

和

$$3+a_1-a_2-3a_3=3-(1-\mu_A)+3b(1-\mu_L)>3-1>0.$$

对于最后一个量有

$$\begin{aligned}1+a_1a_3-a_2-a_3^2&=1+(1-\mu_A)b(1-\mu_L)-b^2(1-\mu_L)^2\\&>1-b^2(1-\mu_L)^2\\&>1-\mu_A^2>0,\end{aligned}$$

因为 $\theta<1$. 因此，当 $\theta<1$ 时灭绝不动点(0, 0, 0)是吸引的，而当 $\theta>1$ 时则是不稳定的.

当 $\theta>1$ 时灭绝不动点是不稳定的，而存活不动点使每个种群量都为正. 利用不动点满足的方程可写出在存活不动点处的偏导数矩阵：

$$\begin{bmatrix}0&0&\frac{L^*}{A^*}-C_{LA}L^*\\(1-\mu_L)&0&0\\0&e^{-C_{PA}A^*}&1-\mu_A-\mu_AC_{PA}A^*\end{bmatrix}.$$

这一矩阵的特征方程为

$$0=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3,$$

其中

$$\begin{aligned}a_1&=-1+\mu_A+\mu_AC_{PA}A^*\\a_2&=0\end{aligned}$$

和

$$a_3=-(1-\mu_L)\left(\frac{L^*}{A^*}-C_{LA}L^*\right)e^{-C_{PA}A^*}.$$

因此，对于存活不动点特征多项式而言，出现于引理 12.5.8 中的量是

$$1+a_1+a_2+a_3=\mu_A+\mu_AC_{PA}A^*-(1-\mu_L)\left(\frac{L^*}{A^*}-C_{LA}L^*\right)e^{-C_{PA}A^*},$$

$$1-a_1+a_2-a_3=2-\mu_A-\mu_AC_{PA}A^*+(1-\mu_L)\left(\frac{L^*}{A^*}-C_{LA}L^*\right)e^{-C_{PA}A^*},$$

517

$$3+a_1-a_2-3a_3=2+\mu_A+\mu_AC_{PA}A^*+3(1-\mu_L)\left(\frac{L^*}{A^*}+3C_{LA}L^*\right)e^{-C_{PA}A^*}$$

和

$$\begin{aligned}1+a_1a_3-a_2-a_3^2=&1+(1-\mu_A-\mu_AC_{PA}A^*)(1-\mu_L)\left(\frac{L^*}{A^*}+C_{LA}L^*\right)e^{-C_{PA}A^*}\\&-(1-\mu_L)^2\left(\frac{L^*}{A^*}+C_{LA}L^*\right)^2e^{-2C_{PA}A^*}.\end{aligned}$$

当 $b=4.88$，$\mu_L=0.2$，$\mu_A=0.01$，$C_{LA}=0.01$ 和 $C_{PA}=0.005$ 时这四个量的值都为正，约为 0.596 7…, 1.940 3…，1.940 5…和 0.970 2…，所以该不动点是吸引的. 如果两个参数变为 $\mu_A=0.96$ 和 $C_{PA}=0.5$，而其他参数值不变，则 $1+a_1a_3-a_2-a_3^2=-1.066\,9\cdots$，则存活不动点就变为不稳定的.

图 12.5.1 显示的是最后一组参数值的一轨线的图；注意到该轨道以一种复杂的方式缠绕(即似乎是混沌的).

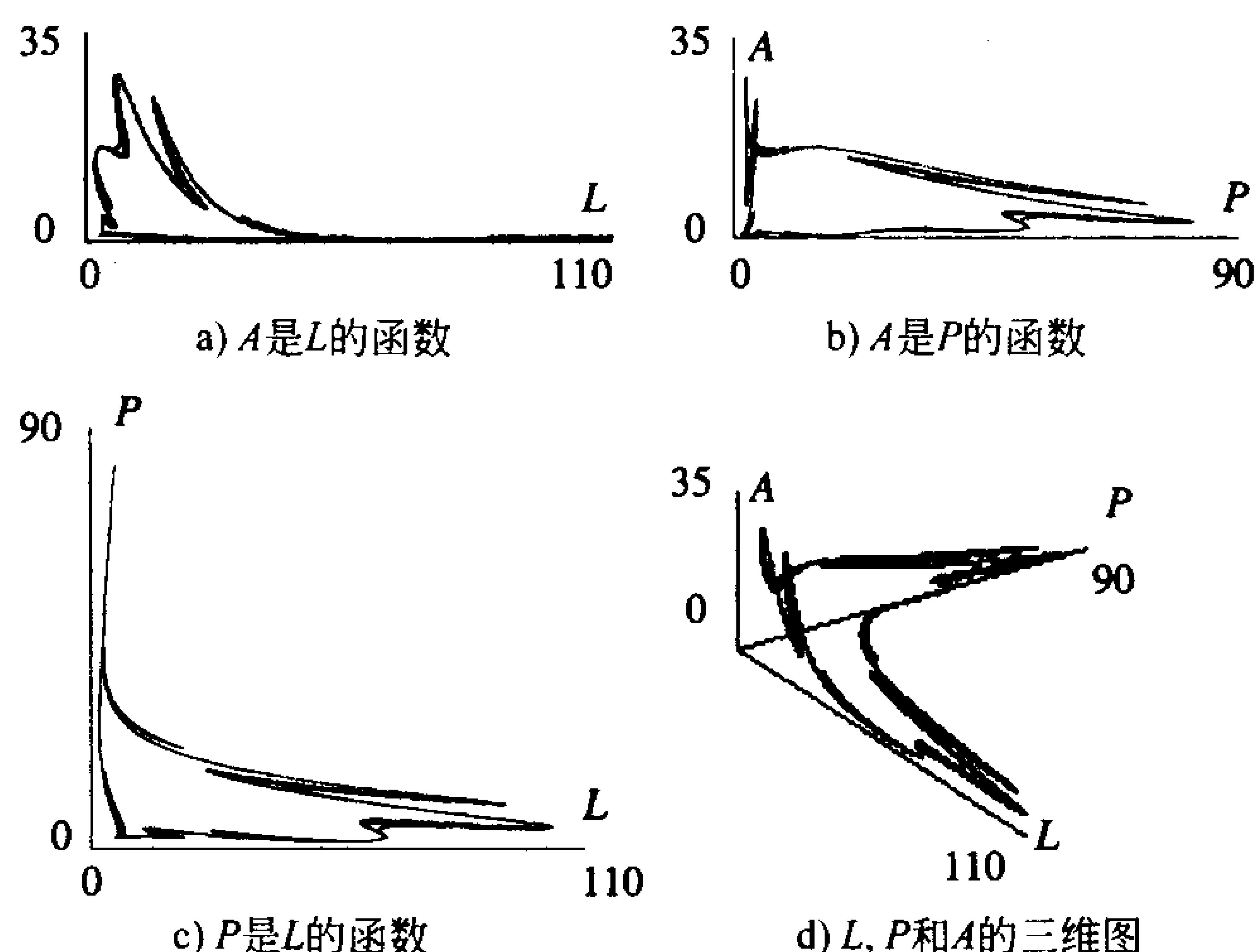


图 12.5.1　$b=4.88$，$\mu_L=0.2$，$\mu_A=0.96$，$C_{LA}=0.01$ 和 $C_{PA}=0.5$ 时甲虫种群轨道图

12.5.4　离散传染病模型

某些种群代与代之间有固定的时间间隔，因此映射是比微分方程更好的模型．在本小节里，我们考虑一种可被感染，然后又恢复健康变得有免疫力的单种群模型．在这一背景下，情况会根据感染发生的时期不同而有区别．这是基于[**20**]的 2.9 节以及那一节引用的 C. Castillo-Chávez 和 A. A. Yakubu 的工作．与 4.6.2 节相比，那里考虑的是基于微分方程系统的传染病模型. 518

在第 n 阶段，S_n 表示易感染种群的量，I_n 表示被感染种群的量. 模型采用形式

$$S_{n+1} = \Lambda + S_n e^{-\mu} e^{-\alpha I_n} + I_n e^{-\mu}[1 - e^{-\sigma}]$$

$$I_{n+1} = S_n e^{-\mu}[1 - e^{-\alpha I_n}] + I_n e^{-\mu} e^{-\sigma},$$

其中，Λ，μ，α 和 σ 都是正参数．总量 $T_n = S_n + I_n$ 满足迭代

$$T_{n+1} = \Lambda + e^{-\mu} T_n \equiv g(T_n),$$

它有唯一不动点

$$T^* = \frac{\Lambda}{1 - e^{-\mu}},$$

而且这一不动点是吸引的.

二维系统的一个不动点是 $S = T^*$，$I=0$. 在此不动点处二维映射的偏导数矩阵是

$$\begin{bmatrix} e^{-\mu} & e^{-\mu}[1 - e^{-\sigma}] \\ 0 & e^{-\mu-\sigma} + \alpha T^* e^{-\mu} \end{bmatrix},$$

它有特征值 $e^{-\mu}$和 $e^{-\mu-\sigma} + \alpha T^* e^{-\mu}$. 第一个特征值总是小于 1，即 $0 < e^{-\mu} < 1$，这对应于 T^* 是 $g(T_n)$的吸引不动点这一事实. 第二个特征值总是正的，且对于某些参数值，它小于 1：

$$1 \overset{?}{>} \mathrm{e}^{-\mu-\sigma} + \alpha T^{*} \mathrm{e}^{-\mu},$$

$$1 - \mathrm{e}^{-\mu-\sigma} \overset{?}{>} \alpha T^{*} \mathrm{e}^{-\mu},$$

$$1 \overset{?}{>} \frac{\alpha T^{*} \mathrm{e}^{-\mu}}{1 - \mathrm{e}^{-\mu-\sigma}} \equiv R_0.$$

最后一个量 R_0 被称为再生数．因此，$R_0 < 1$ 时，该不动点是吸引的；$R_0 > 1$ 时，该不动点是不稳定鞍点.

如果种群总量保持平衡，即 $T_n = T^{*}$ 时，$S_n = T^{*} - I_n$，从而可得到一元函数：

$$I_{n+1} = (T^{*} - I_n)\mathrm{e}^{-\mu}[1 - \mathrm{e}^{-\alpha I_n}] + I_n \mathrm{e}^{-\mu-\sigma} \equiv f(I_n).$$

当 $R_0 < 1$ 时，$I = 0$ 是 f 的全局吸引不动点，它吸引 $(0, T^{*}]$ 上的所有点；当 $R_0 > 1$ 时，$I = 0$ 是不稳定的. 因为

$$f(T^{*}) = T^{*} \mathrm{e}^{-\mu-\sigma} < T^{*},$$

所以，$R_0 > 1$ 时存在满足 $I^{*} > 0$ 的第二个不动点 I^{*}.

12.5.5　单陆棵基因模型

生物数学中的单轨道传染病模型提供了一个相当简单的非线性系统，它有一全局吸引不动点．本部分的内容是基于[52]中 J. Hofbauer 和 K. Sigmund 的工作．

生物体的特征是由两串染色体决定的．对人类来说，每串含有 46 个染色体．人的个性取决于若干对基因，这些基因出现于一处或多处的染色体，称这些基因为个性陆棵(locus of trait). 这里考虑最简单的情形，即陆棵是一处的染色体，或出现单个陆棵. 通常会有多种基因共处于一个陆棵，称这种基因为等位基因，用 A_1，…，A_n 表示．假设等位基因 A_i 出现的频率为 $p_i \geqslant 0$，其中，$p_1 + \cdots + p_n = 1$，所以，基因对 A_iA_j 在老一代中出现的频率是 p_ip_j. 频率向量为

519

$$\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)^{\top}.$$

通过随机配对，假设基因对 (A_i, A_j) 也以概率 p_ip_j 出现在下一代中．如果下一代等位基因的总数为 N，那么有 p_ip_jN 个基因对 (A_i, A_j). 令 $w_{ij} \geqslant 0$ 是基因对 (A_i, A_j) 存活至成年的概率．假设这些基因在两个染色体串中出现的顺序并不影响它们的存活力，所以 $w_{ij} = w_{ji}$. 因此，所得选择矩阵

$$\boldsymbol{W} = (w_{ij})$$

是对称的．令 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$ 是下一代成年期中等位基因出现的频率，并令 p'_{ij} 是相应于基因对 (A_i, A_j) 出现的概率，则

$$p'_{ij} = \frac{w_{ij}p_ip_jN}{\sum_{k,\ell} w_{k\ell}p_kp_\ell N} = \frac{w_{ij}p_ip_j}{\sum_{k,\ell} w_{k\ell}p_kp_\ell} = \frac{w_{ij}p_ip_j}{\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{W}\boldsymbol{p}}$$

和

$$p'_i = \sum_j p'_{ij} = p_i \frac{\sum_j w_{ij}p_j}{\sum_{k,\ell} w_{k\ell}p_kp_\ell} = p_i \frac{(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_i}{\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{W}\boldsymbol{p}},$$

其中 v_i 表示向量 $\boldsymbol{v}$ 的第 i 个分量.

向量 $\boldsymbol{p}$ 所在的状态空间是简单形

$$S = \left\{ \boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)^{\mathrm{T}} : \sum_i p_i = 1, 0 \leqslant p_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, n \right\}.$$

这里并不打算用线性化来验证稳定性，而是采用实值函数. 这与 Lyapunov 函数的运用类似，已出现于 5.3 节对常微分方程组的研究.

定理 12.5.9（自然选择基本定理）　令从 S 到其自身的映射 T 为

$$(T(\boldsymbol{p}))_i = p_i \frac{(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_i}{\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}\boldsymbol{p}}.$$

令 $\bar{w}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}\boldsymbol{p}$ 是人口的平均适度(fitness)，那么，平均适度对每一次迭代都是非减的，即

$$\bar{w}(T(\boldsymbol{p})) \geqslant \bar{w}(\boldsymbol{p}),$$

且等式成立当且仅当 $T(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$ 为不动点.

因此，如果存在满足 $p_i^* > 0$ 的不动点 $\boldsymbol{p}^*$，则满足 $p_i > 0$ 的任何 $\boldsymbol{p}$ 都在 $\boldsymbol{p}^*$ 的吸引域内，而且 $\boldsymbol{p}$ 的 ω 极限是 $\boldsymbol{p}^*$，即 $\omega(\boldsymbol{p}; T) = \boldsymbol{p}^*$.

证明　这里需要利用一些不等式. 首先，当 $a, b > 0$ 时，几何平均不大于算术平均，即

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

520

对于 $\alpha > 1$，函数 $f(x) = x^\alpha$ 是凸的且满足 $f''(x) > 0$. 因此，对于 $p_1, p_2 > 0$，$p_1 + p_2 = 1$，且 $0 < x_1 < x_2$，有

$$\begin{aligned}(p_1 x_1 + p_2 x_2)^\alpha &= f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \\ &< p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) \\ &= p_1 (x_1)^\alpha + p_2 (x_2)^\alpha.\end{aligned}$$

同理，对于 n 个点 $x_i > 0$ 和满足 $p_1 + \cdots + p_n = 1$ 的 $p_i > 0$，有

$$\begin{aligned}\left(\sum_i p_i x_i \right)^\alpha = f\left(\sum_i p_i x_i \right) &\leqslant \sum_i p_i f(x_i) \\ &= \sum_i p_i (x_i)^\alpha.\end{aligned} \tag{12.5.1}$$

且等式成立当且仅当所有的 x_i 相等.

现在我们开始计算平均适度的变化：

$$\bar{w}(T(\boldsymbol{p})) = \frac{\sum_{i,j} p_i (\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_i w_{ij} p_j (\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j}{\bar{w}(\boldsymbol{p})^2}.$$

等式两边同乘以分母，得

$$\bar{w}(\boldsymbol{p})^2 \bar{w}(T(\boldsymbol{p})) = \sum_{i,j,k} p_i w_{ik} p_k w_{ij} p_j (\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j.$$

交换 j 和 k 的位置可得

$$\bar{w}(\boldsymbol{p})^2 \bar{w}(T(\boldsymbol{p})) = \sum_{i,j,k} p_i w_{ij} p_j w_{ik} p_k (\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_k.$$

取平均值，然后应用算术和几何平均的不等关系可得

$$\begin{aligned}\bar{w}(\boldsymbol{p})^2\bar{w}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})) &= \sum_{i,j,k} p_i p_j p_k w_{ij} w_{ik}\left[\frac{(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j+(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_k}{2}\right] \\ &\geqslant \sum_{i,j,k} p_i p_j p_k w_{ij} w_{ik}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_k^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_i p_i\left[\sum_j w_{ij}p_j(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j^{\frac{1}{2}}\sum_k w_{ik}p_k(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_k^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \sum_i p_i\left[\sum_j w_{ij}p_j(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

521

对于 $\alpha=2$，应用不等式(12.5.1)可得

$$\begin{aligned}\bar{w}(\boldsymbol{p})^2\bar{w}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})) &\geqslant \left[\sum_i p_i\sum_j w_{ij}p_j(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &= \left[\sum_j p_j(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j^{\frac{1}{2}}\sum_i p_i w_{ij}\right]^2 \\ &= \left[\sum_j p_j(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j\right]^2 \\ &= \left[\sum_j p_j(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j^{\frac{3}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

对 $\alpha=3/2$，再次利用不等式(12.5.1)可得

$$\bar{w}(\boldsymbol{p})^2\bar{w}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})) \geqslant \left[\sum_j p_j(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j\right]^{\frac{3}{2}\cdot 2} = \bar{w}(\boldsymbol{p})^3.$$

再除以 $\bar{w}(\boldsymbol{p})^2$ 就可得到所要的结果．

在最后一个不等式中，等式成立当且仅当所有的 $(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j$ 都相等．然而，如果对所有的 i 有 $(\boldsymbol{W}\boldsymbol{p})_j=c$，则 $\bar{w}(\boldsymbol{p}) = \sum_i p_i c = c$ 且

$$(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}))_i = p_i\frac{c}{c} = p_i.$$

因此，$\boldsymbol{p}$ 是一个不动点．■

12.6　理论与证明

周期点附近的线性化

不动点处的线性化方程很大程度上决定了不动点附近相图的特征．这需要对系统引入变换．特别地，两个映射是共轭的，若存在坐标变换，它把一系统的轨道变换为另一系统的轨道．本节将对此进行更为精确的表述，为此需要明确坐标变换有几阶导数．本节部分结果的证明超出了本书的范围，此处仅给出定理的内容和有关证明的参考书目．

定理的叙述不涉及全空间 $\mathbb{R}^n$ 上的共轭，而只涉及从不动点的邻域到原点某邻域的共轭．因此，这里重述共轭的定义并引入在子集上取值的思想．

定义 12.6.1　*我们说映射 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{U}$ 上与映射 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 上是拓扑共轭的，如果存在从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的同胚 $\boldsymbol{h}$，使得对于 $\boldsymbol{U}$ 中所有的 $\boldsymbol{x}$ 有*

$$h \circ F(x) = G \circ h(x),$$

这样的映射 h 是一个连续的坐标变换.

对于 $r \geq 1$ 的整数，称这两个映射在开集 U 和 V 上是 C^r 共轭的，如果存在从 U 到 V 的 C^r 微分同胚 h 使得

$$h \circ F(x) = G \circ h(x);$$

522

因此，h 和 h^{-1} 都是 C^r 的，这样的映射 h 是一个可微的坐标变换.

在涉及映射 F 的线性化问题的定理中，假设在不动点 x^* 处的导数可逆，即 $\det(DF_{(x^*)}) \neq 0$. 根据反函数定理，对于这样的映射，存在 x^* 的两个邻域 U_1 和 U_2，使得 F 为从 U_1 到 U_2 的微分同胚，称 F 为在 x^* 处的局部微分同胚(local diffeomorphism).

正如下面所说的那样，所谓 Grobman-Hartman 定理是这样一个一般定理，它指出：有双曲不动点的非线性映射拓扑共轭于该映射在此不动点的导数诱导的线性映射. 美中不足的是，此处的拓扑共轭并不能给出相图的几何特性. 在同一维空间中以原点为吸引不动点的任意两个线性映射在$\mathbb{R}^n$上都是拓扑共轭的，见书[**87**]. 特别地，以原点为稳定焦点的线性系统与以原点为稳定结点的线性系统是拓扑共轭的. 因此，连续坐标变换并不能保持轨线螺旋式或非螺旋式趋于不动点的渐近方式. 但可微的坐标变换却能保持这种性质. 然而，欲使上述拓扑共轭成为可微，必须满足更多的条件.

下面叙述这些结果. 它们也适用于周期点. 为了使内容更简单些，这里只给出不动点的情形. 在定理中，

$$A = DF_{(x^*)}$$

是偏导数矩阵，且

$$DF_{(x^*)}y$$

是相应的线性映射.

定理 12.6.2(Grobman-Hartman) 设 F 是有双曲不动点 x^* 的 C^1 映射且满足 $\det(Dh_{(x^*)}) \neq 0$. 则存在包含 x^* 的开集 U 和包含原点的开集 V 使得映射 $F(x)$ 在 U 上与相应的线性映射 $DF_{(x^*)}y$ 在 V 上是拓扑共轭的.

具体证明见书[**87**]，此不赘述.

为了使坐标变换可微，需要考虑特殊情形或添加更多的假设. 涉及高阶导数的一个结果是 Sternberg 得到的，但需要特征值的"非共振"条件.

定理 12.6.3(Sternberg) 设 F 是有双曲不动点 x^* 的 C^∞ 映射且满足 $\det(Dh_{(x^*)}) \neq 0$. 令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 表示 $DF_{(x^*)}$ 的特征值，且每个 λ_k 的代数重数都为 1. 此外，设对于每个 k 和满足 $\sum_j m_j \geq 2$ 的任意非负整数 m_j 有

$$\lambda_k \neq \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \cdots \lambda_n^{m_n}$$

(称该条件为特征值的乘法非共振性条件).

则存在包含 x^* 的开集 U 和包含原点的开集 V 使得映射 F 在 U 上与线性映射 $DF_{(x^*)}y$ 在 V 上是 C^∞ 共轭的.

该定理的证明比 Grobman-Hartman 定理的证明要难得多．其证明需要特征值的非共振性，见书[49]．下面的两个定理是关于 C^1 共轭的，其中 Hartman 定理并不要求特征值的非共振性．

定理 12.6.4(Hartman)　设 $\boldsymbol{F}$ 是有双曲不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的 C^1 映射且满足 $\det(D\boldsymbol{h}_{(\boldsymbol{x}^*)})\neq 0$，则存在包含 $\boldsymbol{x}^*$ 的开集 U 和包含原点的开集 V，使得映射 $\boldsymbol{F}$ 在 U 上与线性映射 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{y}$ 在 V 上是 C^1 共轭的．

523

定理 12.6.5(Belickii[13])　设 $\boldsymbol{F}$ 是有双曲不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 的 C^2 映射，且满足 $\det(D\boldsymbol{h}_{(\boldsymbol{x}^*)})\neq 0$. 若 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}$ 的特征值满足下述乘法非共振性假设：即对任意三个特征值都有 $\lambda_k\neq\lambda_i\lambda_j$(包括 $\lambda_k\neq\lambda_i^2$).

则存在包含 $\boldsymbol{x}^*$ 的开集 U 和包含原点的开集 V 使得映射 $\boldsymbol{F}$ 在 U 上与线性映射 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x}^*)}\boldsymbol{y}$ 在 V 上是 C^1 共轭的．

练习

12.1　线性映射的动力学

12.1.1　求下面矩阵所表示线性映射的特征值并画出相图：

(a) $\begin{bmatrix}1/2 & 1/8\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1/4 & 1/4\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}$　　(d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}0.4 & 0.2\\ -0.2 & 0.4\end{bmatrix}$　　(f) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

12.2　周期点的稳定性和分类

12.2.1　确定练习 12.1.1 中每个线性映射在原点处的稳定性类型．

12.2.2　证明由矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

确定的线性映射是不稳定的．

12.2.3　令

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y+x^2\\ 2x+3y\end{bmatrix}.$$

求不动点并分类：源、鞍点、汇或都不是．

12.2.4　令

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy+y\\ 3y-x\end{bmatrix}.$$

求不动点并分类：源、鞍点、汇或都不是．

12.2.5　令

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x+y^2\\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}y\end{bmatrix}.$$

求不动点并分类：源、鞍点、汇或都不是．

12.2.6 考虑 Hénon 映射.

a. 若(x_+, x_+)和(x_-, x_-)是两个不动点，证明

$$x_+ + x_- = -1 - b.$$

b. 若$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$是2-周期轨道，证明

$$1 + b = x_0 + y_0 = x_1 + y_1.$$

524

12.2.7 考虑 $b = -0.2$ 的 Hénon 映射.

a. 证明 $a \geq -0.16 = a_0$ 时存在不动点；求 $a = -0.16$ 时单个不动点的特征值.

b. 证明 $a > -0.16$ 时 $x_- < -0.4$，$\lambda_+ > 1$，且 $\lambda_- = -0.2/\lambda_+$满足 $-1 < \lambda_- < 0$，所以(x_-, x_-)是鞍点.

c. 对于不动点(x_+, x_+)，证明 $a = 0.48 = a_1$ 时特征值 $\lambda_- = -1$；利用特征值的连续性证明：$-0.16 < a < 0.48$ 时该不动点是吸引的.

d. 证明：$a > 0.48$ 时存在2-周期轨道，且此轨道上 x 的两值之积是 $0.8^2 - a$，即 $x_0 x_1 = 0.8^2 - a$. 提示：利用前面练习题中关于 Hénon 映射2-周期轨道的结论.

e. 证明2-周期轨道的特征方程是

$$\lambda^2 - (4x_0 x_1 + 0.4)\lambda + 0.04 = 0.$$

令 $-\mu = x_0 x_1$，证明：当

$$0 = 3\mu + 0.4\mu - 0.84$$

或

$$\mu = \frac{2.8}{6}$$

时有一个特征值是 -1. 并证明当 $a = 0.64 + 2.8/6 = a_2$ 时会出现这种情形；而且 $a_1 < a < a_2$ 时，2-周期轨道是吸引的.

12.2.8 设 $a > 0$，并定义从$\mathbb{R}^2$ 到其自身的映射 $\boldsymbol{F}_a$ 为

$$\boldsymbol{F}_a(x, y) = (1 - ax^2 + y, x).$$

a. 求 $\boldsymbol{F}_a$ 所有的2-周期点.

b. 求使2-周期轨道为鞍型的 a 的所有值.

12.3 稳定流形

12.3.1 考虑映射

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x - 4y^3 \\ 2y \end{bmatrix}.$$

a. 求 $\boldsymbol{F}$ 的逆.

b. 求在原点处不动点的稳定和不稳定流形.

12.3.2 考虑映射

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x - 4y^3 + 8z^2 \\ 2y \\ 4z \end{bmatrix}.$$

a. 求 $\boldsymbol{F}$ 的逆.

b. 求在原点处不动点的稳定和不稳定流形.

12.4 双曲环面自同构

12.4.1 求

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的特征向量．利用它们绘出平面内原点的局部稳定和不稳定流形．

12.4.2 矩阵

525

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的两个特征向量的斜率是无理数，解释这为什么迫使原点的稳定流形和不稳定流形在环面上稠密．提示：考虑这些流形与 $x=0$(模 1)的交，交点 x 坐标是无理数的倍数．

12.5 应用

12.5.1 考虑随机矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

求稳态概率分布 $\boldsymbol{p}^*$．

12.5.2 L. J. S. Allen[6] 对某些情形下提出的一个较简单的 SIS 传染病模型如下：

$$S_{n+1} = S_n\left(1 - \frac{\alpha}{N}I_n\right) + \gamma I_n$$

$$I_{n+1} = I_n\left(1 - \gamma + \frac{\alpha}{N}S_n\right),$$

其中，$N = I_0 + S_0$，且参数 α，$\gamma > 0$ 和 $\alpha < 1 + \gamma$.

a. 证明：$S_n + I_n = N$ 对所有的 $n \geqslant 0$ 都成立．

b. 证明：将 $S_n = N - I_n$ 代入原模型可得到满足 $p = 1 - \gamma + \alpha$ 的一元函数：

$$I_{n+1} = f(I_n) = pI_n\left(1 - \frac{\alpha}{pN}I_n\right).$$

c. 证明：不动点 $I = 0$ 是吸引的当且仅当 $R = \alpha/\gamma < 1$.

d. 证明：当 $R > 1$ 时，存在另一不动点 $I^* = N(p-1)/\alpha$. 再证当 $\alpha < 2 + \gamma$ 时该不动点是吸引的．

12.5.3 Ahemed、El-Misiery 和 Agiza[2] 提出的通货膨胀与失业关系模型如下：

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n - b(I_n - m) \\ I_n + (c-1)f(U_n) + f(U_n - b(I_n - m)) \end{bmatrix},$$

其中，$f(x) = -\alpha + \beta e^x$，$\alpha$，$\beta$，$m$，$b > 0$，且 $0 < c < 1$.

a. 证明：唯一的不动点是

$$\begin{bmatrix} U^* \\ I^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\alpha/\beta) \\ m \end{bmatrix}.$$

b. 令 Δ 是不动点处偏导数矩阵的行列式．求使 $0 < \Delta < 1$ 成立的参数值的范围.

c. 证明：不动点的特征值是

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{\alpha b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 b^2 - 4\alpha bc}.$$

d. 求使特征值为复数(即非实数)的参数值范围. 此时不动点是吸引的还是排斥的？提示：利用特征值的乘积等于行列式．

e. 假设取适当的参数使不动点处的特征值为实数．(i)证明如果 $\alpha b < 2$，则 $0 < \lambda_+ < 1$. (ii)证明如果 $\alpha b < 2$ 且 $\Delta > 2$，则 $\lambda_- > 0$. 对第二种情形，不动点是吸引的还是排斥的？

526

第 13 章　高维映射的不变集

本章我们将考虑含有两个或更多变量的映射的不变集. 用与一维的帐篷映射和逻辑斯谛映射 G 相类似的处理方法，用符号动力学来证明非线性映射的不变集中有一条稠密轨道. 我们从斯梅尔几何马蹄入手，它是在第 10 章所讨论的帐篷映射产生的康托尔集的二维模拟. 然后，用正规矩形来定义一个高维非线性映射的符号动力系统. 正如几何马蹄有一些矩形，其像彼此相交一样，一个映射被称作具有马尔可夫分解，如果有非线性的方形使得它们的像在这些方形的集合中被适当正规化. 环面自同构是最先用于构造马尔可夫分解的映射. 我们将给出一些简单的二维环面自同构的马尔可夫分割，由此来说明思想. 我们还建立正规矩形和跟踪(shadowing)(即在近似轨线附近找到一条实际轨线)之间的联系. 回溯到庞加莱的思想，我们证明稳定流形和不稳定流形的交是怎样导致马蹄的，即复杂的动力系统. 这些课题都涉及用符号动力系统描述二维和更高维的映射.

我们讨论高维映射的混沌吸引子：这些定义基本上与一维时的情况是一样的，但这些例子在有关概念及其产生的方式上给出了新的见解. 我们介绍了高维映射的李雅普诺夫指数，它比一维的情形更加复杂. 正如一维映射一样，李雅普诺夫指数给出了一个比初始值的敏感依靠性的定义更易计算的量. 我们还把李雅普诺夫指数和计算轨道结合起来给出混沌吸引子的判定方法，这种处理方式把在第 11 章给出的一维上的概念推广到了二维和更高维. 该讨论放宽了这些理论适用的范畴.

13.1　几何马蹄

为了开始讨论具有比周期轨更复杂的不变集的高维映射，我们给出一个例子，它在包含一不变集的区域中是分段仿射映射(即线性加一常数). 该例就像具有斜率 3 的帐篷映射一样，会产生一个标准的三分康托尔集. 斯梅尔(S. Smale)曾引入这一例子，作为因稳定流形和不稳定流形的同宿相交而产生不变集的一类范例，参见 13.3 节. 该映射在两条平行的带形区域上被取为是仿射的，在区域之间是通过几何描述来给出的，这样该映射在由平行的带形区域及其之间所成的区域上就有了定义了，然后，将其定义域延伸到全平面，使该区域以外的点(在映射的不断作用下)最终进入这一区域. 由于映射在全平面没有明确的公式，其性质也是从几何上来描述的，因此称此不变集为一个几何马蹄，有时也称为斯梅尔马蹄.

马蹄映射的描述

马蹄微分同胚 $\boldsymbol{F}$ 首先被定义在一个体育场型区域 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}'\cup\boldsymbol{E}_0\cup\boldsymbol{E}_1$ 上，其中

$$\boldsymbol{S}'=[-1/16,17/16]\times[-1/16,17/16]$$

为一方形域，$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{E}_1$ 分别为加在 $\boldsymbol{S}'$ 的顶端和底端的半圆形区域(参见图 13.1.1a). 在 $\boldsymbol{U}$ 上把该函数几何描述为两个函数的复合函数，即 $\boldsymbol{F}(x,\ y)=\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{L}(x,\ y))$：(i)从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性函数 $\boldsymbol{L}$ 使得第一坐标轴缩小 1/3 而第二坐标轴扩大 4 倍. (ii)第二个函数 $\boldsymbol{F}_0$ 把区域 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})$ 弯曲成

为马蹄形的像，并把此像置于 U 内，参见图 13.1.1b．该函数的命名就是因为 $F(U)$ 具有马蹄形．它能够通过一定的方式扩展到整个平面使得其他的点最终进入区域 U．

为了给出一个更精确的描述，把区域 S' 分为三个子区域

$$H'_0 = \{(x,y) \in S' : -1/16 \leqslant y \leqslant 1/4\},$$

$$G' = \{(x,y) \in S' : 1/4 \leqslant y \leqslant 3/4\},$$

$$H'_1 = \{(x,y) \in S' : 3/4 \leqslant y \leqslant 17/16\}.$$

马蹄微分同胚 F 可表示为

528

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}x, 4y\right) & (x,y) \in H'_0, \\ \left(1 - \dfrac{1}{3}x, 4 - 4y\right) & (x,y) \in H'_1, \end{cases}$$

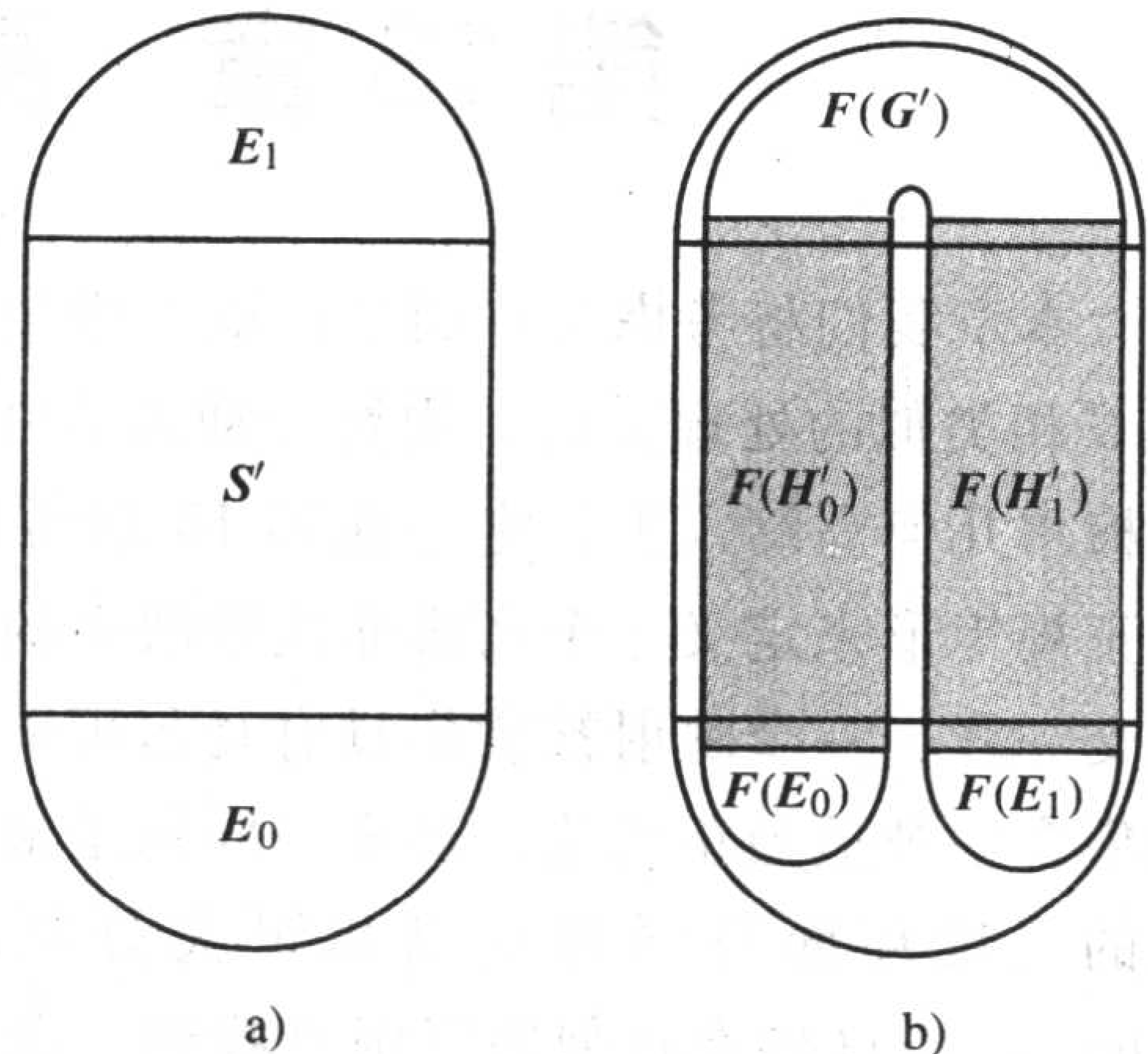


图 13.1.1　区域 $U = S' \cup E_0 \cup E_1$ 和几何马蹄的像 $F(U)$

且 F 以非线性形式在区域 G' 中弯曲．区域 E_0 通过一个压缩将其映入自身，因此该映射具有唯一的吸引不动点 p_0，且其吸引区域包含 E_0．区域 E_1 被映入 E_0，因此也在 p_0 的吸引域中．在分析中，非常重要的一点是，在 $H'_0 \cup H'_1$ 中垂直方向被映射到垂直方向，而水平方向被映射到水平方向．

因为满足 $-1/16 \leqslant y < 0$ 或 $1 < y \leqslant 17/16$ 的点 (x, y) 在向前迭代下离开 S'，而满足 $-1/16 \leqslant x < 0$ 或 $1 < x \leqslant 17/16$ 的点 (x, y) 在向后迭代下离开 S'，因此在所有迭代下都保持在 S' 内的点必位于单位正方形 $S = [0, 1] \times [0, 1]$ 中，即

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} F^j(S') = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} F^j(S).$$

因此，我们只需要在这单位正方形上展开讨论．

S 中有如下的两个水平带，它们的像也在 S 中：

$$H_0 = H'_0 \cap S = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/4\},$$

$$H_1 = H'_1 \cap S = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 3/4 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

这两个水平带在 F 下的像为 S 中的两个垂直的带，分别为

$$V_0 = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1/3, 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

$$V_1 = \{(x,y) : 2/3 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

函数 F 将 H_0 映射为 V_0，结果是第一坐标缩小 1/3 而第二坐标扩大 4 倍，而将 H_1 映射为 V_1，结果是在旋转 180 度后第一坐标缩小 1/3 而第二坐标扩大 4 倍．参见图 13.1.2．

529

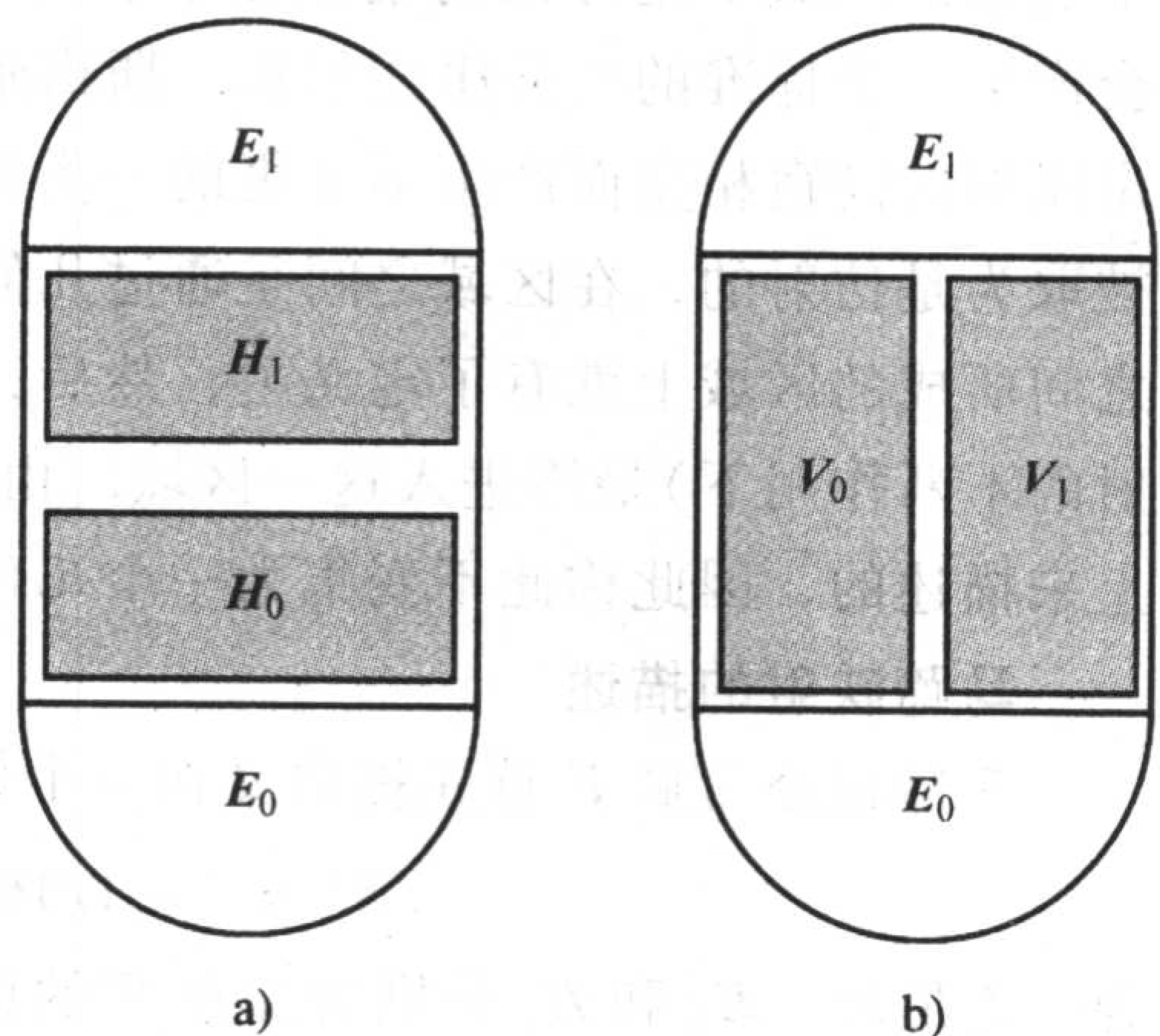


图 13.1.2　S 中的垂直带和水平带

函数 F 的反函数为

$$F^{-1}(x,y)=\begin{cases}\left(3x,\dfrac{1}{4}y\right) & (x,y)\in V_0,\\ \left(3-3x,1-\dfrac{1}{4}y\right) & (x,y)\in V_1,\end{cases}$$

且 F^{-1}将 V_0 映射到 H_0 上，将 V_1 映射到 H_1 上.

马蹄映射的不变集

在介绍其符号动力学之前，我们先指出那些对所有迭代均保留在 S 中的点. 引入迭代的有限交集的记号：

$$S_m^n=\bigcap_{j=m}^{n}F^j(S)=\{x:F^{-j}(x)\in S,m\leqslant j\leqslant n\}.$$

下面的引理描述了取不同的 m 和 n 值时的集合 S_m^n.

引理 13.1.1 (a)对于向前迭代，S_0^n 为 2^n 个宽度均为$(1/3)^n$ 的竖直带的并，S_0^∞ 为一个由竖直线段构成的康托尔集 $C_1\times[0,1]$.

(b)对于向后迭代，S_{-n}^0为 2^n 个宽度均为$(1/4)^n$ 的水平带的并，$S_{-\infty}^0$为一个由水平线段构成的康托尔集$[0,1]\times C_2$.

(c)对所有迭代均保留在 S 中的点都位于不变集

$$\Lambda=S_{-\infty}^{\infty}=C_1\times C_2,$$

它是两个康托尔集的笛卡儿积.

证明 由定义可以看出，

$$S_0^1=S\cap F(S)=V_0\cup V_1,$$

该集合为两个宽度均为 1/3 的竖直带的并.

530

把集合 $F(S)$代入交集两次，我们有

$$\begin{aligned}S_0^2&=[S\cap F(S)]\cap[F(S)\cap F^2(S)]\\&=[S\cap F(S)]\cap F[S\cap F(S)]\\&=S_0^1\cap F(S_0^1).\end{aligned}$$

由 $S_0^1=V_0\cup V_1$ 和 $F(H_j)=V_j$，有

$$\begin{aligned}S_0^2&=[V_0\cap F(S_0^1)]\cup[V_1\cap F(S_0^1)]\\&=F(H_0\cap S_0^1)\cup F(H_1\cap S_0^1).\end{aligned}$$

在 H_0 上，映射在水平方向上压缩 1/3，在竖直方向上扩张 4 倍；因此，集合 $F(H_0\cap S_0^1)$在 V_0 中有两个垂直带，其宽度是 S_0^1 中带宽的 1/3，即其宽度为$(1/3)^2$，而且这两个带都是从 $y=0$ 到达 $y=1$ 的. 类似地，在 H_1 上，映射在水平方向上压缩 1/3，在竖直方向上扩张 4 倍，然后旋转 180 度；因此，集合 $F(H_1\cap S_0^1)$在 V_1 中有两个宽度均为$(1/3)^2$ 的垂直带. 结合起来可知，S_0^2 有 $2+2=2^2$ 个宽度均为$(1/3)^2$ 的垂直带，且都是从 $y=0$ 到达 $y=1$，参见图 13.1.3.

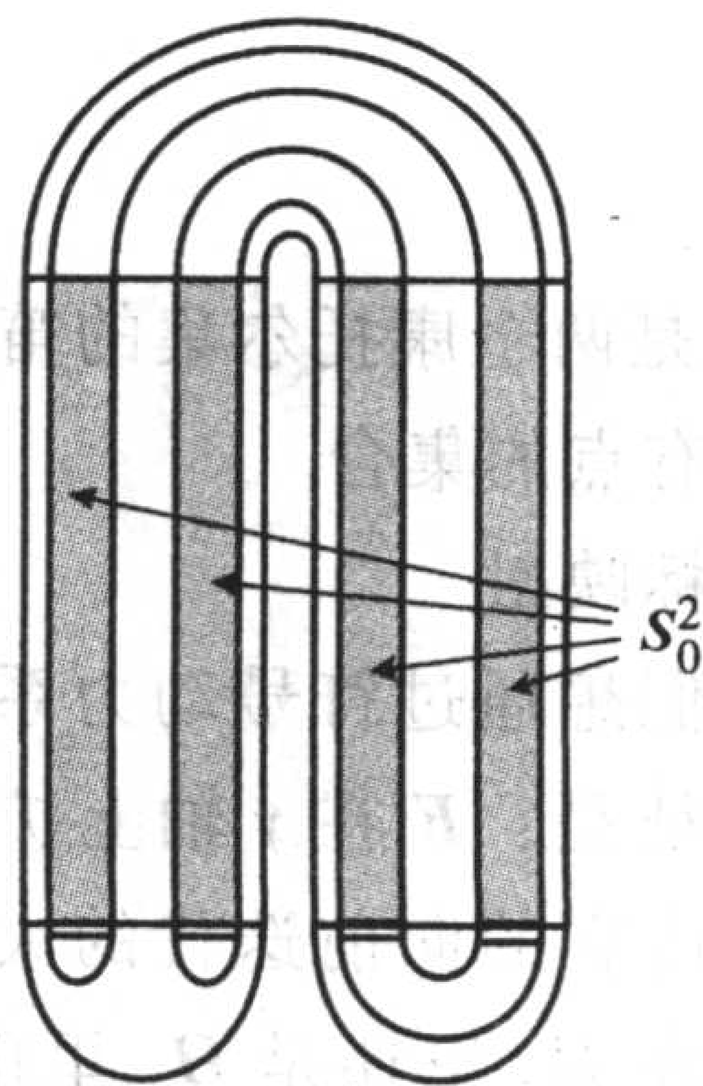


图 13.1.3 集合 $S_0^2=F^2(S)\cap F(S)\cap S$

用归纳法继续下去，在下一步，S_0^n 是由垂直带组 S_0^{n-1} 和 H_0 相交并取其像，及 S_0^{n-1} 和 H_1 相交并取其像而得到的. 这两个集合各有 2^{n-1}个垂直带，合起来有 $2^{n-1}+2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ 个垂直带. 由归纳法，S_0^{n-1} 中的各个带宽度均为$(1/3)^{n-1}$，因此，它们像的宽度为 $1/3(1/3)^{n-1}=(1/3)^n$. 带 $H_j\cap S_0^{n-1}$ 均是从 H_j 的顶端到底端的，所以它们的像都是从 $y=0$ 到 $y=1$. 更正式的推导如下：

$$\begin{aligned} S_0^n &= [S\cap F(S)]\cap[F(S)\cap\cdots\cap F^n(S)] \\ &= S_0^1\cap F(S_0^{n-1}) \\ &= [V_0\cap F(S_0^{n-1})]\cup[V_1\cap F(S_0^{n-1})] \\ &= F(H_0\cap S_0^{n-1})\cup F(H_1\cap S_0^{n-1}). \end{aligned}$$

令 n 趋于无穷并取极限，可以看出 S_0^∞ 是垂直线段的康托尔集，即

$$S_0^\infty = C_1\times[0,1].$$

现在考虑负向迭代，由于 F^{-1}将 V_0 映射到 H_0 上，而将 V_1 映射到 H_1 上，

$$\begin{aligned} S_{-1}^0 &= S\cap F^{-1}(S) = F^{-1}(F(S))\cap F^{-1}(S) \\ &= F^{-1}(S_0^1) = F^{-1}(V_0\cup V_1) \\ &= H_0\cup H_1. \end{aligned}$$

531

该集合是两个高度均为 1/4 的平行带的并集. 由归纳法可知

$$\begin{aligned} S_{-n}^0 &= [F^{-n}(S)\cap\cdots\cap F^{-1}(S)]\cap[F^{-1}(S)\cap S] \\ &= F^{-1}(S_{-n+1}^0)\cap S_{-1}^0 \\ &= [F^{-1}(S_{-n+1}^0)\cap H_0]\cup[F^{-1}(S_{-n+1}^0)\cap H_1] \\ &= F^{-1}(S_{-n+1}^0\cap V_0)\cup F^{-1}(S_{-n+1}^0\cap V_1) \end{aligned}$$

是 $2\cdot 2^{n-1}=2^n$ 个水平带的并. 由于 F^{-1}在垂直方向上压缩 1/4，在水平方向上扩张 3 倍，因此 S_{-n}^0中每个带的高度为 $1/4(1/4)^{n-1}=(1/4)^n$，且从 $x=0$ 延伸至 $x=1$. 令 n 趋于无穷并取极限，可知 $S_{-\infty}^0$ 是水平线段的康托尔集，即 $S_{-\infty}^0=[0,1]\times C_2$.

其次，对向前迭代和向后迭代取交集得到

$$\begin{aligned} \Lambda &= S_{-\infty}^\infty = S_0^\infty\cap S_{-\infty}^0 \\ &= C_1\times[0,1]\cap[0,1]\times C_2 \\ &= C_1\times C_2. \end{aligned}$$

集合 Λ 是两个康托尔集的笛卡儿积，且对 F 和 F^{-1}均为不变的. 它也是对所有迭代均保留在 S 内的所有点的集合. ■

迭标映射

我们想通过符号动力系统来理解函数 F 在其不变集 Λ 上的性质. 能够给出这些描述的主要特征是：F 在 y 轴上扩张而在 x 轴上压缩. 对于在所有迭代下都保留在 S 中的某点，它的 y 轴由它的向前迭代的大体位置决定，就像具有斜率 3 的帐篷映射一样，迭代的大体位置根据它在 H_0 里还是 H_1 里由 0 和 1 来确定. 函数 F 在 x 轴方向压缩，而其反函数则在该方向扩张，因此对于所有迭代均保留在 S 内的一点，其 x 坐标由它的向后迭代的位置决定. 一

次向后迭代的位置可通过对负指标赋以 0 或 1 来给出，这个由 0 和 1 所成的双边无穷序列就借助于符号动力学完全刻画了这一点. 利用这些符号序列可证明 Λ 中周期点和稠密轨道的存在性.

集合 $\boldsymbol{S}\setminus[\boldsymbol{H}_0\cup\boldsymbol{H}_1]$ 中的点在首次迭代下离开 $\boldsymbol{S}$，因此 $\Lambda\subset\boldsymbol{H}_0\cup\boldsymbol{H}_1$. 类似地，欲使点 $\boldsymbol{x}$ 位于 Λ 中，必须对于所有的 j，$\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})$ 都在 $\boldsymbol{H}_0\cup\boldsymbol{H}_1$ 中. 对于每个 j，不论正负，根据哪一个水平带包含 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})$ 来规定 s_j 为 0 还是 1；即

$$s_j=\begin{cases}0 & \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_0\\ 1 & \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_1,\end{cases}$$

即对所有的 j，$\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_{s_j}$. 由于 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_{s_j}$，所以 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{H}_{s_j})$，且

$$\boldsymbol{x}\in\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{H}_{s_j}).$$

这样就得到由 0 和 1 所组成的一个双边无穷符号序列：

$$\boldsymbol{s}=\cdots s_{-2}s_{-1}.\,s_0s_1s_2\cdots,$$

532

“小数点”把 j 值为 0 或正数的 s_j 与 j 值为负的 s_j 分开. 用包围 s_0 的框来标注当前位置也许会更好，但我们仍然坚持使用这种更易书写的符号.

迭标映射

$$h(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{s}=\cdots s_{-2}s_{-1}.\,s_0s_1s_2\cdots$$

把不变集 Λ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 通过规则“$\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_{s_j}$，对所有的 j”映射为一个双边无穷的 0、1 序列.

所有这些双边无穷序列组成的集合称为两个符号的*符号空间*或*全位移*，记为 Σ_2，其中 2 表示有两个符号(而 Σ_2^+ 用来表示两个符号的单边序列). Σ_2 上的*位移函数* σ 被定义为

$$\boldsymbol{t}=\sigma(\boldsymbol{s})=\sigma(\cdots s_{-2}s_{-1}.\,s_0s_1s_2\cdots)=\cdots s_{-2}s_{-1}s_0.\,s_1s_2\cdots$$

或

$$\text{对所有的 } j\text{，有 } t_j=s_{j+1}.$$

符号序列与轨道

从 Σ_2 中取一个序列 $\boldsymbol{s}$，可得交集

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{H}_{s_j})=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_{s_j},\ -\infty<j<\infty\}.$$

上面等式成立是因为 $\boldsymbol{x}$ 属于 $\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{H}_{s_j})$ 当且仅当 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})$ 属于 $\boldsymbol{H}_{s_j}$. 对于任意一个符号序列，我们将看到该集合非空且是单个点. 对于任意选取的 s_0，s_1，…，s_{n-1}，令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{.s_0s_1\cdots s_{n-1}}&=\bigcap_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{H}_{s_j})\\&=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_{s_j},0\leqslant j\leqslant n-1\}.\end{aligned}$$

注意到零位置左边的小数点表示对应当前位置的符号，由 $\boldsymbol{B}_{.s_0}$ 的定义可得

$$\boldsymbol{B}_{.0}=\boldsymbol{H}_0\text{ 且 }\boldsymbol{B}_{.1}=\boldsymbol{H}_1.$$

由于 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 将 $\boldsymbol{V}_0$ 映射到 $\boldsymbol{B}_{.0}=\boldsymbol{H}_0$，且在第二坐标方向上压缩 1/4，我们有

$$\boldsymbol{B}_{.00}=\boldsymbol{H}_0\cap\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{H}_0)=\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{V}_0\cap\boldsymbol{H}_0),$$

$$B_{.01}=H_0\cap F^{-1}(H_1)=F^{-1}(V_0\cap H_1),$$

每个水平带 H_i 与 V_0 相交，而且它的像是这样一个带，其高为 H_i 高的 1/4，即$(1/4)^2$. 类似地，

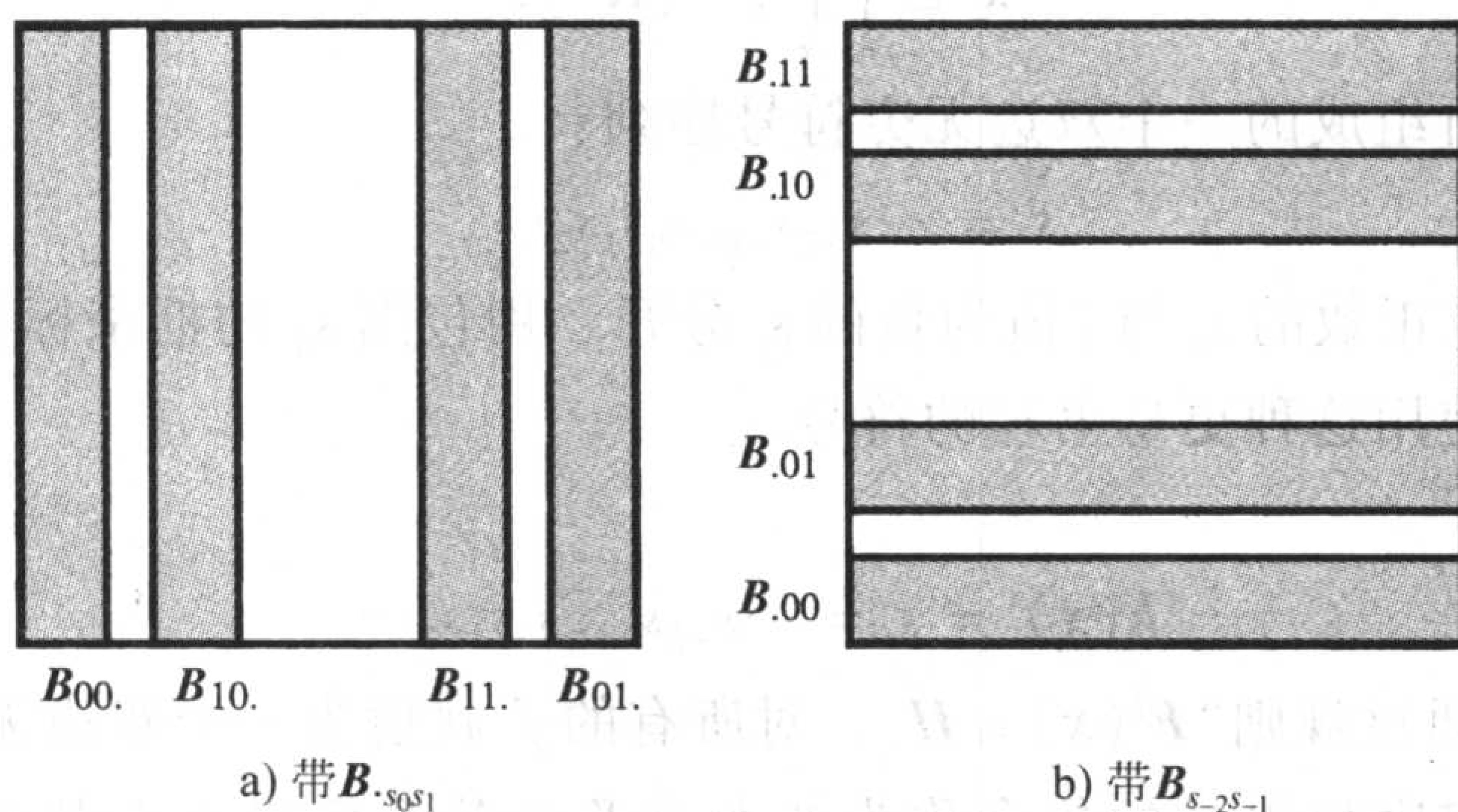
$$B_{.10}=H_1\cap F^{-1}(H_0)=F^{-1}(V_1\cap H_0),$$
$$B_{.11}=H_1\cap F^{-1}(H_1)=F^{-1}(V_1\cap H_1),$$

每个带的高度也是$(1/4)^2$. 综合起来，得到

$$S^0_{-2}=B_{.00}\cup B_{.01}\cup B_{.10}\cup B_{.11}.$$

每个水平带由两个符号标记，它们分别给出带的当前位置和第一次迭代的位置，参见图 13.1.4b.

533



a) 带$B_{.s_0s_1}$　　b) 带$B_{s_{-2}s_{-1}}$

图　13.1.4

由归纳法继续下去，我们可看出

$$B_{.s_0s_1\cdots s_{n-1}}=H_{s_0}\cap F^{-1}(B_{.s_1\cdots s_{n-1}})=F^{-1}(V_{s_0}\cap B_{.s_1\cdots s_{n-1}})$$

是一个高度为

$$\frac{1}{4}(B_{.s_1\cdots s_{n-1}}\text{ 的高度})=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

的带. 所有这些带的并给出 S^0_{-n}:

$$S^0_{-n}=\bigcup_{s_0,s_1,\cdots,s_{n-1}=0,1}B_{.s_0\cdots s_{n-1}},$$

每个水平带由 n 个符号标记，分别给出带的当前位置和 $n-1$ 次迭代的位置.

我们现在对于负指标重复刚才的步骤. 对任意选定的 s_{-1}, s_{-2}, $\cdots$, s_{-n}, 令

$$B_{s_{-n}\cdots s_{-1}.}=\bigcap_{j=-n}^{-1}F^{-j}(H_{s_j})=\bigcap_{j=1}^{n}F^{j}(H_{s_{-j}})$$
$$=\{x:F^j(x)\in H_{s_j},\ -n\leqslant j\leqslant -1\}.$$

注意到 $B_{s_{-1}.}=F(H_{s_{-1}})=V_{s_{-1}}$是宽为 1/3 的垂直带，由归纳法，由于 F 将 H_i 映射到 V_i，且在第一坐标方向上压缩 1/3，得到

$$
\begin{aligned}
B_{s_{-n}s_{-n+1}\cdots s_{-1}.} &= F(H_{s_{-1}}) \cap F^2(H_{s_{-2}}) \cap \cdots \cap F^n(H_{s_{-n}}) \\
&= F(H_{s_{-1}}) \cap F(F(H_{s_{-2}}) \cap \cdots \cap F^{n-1}(H_{s_{-n}})) \\
&= F(H_{s_{-1}}) \cap F(B_{s_{-n}\cdots s_{-2}.}) \\
&= F(H_{s_{-1}} \cap B_{s_{-n}\cdots s_{-2}.})
\end{aligned}
$$

534

是一个带，且宽度为

$$\frac{1}{3}(B_{s_{-n}\cdots s_{-2}.}\text{ 的宽度}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

再者，所有这些垂直带的并给出 S_0^n，即

$$S_n^0 = \bigcup_{s_{-1},\cdots,s_{-n}=0,1} B_{s_{-n}\cdots s_{-1}.},$$

每个水平带由 n 个符号标记，分别表示当前位置和前 $n-1$ 个向后迭代的位置，参见图 13.1.4a.

结合向前迭代和向后迭代可知

$$B_{s_{-n}s_{-n+1}\cdots s_{-1}.s_0\cdots s_{n-1}} = \bigcap_{j=-n}^{n-1} F^{-j}(H_{s_j}) = B_{s_{-n}s_{-n+1}\cdots s_{-1}.} \cap B_{.s_0\cdots s_{n-1}}$$

是一个面积为$\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 的小块. 这个块包含它的边界，因此在通常意义下是闭的，参见图 13.1.5.

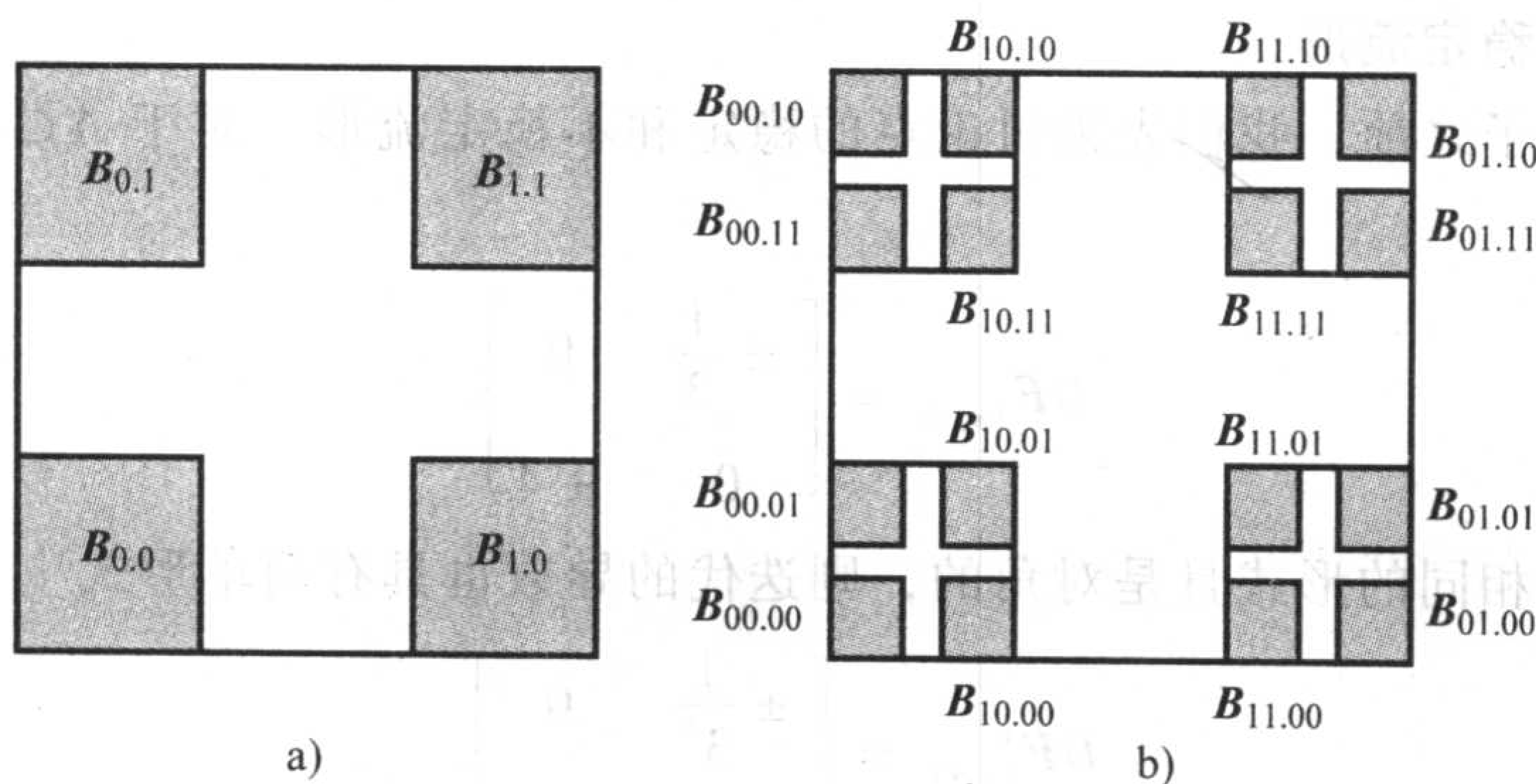


图 13.1.5　小块 $B_{s_{-1}.s_0}$ 与小块 $B_{s_{-2}s_{-1}.s_0s_1}$

当 n 趋于无穷大时取极限得到

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} F^{-j}(H_{s_j}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{s_{-n}\cdots s_{-1}.s_0\cdots s_{n-1}}$$

是非空的，因为它是一列套在一起的有界闭集(紧集)的交集. 这些集套在一起是因为

$$B_{s_{-n-1}\cdots s_{-1}.s_0\cdots s_n} \subset B_{s_{-n}\cdots s_{-1}.s_0\cdots s_{n-1}}.$$

当 n 趋于无穷大时，小块在两个方向的长度都趋于 0，因此极限为一点. 记该点为 $k(\boldsymbol{s})$：

$$\{k(\boldsymbol{s})\} = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} F^{-j}(H_{s_j}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{s_{-n}\cdots s_{-1}.s_0\cdots s_{n-1}}.$$

535

函数 k 是从符号空间 Σ_2 映射到平面的不变集 Λ 上，它是已经定义过的迭标映射 h 的逆. 若 $\boldsymbol{x}$

为 Λ 中的一点且 $s=h(\boldsymbol{x})$，则点 $\boldsymbol{x}$ 在 $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{H}_{s_j})$ 中. 因此，由唯一性，$\boldsymbol{x}=k(s)$ 或

$$k \circ h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \text{ 且 } h \circ k(s) = s.$$

这证明了两个函数都是一一对应.

下面的定理总结了映射 h 和 k 的性质.

定理 13.1.2　令 $\boldsymbol{F}$ 为前面描述的具有不变集 Λ 的几何马蹄映射，h 为 Λ 到 Σ_2 的迭标映射，而 k 为已定义的 Σ_2 到 Λ 的映射，那么下列性质成立：

(a) k 和 h 在 Σ_2 与 Λ 之间是一一对应的；按照 10.8 节上定义的 Σ_2 上的距离，映射 k 和 h 都是连续的，因此都是同胚.

(b) 映射 k 是一个共轭，即 $\boldsymbol{F} \circ k = k \circ \sigma$.

(c) 符号 s 为周期的当且仅当 $k(s)$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下是周期的.

(d) 在 Λ 中有一点 $\boldsymbol{x}^*$ 使得正向轨道 $\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{x}^*)$ 和负向轨道 $\mathcal{O}_F^-(\boldsymbol{x}^*)$ 在 Λ 中都是稠密的.

(e) 当限制在 Λ 时，函数 $\boldsymbol{F}$ 对初始值有敏感依赖性.

上述定理中的结论(a)~(c)和(e)可由符号动力系统的构造和一维函数的处理方法证得(对照定理 10.3.1 和 10.5.5)；对于结论(d)，令 s^* 为满足 $s^*_{-j}=s^*_j$ 的双边无穷序列且设正的符号与定理 10.3.4 中关于一维帐篷映射所用的一样. 可证 s^* 的正向和负向轨道都是稠密的，详细证明留给读者.

稳定流形和不稳定流形

在结束这个例子之前，我们先来讨论点的稳定和不稳定流形. 对于 $\Lambda \subset \boldsymbol{S}$ 中的点，其导数都具有形式

$$D\boldsymbol{F}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \pm 4 \end{bmatrix}.$$

由于这些矩阵都有相同的形式且是对角的，则迭代的导数也具有简单形式

$$D\boldsymbol{F}^k_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{3^k} & 0 \\ 0 & \pm 4^k \end{bmatrix}.$$

因此，过 Λ 中一点 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2)$ 的水平线段上的所有点在向前迭代中是压缩的，且

$$W^s(\boldsymbol{p},\boldsymbol{F}) \supset [-1/16, 17/16] \times \{p_2\}.$$

这条线段是稳定流形的一部分，尽管没有特定的半径；因此，我们称它为*局部稳定流形*，记为

$$W^s_{\text{loc}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{F}) = [-1/16, 17/16] \times \{p_2\}.$$

利用向后迭代，竖直线段是压缩的，因此过 Λ 中一点 $\boldsymbol{p}$ 的*局部不稳定流形*是一条垂直线段

$$W^u_{\text{loc}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{F}) = \{p_1\} \times [-1/16, 17/16].$$

我们用 Λ 中点的不稳定流形的并来表示不变集 Λ 的不稳定流形

$$W^u(\Lambda,\boldsymbol{F}) = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} W^u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}).$$

536

如果用收缩域 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}'\cup\boldsymbol{E}_0\cup\boldsymbol{E}_1$，则

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} F^j(U) = W^u(\Lambda, F) \cup \{p_0\},$$

其中 p_0 为 E_0 中吸引的不动点(参见 11.2 和 13.4 节中关于收缩域的讨论). 显然，Λ 中点的局部不稳定流形在邻域 U 中. 由于该收缩域是正不变的，故所有的不稳定流形包含在 U 的每次向前迭代中，所以也包含在它们的交集中. U 中的其他点或在 Λ 中的点的稳定流形里或在 p_0 的稳定流形里. 这个集合是一个吸引集但不是不可分割的，因为 Λ 和 p_0 都是不变真子集，而且都具有 13.4 节中给出的不可分割的定义中所定类型的孤立邻域.

吸引域边界

12.3.2 节讨论了一个简单的例子，它的吸引不动点的吸引域的边界是一个鞍不动点的稳定流形. 本节给出这样一个例子，其两个吸引不动点的吸引域之间的边界是一个马蹄的稳定流形，因此该吸引域的边界更加复杂.

我们所考虑的映射与几何马蹄相像，一个方形域被它的像穿过自身三次. 令 F 为一个使得方形域 S 的像穿过 S 自身三次的映射，如图 13.1.6 所示. 我们把映射从 S 往下延拓到 E_1，往上延拓到 E_2 使得 F 把每个 E_j 压缩到它自身，并这样确定它使得每个 E_j 包含一个不动点汇 p_j，且 $W^s(p_j; F) \supset E_j$. 属于 S 且第一迭代也属于 S 的点的集合由三个水平子带组成，使得

$$S \cap F^{-1}(S) = H_1 \cup H_2 \cup H_3.$$

这些水平带互相分离，中间的两个间隙分别记为 G_1 和 G_2 使得 $F(G_j) \subset E_j$，参见图 13.1.7. 537

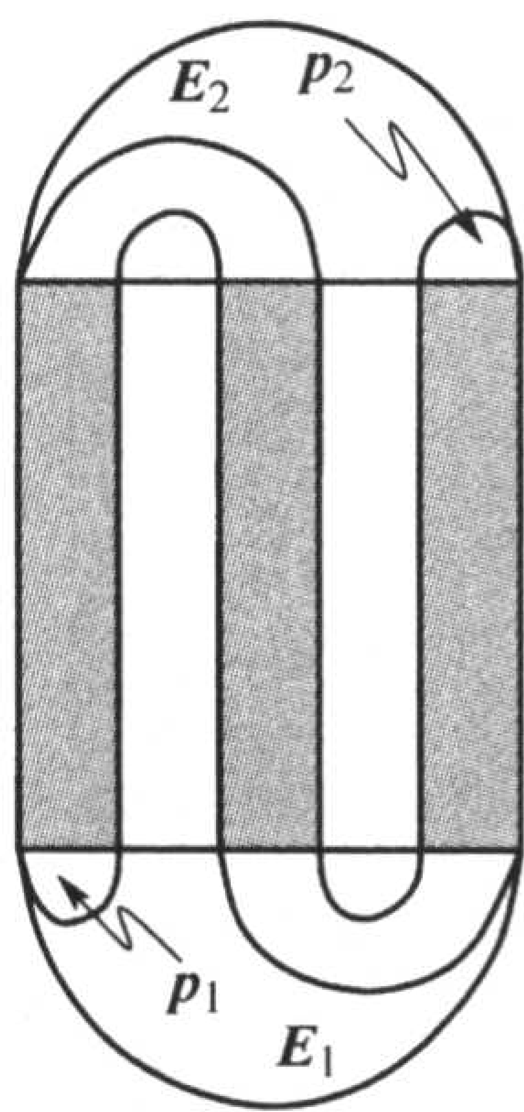


图 13.1.6　含三条带的马蹄

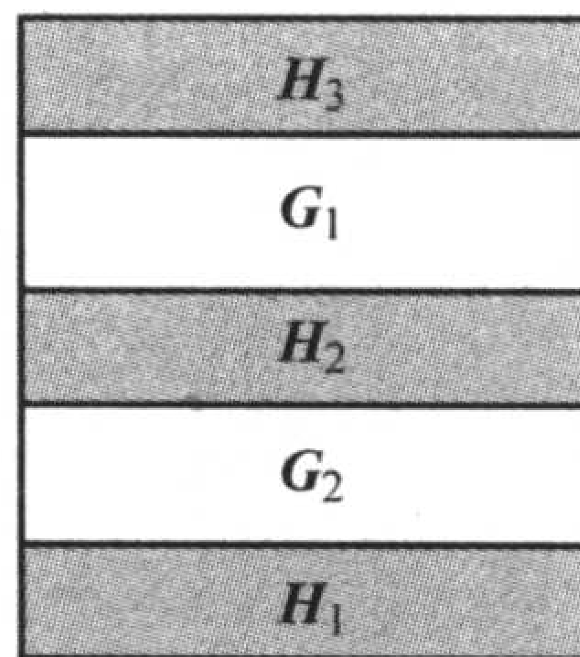


图 13.1.7　水平带及其间隙

属于 S 且前两次迭代也属于 S 的点的集合由 3^2 个水平带组成，且被

$$G_1 \cup G_2 \cup (H_1 \cap F^{-1}(G_1)) \cup (H_1 \cap F^{-1}(G_2)) \cup (H_2 \cap F^{-1}(G_1)) \cup (H_2 \cap F^{-1}(G_2)) \cup (H_3 \cap F^{-1}(G_1)) \cup (H_3 \cap F^{-1}(G_2))$$

分隔开.

所有向后迭代的交集给出了这样点的集合，其所有向前迭代均保留在 S 中的，即

$$\bigcap_{j=-\infty}^{0} F^j(S) = [0,1] \times C_2,$$

其中 C_2 是一个康托尔集，它是在每一步利用三个子区间所生成的. 同样，集合 S 的向前迭代给出了这样的垂直带，其点的向后迭代保留在 S 中的，即

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} F^j(S) = C_1 \times [0,1],$$

其中 C_1 是一个康托尔集，它也是在每一步利用三个子区间所生成的. 那么，

$$\Lambda = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} F^j(S) = C_1 \times C_2$$

是对所有迭代均保留在 S 中的点的集合.

集合 Λ 中的点的局部稳定流形是水平区间 $[0, 1] \times \{y\}$. 如果记该不变集的稳定流形为

$$W^s(\Lambda, F) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x, F),$$

则

$$W^s(\Lambda) \cap S = [0,1] \times C_2 = \bigcap_{j=-\infty}^{0} F^j(S).$$

点 p_i 的吸引域包含 E_i 中所有的点，由于 G_i 映射到 E_i 中，故得到

$$E_i \cup G_i \subset W^s(p_i).$$

该吸引域也包含映入 $E_i \cup G_i$ 中的所有的点，因此它也包含

538

$$F^{-k}(E_i \cup G_i) \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} F^{-j}(H_{s_j})$$

中的点，其中 $s_j = 1, 2, 3$. 由于集合

$$F^{-k}(E_1 \cup G_1) \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} F^{-j}(H_{s_j})$$

和

$$F^{-k}(E_2 \cup G_2) \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} F^{-j}(H_{s_j})$$

在

$$F^{-k}(H_2) \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} F^{-j}(H_{s_j})$$

的两边，则每个吸引区域 $W^s(p_i)$ 的边界均包含 $W^s(\Lambda) \cap S$：

$$\mathrm{bd}(W^s(p_1)) \cap \mathrm{bd}(W^s(p_2)) \supset W^s(\Lambda) \cap S = [0,1] \times C_2.$$

这样，Λ 的稳定流形包含一个由曲线所成的康托尔集，并形成了两个汇的吸引区域之间的边界，而且把趋于一个汇的点与趋于另一个汇的点分离开来. 因此，实际上捕捉马蹄不变集及其不稳定流形都是很困难的，但作为两个汇的吸引域之间的边界，其不稳定流形仍然是可以观测的.

13.2 符号动力学

本节的目的是来确定使得矩形 $\boldsymbol{H}_i$ 在几何马蹄映射下彼此相交的基本性质，从而可对非线性函数得到类似的结论. 具有这些性质的若干矩形之集称为马尔可夫分割.

一维的马尔可夫分割是闭区间之集 $\{\boldsymbol{I}_j\}_{j=1}^{k}$，使得若 $f(\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{I}_j)\neq\varnothing$，则 $f(\boldsymbol{I}_i)\supset\boldsymbol{I}_j$. 二维的马尔可夫分割为闭集 $\{\boldsymbol{R}_j\}_{j=1}^{k}$ 的集合，使得若 $f(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)\neq\varnothing$，则 $\boldsymbol{R}_i$ 的某个方向上有一个区间，其在 $\boldsymbol{R}_j$ 中相应方向上是扩张的并穿过这一区间，同时 $\boldsymbol{R}_i$ 的另一方向上的有一个区间，其在 $\boldsymbol{R}_j$ 中这一方向是收缩的并包含在这一区间里. 通常这些条件涉及非线性映射的导数和一个称为双曲性的条件，该条件是鞍不动点的推广. 我们只根据映射自身的作用来给出这一条件.

只有一个矩形时，我们至少想找到一个点，它在迭代下留在 $\boldsymbol{R}$ 中，还想知道 $\boldsymbol{R}$ 中有一个不动点. 若矩形不只一个，我们至少想找到一个点，它历经所有的矩形，若矩形序列 $\boldsymbol{R}_j$ 是周期的，我们至少想找到一个周期点，它历经该矩形序列.

在 13.2.1 节，作为范例，我们使用的矩形在第一坐标方向上是收缩的，而在第二坐标方向上是扩张的；在 13.2.2 节，我们考虑这些范例矩形在同胚映射之下的像. 后一部分在对非线性映射的应用时是必需的. 另外，13.2.1 节的重点在于找不动点，而 13.2.2 节给出推导不变集上符号动力学的方法.

13.2.1 正规矩形

首先对二维情况给出一些定义，然后简要考虑高维的情形.　539

二维情形

我们使用第一坐标收缩而第二坐标扩张的规范矩形. 第一个定义很长，而且涉及所选矩形的性质和映射的相容性.

定义 13.2.1　假定 $\boldsymbol{F}$ 为一从 $\mathbb{R}^2$ 到它自身的连续满射，且其逆映射也连续(即 $\boldsymbol{F}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的同胚). 矩形 $\boldsymbol{R}=[a_1,\ b_1]\times[a_2,\ b_2]$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下的像称为是正规的，如果可分别选定扩张和压缩方向使得下列四个条件满足. 下列条件是在选取第一坐标收缩，第二坐标扩张的情形下给出的. 把 $\boldsymbol{R}$ 的边界分为映入 $\boldsymbol{R}$ 内的部分

$$\partial^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{R}) = (\{a_1\}\times[a_2,b_2])\cup(\{b_1\}\times[a_2,b_2])$$

和映出 $\boldsymbol{R}$ 外的部分

$$\partial^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{R}) = ([a_1,b_1]\times\{a_2\})\cup([a_1,b_1]\times\{b_2\}).$$

在所选情形下，$\partial^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{R})$ 为两侧边而 $\partial^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{R})$ 为顶边和底边(在第一坐标扩张的情形下，只需在边界部分的定义中交换 1 和 2). 为标明所选定的扩张和收缩方向，我们称 $\boldsymbol{R}$ 为 M 矩形. 四个条件如下：

(a) 交集 $\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R})$ 是一连通块.

(b) 像 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ 的内部与映入的边 $\partial^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{R})$ 不相交，即 $\mathrm{int}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}))\cap\partial^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{R})=\varnothing$.

(c) 映出的顶边和底边的像 $\boldsymbol{F}(\partial^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{R}))$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的内部不相交，即 $\boldsymbol{F}(\partial^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{R}))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R})=\varnothing$.

(d)对任意的 $x\in[a_1, b_1]$，每条垂直线段 $\{x\}\times[a_2, b_2]$ 的像从 $\boldsymbol{R}$ 的底部伸展到顶部，并分离两侧边；特别地，存在一个依赖于 x 的子区间 $[a'_x, b'_x]\subset[a_2, b_2]$，使得

$$\boldsymbol{F}(\{x\}\times[a'_x,b'_x])\subset \boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{F}(x,a'_x)\in\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}),\quad 且$$

$$\boldsymbol{F}(x,b'_x)\in\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}),$$

其中两个像点 $\boldsymbol{F}(x, a'_x)$ 和 $\boldsymbol{F}(x, b'_x)$，一个在 $\boldsymbol{R}$ 的顶边，一个在其底边上. 因此，我们可以假定 $\boldsymbol{F}$ 把 $\boldsymbol{R}$ 的扩张方向映得与 $\boldsymbol{R}$ 在该方向相交. 参见图 13.2.1.

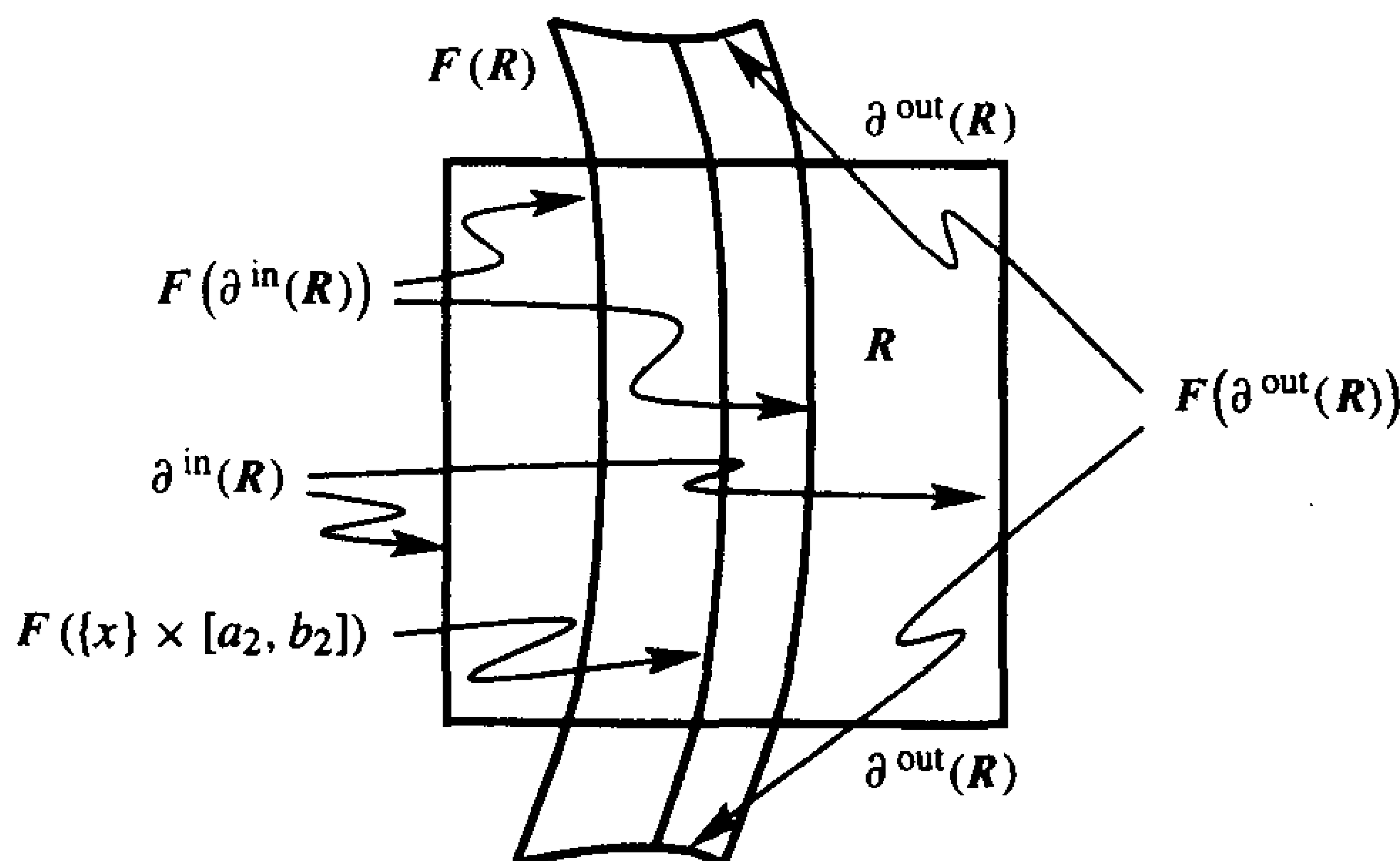


图 13.2.1　M 矩形 $\boldsymbol{R}$ 的正规像

注 13.2.2　使(a)成立的一个较易验证也更强的假设是

(a1)交集 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})\cap\boldsymbol{R}$ 为一连通块.

然而，当我们在考虑双曲环面自同构和螺线管时，如果我们用最初给出的更弱的假设则可以使用较少的 M 矩形.

540

注 13.2.3　如果 $\boldsymbol{R}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下的像是正规的，则可证明 $\boldsymbol{R}$ 在 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 下的像也是正规的.

(a′)交集 $\boldsymbol{F}^{-1}(\text{int}(\boldsymbol{R}))\cap\text{int}(\boldsymbol{R})$ 是一连通块.

(b′)逆像 $\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R})$ 的内部与 $\boldsymbol{R}$ 的外出的顶边和底边不相交，即

$$\text{int}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R}))\cap\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R})=\varnothing.$$

(c′)映入边的逆像 $\boldsymbol{F}^{-1}(\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}))$ 与 M 矩形 $\boldsymbol{R}$ 的内部不相交，即

$$\boldsymbol{F}^{-1}(\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}))\cap\text{int}(\boldsymbol{R})=\varnothing.$$

(d′)对任意的 $y\in[a_2, b_2]$，每个水平线段 $[a_1, b_1]\times\{y\}$ 在 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 下的像从 $\boldsymbol{R}$ 的右边伸展到左边，把顶和底分离开来；特别地，存在 $[a_1, b_1]$ 的依赖于 y 的子区间 $[a'_y, b'_y]$，使得

$$\boldsymbol{F}^{-1}([a'_y,b'_y]\times\{y\})\subset\boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}(a'_y,y)\in\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}),$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}(b'_y,y)\in\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}),$$

其中两个逆像点在 $\boldsymbol{R}$ 的两个相对的边上.

现在，我们假定 M 矩形 $\boldsymbol{R}$ 的像是正规的. 在下述讨论中，我们做假设(a1)而不是(a)，

这样我们可以避免使用内部和闭包．在下一小节关于马尔可夫分割的讨论中，我们再回到更一般的假设．$\boldsymbol{R}$ 的第二次迭代是一个分离两边的垂直带(参见图 13.2.2)：

$$\bigcap_{j=0}^{2} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) \cap \boldsymbol{F}^2(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})).$$

用归纳法继续下去，可证明

$$\bigcap_{j=0}^{n} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})\right)$$

是一个分离两边的垂直带，从而

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{n} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})$$

也是这样的带．这个无限交通常是一条连接 $\boldsymbol{R}$ 的顶部和底部的曲线．

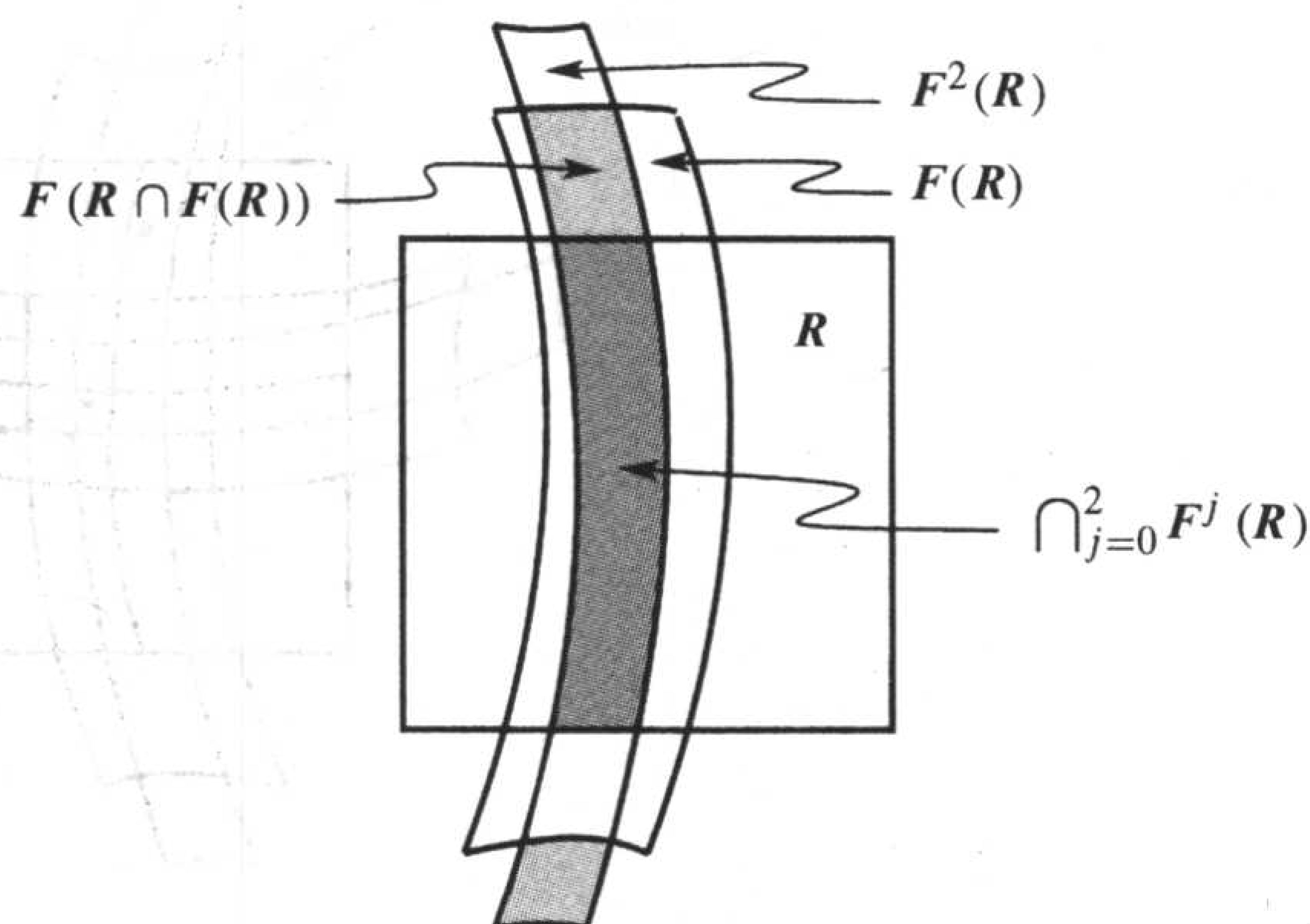


图 13.2.2　交集 $\bigcap_{j=0}^{2} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})$

541

对于向后迭代，$\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R})$ 为一个分离顶部和底部的水平带．第二次向后迭代仍是一个分离顶部和底部的水平带(参见图 13.2.3)，即

$$\bigcap_{j=-2}^{0} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R}) \cap \boldsymbol{F}^{-2}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R})).$$

用归纳法继续下去，我们可以看到

$$\bigcap_{j=-n}^{0} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{F}^{-1}\left(\bigcap_{j=-n+1}^{0} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})\right)$$

也是一个分离开顶部和底部的水平带．无限交集

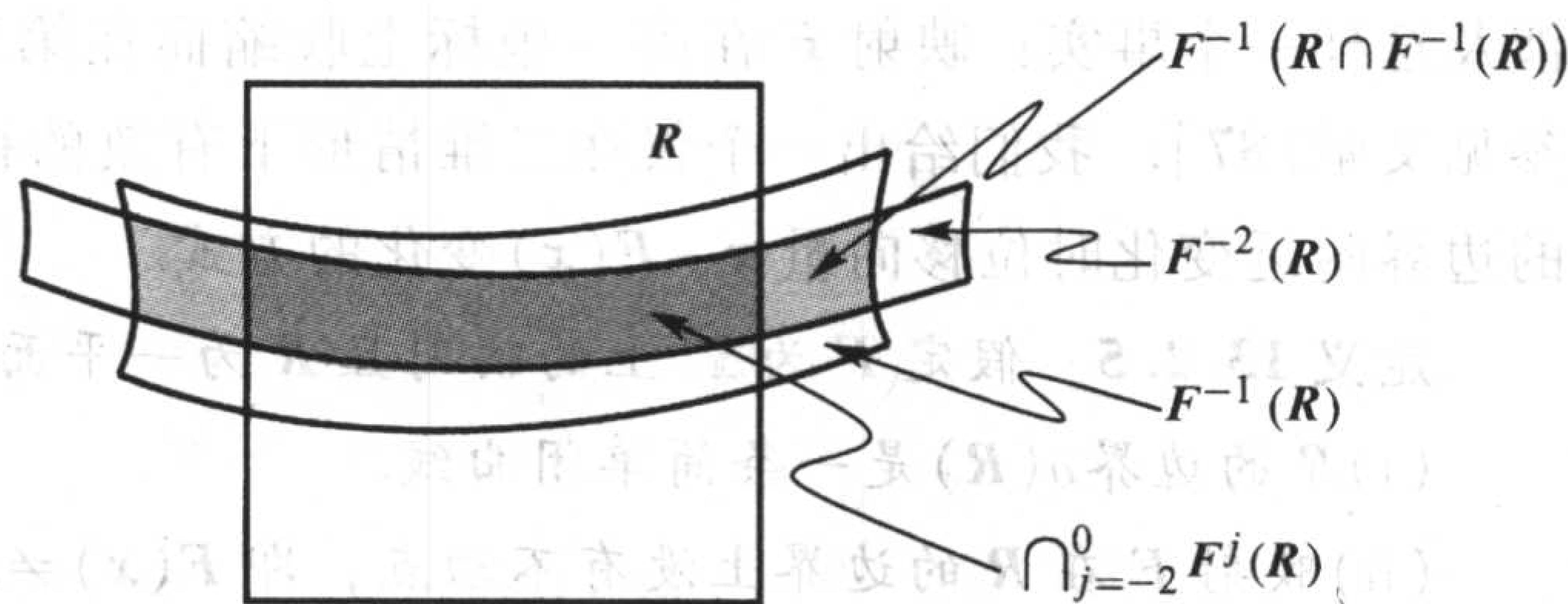


图 13.2.3　交集 $\bigcap_{j=-2}^{0} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})$

542

$$\bigcap_{j=-\infty}^{0} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=-n}^{0} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R}),$$

同样如此，而且在最好的情形下是一条连接两边的曲线．参见图 13.2.4.

因为 $\bigcap_{j=-\infty}^{0} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})$ 把顶部和底部分开而 $\bigcap_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})$ 把两侧边分开，因此它们一定会相交而且 $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})$ 非空，参见图 13.2.4．我们用下面的定理总结这些结论．

定理 13.2.4　假定 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个同胚且使某 M 矩形 $\boldsymbol{R}$ 的像是正规的，则交集 $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{R})$ 非空，因此至少有一点 $\boldsymbol{x}_0$ 使得 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x}_0)$ 对所有的 j 都在 $\boldsymbol{R}$ 中．

543

二维映射的不动点

我们想要核实由定理 13.2.4 给出的非空的交集中确有一个不动点，在拓扑中有这样的一

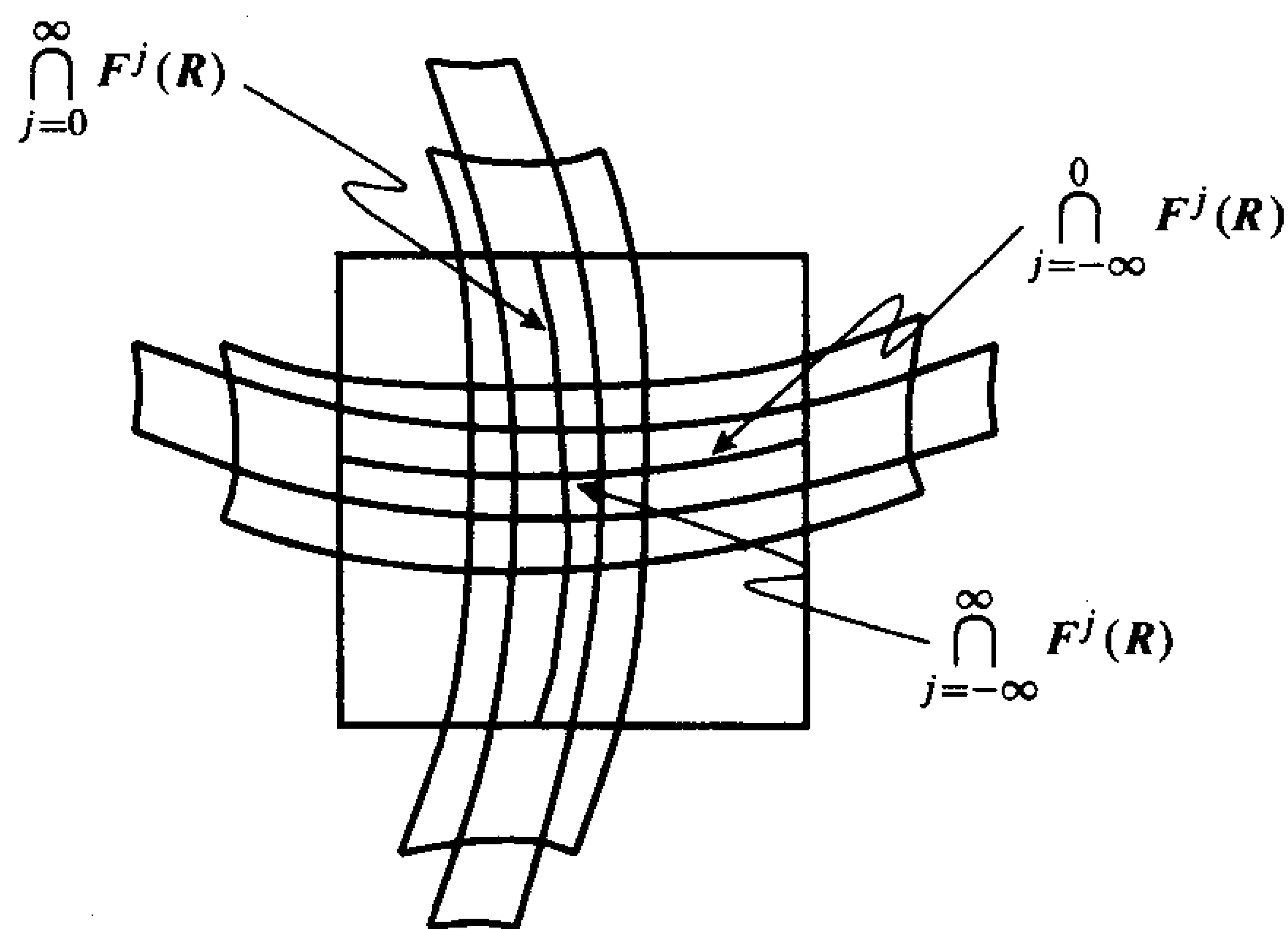


图 13.2.4 交集 $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} F^j(R)$

般理论，能够证实这一点.（这些集合满足 Lefschetz 性质.）有一些条件需要用到 F 的导数，就像稳定流形定理的证明中所给出的，可用来证明上述交集为一个点，从而为不动点. 这些假设涉及这样一个事实：映射 F 在第一坐标上收缩而在第二坐标上扩张. 这些思想的详细叙述可参见文献[**87**]. 我们给出一个仅在二维情形下有效的拓扑论证，是考虑当点 x 在一个 M 矩形的边界附近变化时位移向量 $x-F(x)$ 变化的方式.

定义 13.2.5 假定 F 为 $\mathbb{R}^2$ 上的映射且 R 为一平面区域，使得下列性质成立：

(i) R 的边界 $\partial(R)$ 是一条简单闭曲线.

(ii) 映射 F 在 R 的边界上没有不动点，即 $F(x)\neq x$，$x\in\partial(R)$.

定义一个诱导映射 G：从边界 $\partial(R)$ 到由 $G(x)=\dfrac{x-F(x)}{\|x-F(x)\|}$ 确定的单位圆. 当点 x 沿着边界逆时针方向变化一周，计算 $G(x)$ 的角度的增量. 它必定是初始角加上某个整数 i 乘以 2π，称这个整数 i 为 F 对区域 R 的指标. 这个整数可以是正数、零或负数，依赖于边界被遍历后位移向量相同方向环绕，没有环绕或者反方向环绕.

考虑图 13.2.5a 中给出的正规 M 矩形的像. 在图中，矩形的顶点分别标为 x_1，x_2，x_3 和 x_4. 在 x_1 和 x_2 之间的边上的一点用 1 和 2 之间的一个数字（如 $x_{1.5}$）来表示，图的 b 部分给出了这些点在指标映射 G 下的像. 由于矩形的边界是逆时针方向遍历的，而边界的像顺时针方向遍历了一次，因此指标为 -1. 尽管在某些坐标上有回转，但指标仍然是非零的. 若一个映射有一源，在此源的特征值 $\lambda_1>\lambda_2>1$，则指标为 1.

某矩形的像可能与正规矩形的像具有相同形状，但不是正规的：它可能指标为 0. 544 图 13.2.6 中所示的映射指标为 0，因为 G 的像没有环绕整个圆周. 该类映射不必在 R 内有不动点. 以图 13.2.6a 的像为例，则 $R\cap F(R)$ 的像为阴影区域. 由于 $R\cap F(R)$ 的像与它自身是不相交的，因此不可能有不动点，而且

$$R\cap F(R)\cap F^2(R)=\varnothing,$$

所以没有轨线对所有迭代都保留在矩形里. 这种映射的一个例子是

$$F(x,y) = \left(-\frac{1}{2}y, 8x+6\right)$$

及 M 矩形[-1, 1] × [-1, 1], 唯一不动点是(-3/5, 6/5), 它位于矩形[-1, 1] × [-1, 1]的外部.

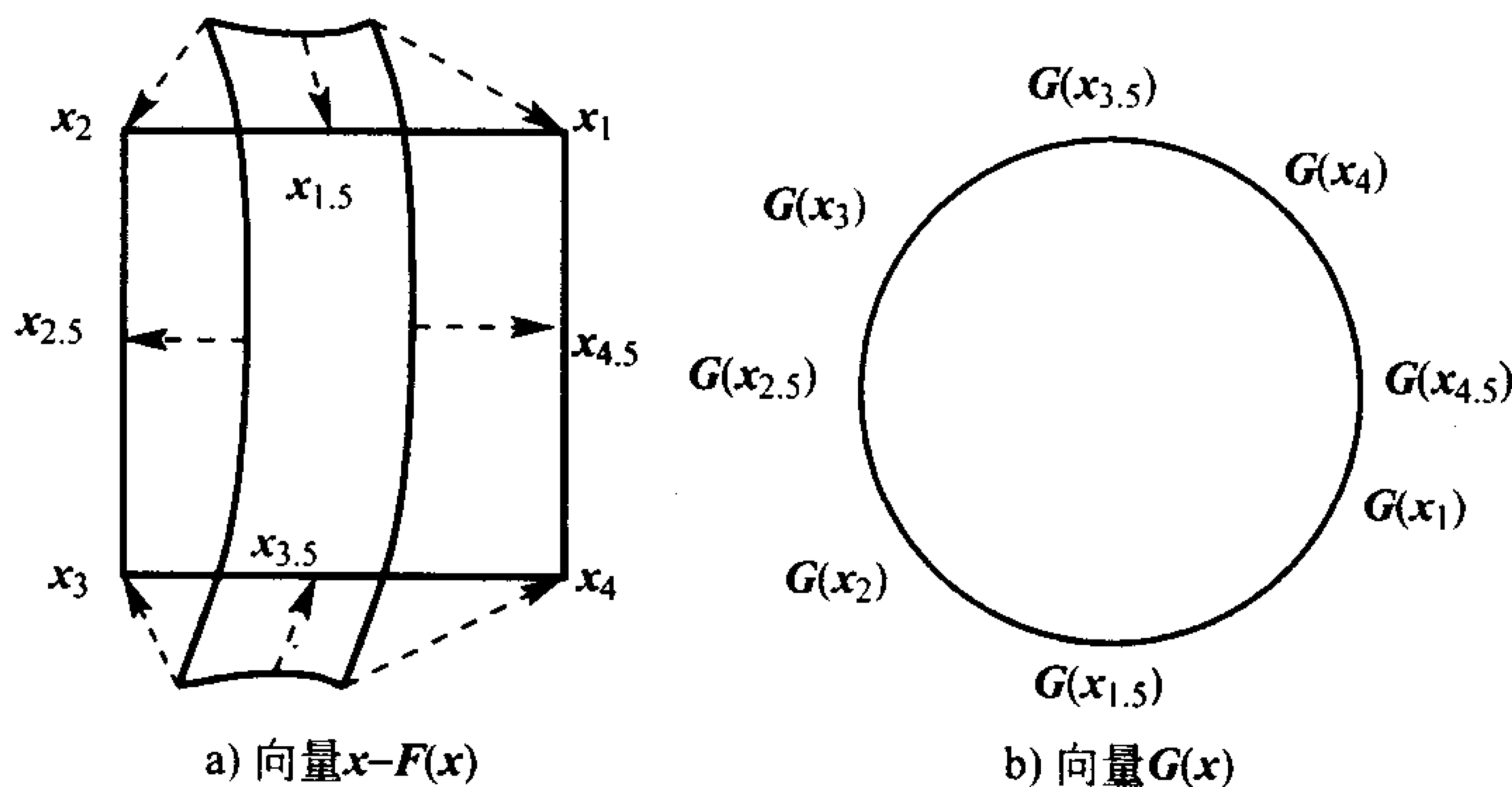


图 13.2.5　正规 M 矩形的指标

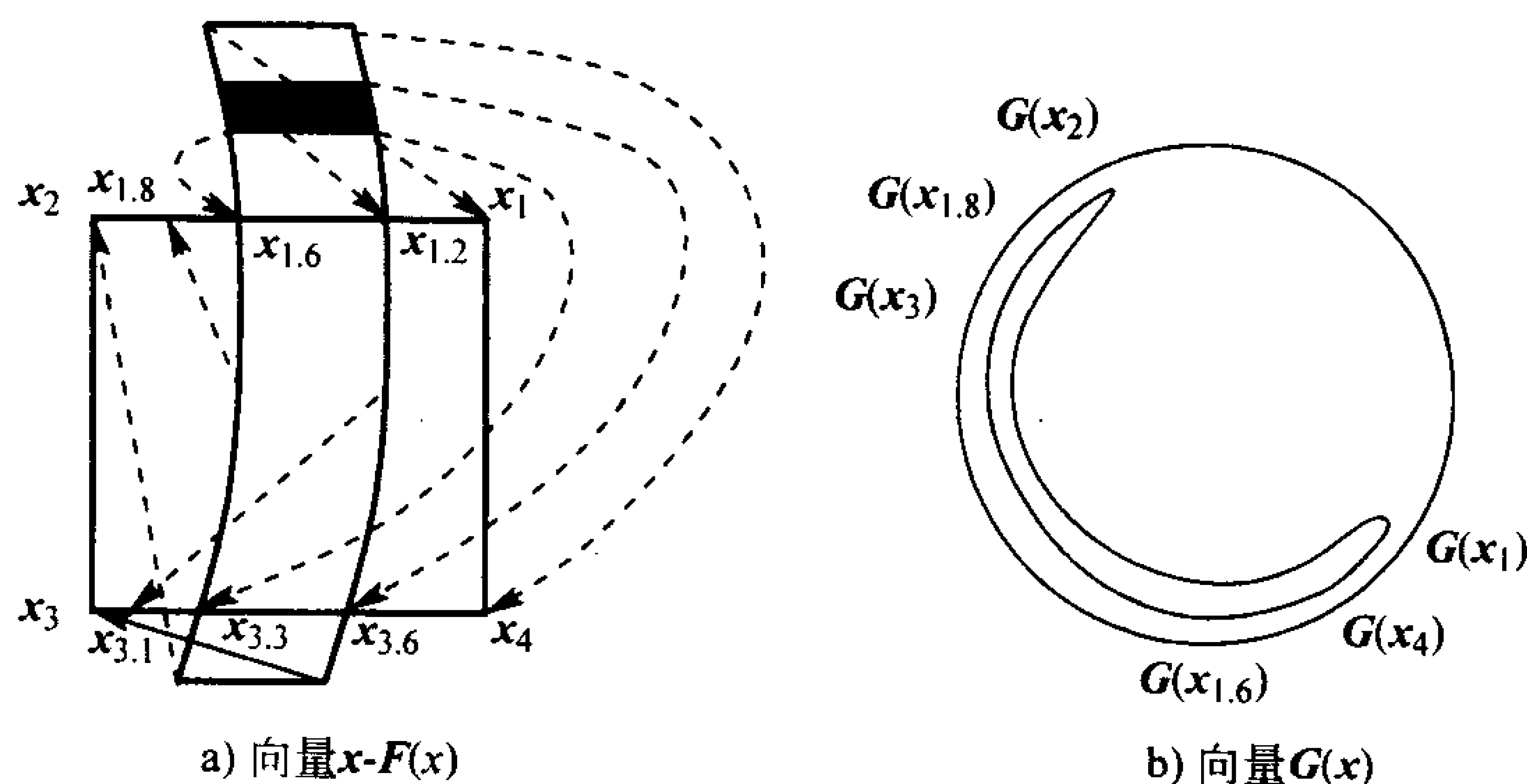


图 13.2.6　非正规 M 矩形的指标

下面的结论对其像是正规的任意的 M 矩形都是成立的.

定理 13.2.6　令 $\boldsymbol{F}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一个同胚, 它有一个像为正规的 M 矩形 $\boldsymbol{R}$. 则(i)$\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 的边界上有一个不动点(指标没有定义), 或(ii)$\boldsymbol{R}$ 对 $\boldsymbol{F}$ 的指标不为 0.

下面的定理把指标和 $\boldsymbol{R}$ 中的不动点联系起来.

定理 13.2.7　假定 $\boldsymbol{F}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一个同胚, 使得边界为一条简单闭曲线的区域 $\boldsymbol{R}$ 有非零指标, 那么 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内有一个不动点.

特别地, 若一个 M 矩形 $\boldsymbol{R}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下的像为正规的, 则 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有一个不动点.

证明　我们假设 $\boldsymbol{R}$ 中没有不动点, 然后得到矛盾.

对于一个 M 矩形, 我们可以把 $\boldsymbol{R}$ 的边界收缩为一点. 假设 $\gamma_s(t)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的一族单参数闭曲线, 使得当 t 从 0 变到 2π 时, $\gamma_0(t)$ 沿着 $\boldsymbol{R}$ 的边界逆时针旋转一周, 对所有的 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 有

$\gamma_s(0)=\gamma_s(2\pi)$，且 $\gamma_1(t)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一点（与 t 无关）．若 $\boldsymbol{R}$ 中无不动点，则对每个 s 值（$0\leqslant s\leqslant 1$），我们可定义函数

$$\boldsymbol{G}_s(t)=\frac{\gamma_s(t)-\boldsymbol{F}(\gamma_s(t))}{\|\gamma_s(t)-\boldsymbol{F}(\gamma_s(t))\|}$$

和

545

$$\theta_s(t)=\text{angle}(\boldsymbol{G}_s(t)).$$

由指标的定义，$\theta_0(2\pi)-\theta_0(0)=k2\pi$，其中 k 为指标．当 s 从 0 变化到 1，$\dfrac{\theta_s(2\pi)}{2\pi}$必定恒为某整数，所以它必定等于 $k\neq 0$．然而，$\gamma_1(t)$ 不动，因此 $\boldsymbol{G}_1(t)$ 为常数，因而 $\theta_1(2\pi)-\theta_1(0)=0$．这个矛盾证明了 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中必有不动点． ■

高维情形

我们现在转向高维正规 M 矩形的定义．给定一个同胚，M 矩形的选择依赖于扩张和收缩方向的个数．在扩张和收缩的子空间原点附近我们仍用球形邻域，但也可以用矩形区域来代替．（在应用于马尔可夫分割时，则用这种标准的 M 矩形的同胚像．）对整数 k 和正数 $r>0$，令

$$\overline{\boldsymbol{B}}^k(\boldsymbol{0},r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^k:\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r\}$$

和

$$\partial(\overline{\boldsymbol{B}}^k(\boldsymbol{0},r))=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^k:\|\boldsymbol{x}\|=r\}$$

为$\mathbb{R}^k$ 中的闭球及其边界．

定义 13.2.8　假设 $\boldsymbol{F}$ 为从$\mathbb{R}^n$ 到自身的一个同胚，一个 M 矩形 $\boldsymbol{R}=\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{0},r_1)\times\overline{\boldsymbol{B}}^{n_2}(\boldsymbol{0},r_2)$（其中 $n_1+n_2=n$）的像称为是正规的，如果下列四个条件满足．我们把 $\boldsymbol{R}$ 的边界分为映入 $\boldsymbol{R}$ 的部分

$$\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R})=\partial(\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{0},r_1))\times\overline{\boldsymbol{B}}^{n_2}(\boldsymbol{0},r_1)$$

和映出 $\boldsymbol{R}$ 外的部分

$$\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R})=\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{x},r_{n_1})\times\partial(\overline{\boldsymbol{B}}^{n_2}(\boldsymbol{0},r_2)).$$

四个条件如下：

(a) 交集 $\boldsymbol{F}(\text{int}(\boldsymbol{R}))\cap\text{int}(\boldsymbol{R})$ 是一连通块．

(b) 像 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ 的内部与 $\boldsymbol{R}$ 的边界的映入 $\boldsymbol{R}$ 的部分不相交，即

$$\text{int}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}))\cap\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R})=\varnothing.$$

(c) $\boldsymbol{R}$ 的边界映出 $\boldsymbol{R}$ 外的部分的像 $\boldsymbol{F}(\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}))$ 与 M 矩形 $\boldsymbol{R}$ 的内部不相交，即

$$\boldsymbol{F}(\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}))\cap\text{int}(\boldsymbol{R})=\varnothing.$$

(d) 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{0},r_1)$，垂直盘面 $\{\boldsymbol{x}\}\times\overline{\boldsymbol{B}}^{n_2}(\boldsymbol{0},r_2)$ 的像在所有扩张方向上延伸并与 $\boldsymbol{R}$ 相交．

参见图 13.2.1 中二维情形的图．

有很多不同的方法可以使得有关垂直圆盘的像在扩张方向上延伸穿过这个 M 矩形的条件更加精确．方法之一是利用导数给出假设；另一个方法是根据代数拓扑中的“同调论”，同调

推广了我们在二维情形下使用的指标的思想；第三个方法是最近由 M. Gidea 和 P. Zgliczyński 发现的，见文献[**39**]或[**38**]. 他们假设非线性映射可以变换为标准形式.

(d1)存在一个从$[0,1]\times\boldsymbol{R}$到$\mathbb{R}^n$的连续映射$G$，满足下列三个条件：

(i)$\boldsymbol{G}(0,z)=\boldsymbol{F}(z)$.

546

(ii)对任意$0\leqslant s\leqslant 1$，$\boldsymbol{R}$在$\boldsymbol{G}(s,\cdot)$下的像满足前面的条件(a)~(c)，即

$$\boldsymbol{G}(s,\mathrm{int}(\boldsymbol{R}))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R})\text{ 是连通的},$$

$$\mathrm{int}(\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{R}))\cap\partial^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{R})=\varnothing,$$

$$\boldsymbol{G}(s,\partial^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{R}))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R})=\varnothing.$$

(iii)$s=1$时的映射在扩张方向上是一个仿射映射，即

$$\boldsymbol{G}(1,(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2),$$

其中$\boldsymbol{A}$为$n_2\times n_2$阶矩阵且$\mathrm{sign}(\det(\boldsymbol{A}))\neq 0$.

因为形变没有使像离开$\boldsymbol{R}$或通过其边，所以映射$\boldsymbol{G}(0,\cdot)$与$\boldsymbol{G}(1,\cdot)$以同样的方式穿过 M 矩形.

由这些假设可知，反函数$\boldsymbol{F}^{-1}$满足这些条件，只不过扩张和收缩方向转换一下而已.

(a′)交集$\boldsymbol{F}^{-1}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R})$是一连通块.

(b′)像$\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R})$的内部与$\boldsymbol{R}$的边界向外的部分不相交，即

$$\mathrm{int}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R}))\cap\partial^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{R})=\varnothing.$$

(c′)映入$\boldsymbol{R}$的边界部分在$\boldsymbol{F}^{-1}$下的像与 M 矩形$\boldsymbol{R}$的内部不相交，即

$$\boldsymbol{F}^{-1}(\partial^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{R}))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R})=\varnothing.$$

(d′)对任意$\boldsymbol{y}\in\overline{\boldsymbol{B}}^{n_2}(\boldsymbol{0},r_2)$，水平盘面$\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{0},r_1)\times\{\boldsymbol{y}\}$在$\boldsymbol{F}^{-1}$下的像在所有收缩方向上延伸与$\boldsymbol{R}$相交.

对定义经过这些改变后，定理 13.2.4 和定理 13.2.7 仍然成立. 为了在高维情形下证明这些结论，我们需要使用代数拓扑中较先进的思想，或假设映射在不同方向是一个扩张方向或一个收缩.（详见文献[**87**].）

13.2.2 马尔可夫分割

对于一个非线性映射，我们选取的方形可能并不像上一节中给出的那样简单. 因此，我们允许一个矩形的像由有限多个集合组成.

定义 13.2.9 假设$\boldsymbol{F}$为$\mathbb{R}^n$上的一个同胚，且n_1和n_2为两个满足$n_1+n_2=n$的正整数，$\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{0},1)$是$\mathbb{R}^{n_1}$上的一个闭球，$\overline{\boldsymbol{B}}^{n_2}(\boldsymbol{0},1)$是$\mathbb{R}^{n_2}$上的一个闭球. 那么，M 矩形

$$\boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{0},1)\times\overline{\boldsymbol{B}}^{n_2}(\boldsymbol{0},1)$$

是马尔可夫矩形之范例. 在二维情形下，$n_1=n_2=1$，$\boldsymbol{B}=[-1,1]\times[-1,1]$是一个正方形.

$\mathbb{R}^n$上有限个闭集$\{\boldsymbol{R}_j\}_{j=1}^{J}$称为是关于$\boldsymbol{F}$的一个马尔可夫分割，或称为具有马尔可夫性质，如果下列条件满足：

547

1. 每个集合$\boldsymbol{R}_j$是范矩形$\boldsymbol{B}$的同胚像(即存在一个同胚ϕ_j从$\boldsymbol{B}$映射到$\boldsymbol{R}_j$上)，$\boldsymbol{B}$的边界上

不同部分在 ϕ_j 下的像可由类似于 $\boldsymbol{R}_j$ 的标记来表示：

$$\partial^{in}(\boldsymbol{R}_j) = \phi_j(\partial^{in}(\boldsymbol{B}))\ 和\ \partial^{out}(\boldsymbol{R}_j) = \phi_j(\partial^{out}(\boldsymbol{B})).$$

2. $\boldsymbol{R}_i$ 的内部是互不相交的，$\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i)\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)=\varnothing$，$i\neq j$.

3. 如果 $\boldsymbol{R}_i$ 内部的像与 $\boldsymbol{R}_j$ 的内部相交，即 $\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)\neq\varnothing$，那么 $\boldsymbol{B}$ 在 $\phi_j^{-1}\circ\boldsymbol{F}\circ\phi_i$ 下的像是正规的（在这个意义下，我们说 $\boldsymbol{R}_i$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下的像关于 $\boldsymbol{R}_j$ 是正规的），因而满足下面四个条件：

(a) 交集 $\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)$ 是一连通块.

(b) 像 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_i)$ 的内部与边界映入的部分 $\partial^{in}(\boldsymbol{R}_j)$ 不相交，即

$$\mathrm{int}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_i)) \cap \partial^{in}(\boldsymbol{R}_j) = \varnothing.$$

(c) 映出的边界部分的像 $\boldsymbol{F}(\partial^{out}(\boldsymbol{R}_i))$ 与下一个 M 矩形 $\boldsymbol{R}_j$ 的内部不相交，即

$$\boldsymbol{F}(\partial^{out}(\boldsymbol{R})) \cap \mathrm{int}(\boldsymbol{R}) = \varnothing.$$

(d) 对任意 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{B}}^{n_1}(\boldsymbol{0},1)$，$\phi_i(\{\boldsymbol{x}\times\overline{\boldsymbol{B}}^{N_2}(\boldsymbol{0},1)\})$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下的像在所有扩张方向上延伸穿过 $\boldsymbol{R}_j$.

马尔可夫分割中的集合 $\boldsymbol{R}_i$ 称为马尔可夫矩形.

注 13.2.10　我们允许 $\boldsymbol{R}_i$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下的像仅仅与 $\boldsymbol{R}_j$ 相交一次，因为在正规像的定义中我们假设 $\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)$ 是连通的. 我们也允许 $\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)$ 对某些 i 和 j 是空的.

注 13.2.11　通常每个 $\boldsymbol{R}_j$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个仿射像（即存在矩阵 $\boldsymbol{A}_j$ 和固定点 $\boldsymbol{p}_j$ 使得 $\boldsymbol{R}_j=\boldsymbol{p}_j+\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{B})$）.

注 13.2.12　马尔可夫性质的定义与一维情形在本质上是一样的，然而，一维映射只有一个扩张方向而没有收缩方向.

注 13.2.13　在对一个映射选择一个马尔可夫分割时，马尔可夫矩形及其扩张和收缩方向必须这样选取，使得一个矩形的扩张方向经映射作用后都穿过与之相交的任一个矩形的扩张方向.

注 13.2.14　多年来，马尔可夫性质的应用一直局限于概率范畴内，直到 20 世纪 60 年代末 70 年代初 Ya. Sinai 和 R. Bowen 才把这些思想引入到动力系统.

定义 13.2.15　对关于 $\boldsymbol{F}$ 具有马尔可夫性质的马尔可夫矩形，引入顶点 $\{1,\cdots,J\}$ 对分割中的矩形进行编号，而且当且仅当 $\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)\neq\varnothing$（即 $\boldsymbol{R}_i$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下的像与正规的 $\boldsymbol{R}_j$ 有非空的交）时做一条从 i 到 j 的有向边，这样我们定义了一个辅助转移图 $\mathcal{G}$.

548

定义 13.2.16　我们也可以由

$$t_{ij}=\begin{cases}0, & \boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i)) \cap \mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j) = \varnothing\\ 1, & \boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i)) \cap \mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j) \neq \varnothing\end{cases}$$

定义转移矩阵 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$，非零元素给出了符号间可能有的转换.

定义 13.2.17　令 Σ_J 为符号 $1,\cdots,J$ 的所有双边无穷序列组成的空间，这个空间称为 J 个符号的全双边位移. 固定一个转换图 $\mathcal{G}$ 或转移矩阵 $\boldsymbol{T}$，Σ_J 中的一个符号序列 $\boldsymbol{s}$ 对 $\mathcal{G}$ 或 $\boldsymbol{T}$ 是可

行的，如果$\mathcal{G}$中对每个 $\boldsymbol{i}$ 都有从 s_i 到 s_{i+1} 的边(即在转移矩阵中 $t_{s_is_{i+1}}=1$)．令 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 为所有可行的符号序列组成的集合(当显示转移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 时它也可以写成 $\Sigma_{\boldsymbol{T}}$)．空间 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 称为一个有限子位移，因为转换图只给出有限个方案来表示哪些符号在前哪些符号在后．

需要注意的是，对于马蹄，转移矩阵的所有元素均为 1，而且存在连接转换图的所有顶点的边．

定理 13.2.18　假设 $\boldsymbol{F}$ 为$\mathbb{R}^n$ 上的同胚，$\{\boldsymbol{R}_i\}_{i=1}^{J}$是关于 $\boldsymbol{F}$ 的一个马尔可夫分割，其转换图和有限子移位分别为$\mathcal{G}$和 $\Sigma_{\mathcal{G}}$.

(a)记 $\boldsymbol{S}^\circ$ 为 $\bigcup_{i=1}^{J}\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i)$，且

$$\Lambda=\bigcap_{k=0}^{\infty}\mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-k}^{k}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{S}^\circ)\right),$$

则存在一个从 Λ 到 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 的迭标函数 h(即若 $\boldsymbol{x}\in\Lambda$，则迭标 $h(\boldsymbol{x})$ 为一可行序列)．注意到，如果点 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x})$ 在两个或更多矩形 $\boldsymbol{R}_i$ 的边界上，则必须选定一个 s_j.

(b)假设 $\boldsymbol{s}\in\Sigma_{\mathcal{G}}$ 是一个可行的双边无穷符号序列，则

$$\bigcap_{k=0}^{\infty}\mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-k}^{k}\boldsymbol{F}^{-j}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_{s_j}))\right)\neq\varnothing.$$

且存在一点 $\boldsymbol{x}_s$ 使得 $h(\boldsymbol{x}_s)=\boldsymbol{s}$(即 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x}_s)\in\boldsymbol{R}_{s_j}$对所有 j 成立)．因此，迭标函数 h 在整个 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 上是满的.

(c)假设 $\boldsymbol{s}\in\Sigma_{\mathcal{G}}$ 是一个可行的双边无穷符号序列且周期为 p(即 $s_{j+p}=s_j$ 对所有的 j 成立且 p 是使这一性质成立的最小的正整数)，则存在点 $\boldsymbol{x}_s$ 使得 $h(\boldsymbol{x}_s)=\boldsymbol{s}$ 且 $\boldsymbol{F}^p(\boldsymbol{x}_s)=\boldsymbol{x}_s$．因此，$\boldsymbol{x}_s$ 的周期可以被 p 整除．如果点 $\boldsymbol{x}_s$ 不在 $\boldsymbol{R}_{s_0}$的边界上，则周期就是 p.

(d)假设转换图是不可约的．更进一步地，假设

$$\bigcap_{k=0}^{\infty}\mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-k}^{k}\boldsymbol{F}^{-j}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_{s_j}))\right)$$

对每个可行序列 $\boldsymbol{s}$ 都只是一点，则映射 $\boldsymbol{F}$ 在 Λ 上是拓扑传递的且限制在 Λ 上有对初始值的敏感依赖性.

注 13.2.19　定理中的交集可以简化，如果对定义 13.2.9 中所列的条件再做如下附加假设：

4. 如果 $\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j)\neq\varnothing$，那么 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_i)\cap\boldsymbol{R}_j=\mathrm{cl}(\boldsymbol{F}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_i))\cap\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_j))$.　549

这个条件说明在与相交的像无关的端部不存在额外的交集．用假设(4)，我们可以如下替换定理中的交集：

$$\text{用}\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{S})\text{ 代替 }\bigcap_{k=0}^{\infty}\mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-k}^{k}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{S}^\circ)\right),$$

$$\text{用}\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j})\text{ 代替 }\bigcap_{k=0}^{\infty}\mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-k}^{k}\boldsymbol{F}^{-j}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_{s_j}))\right),$$

其中 $\boldsymbol{S}=\bigcup_{i=1}^{J}\boldsymbol{R}_i$.

注 13.2.20　在定理的(d)部分，为了得到敏感依赖性，我们需要假设所有的交集

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-k}^{k} \boldsymbol{F}^{-j}(\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_{s_j}))\right)$$

都是点，因为这些点在所有的迭代下不分开.

应用前面的定理可讨论具有 a 的大值的 Hénon 映射.

例 13.2.21(Hénon 映射)　考虑 Hénon 映射

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{bmatrix},$$

其中 $b=0.3$，$a=5$. 对正方形

$$\boldsymbol{S} = [-3,3] \times [-3,3],$$

其顶点的像为

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} \pm 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 0.9 - 9 \\ \pm 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.9 \\ \pm 3 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{F}\begin{bmatrix} \pm 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 0.9 - 9 \\ \pm 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1 \\ \pm 3 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{S}$ 中垂直线段的像是一条水平线段，而 $\boldsymbol{S}$ 中水平线段的像是一条穿过 $\boldsymbol{S}$ 两次的抛物线：

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x_0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 0.3y - x_0^2 \\ x_0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 0.3y_0 - x \\ x \end{bmatrix},$$

参见图 13.2.7.

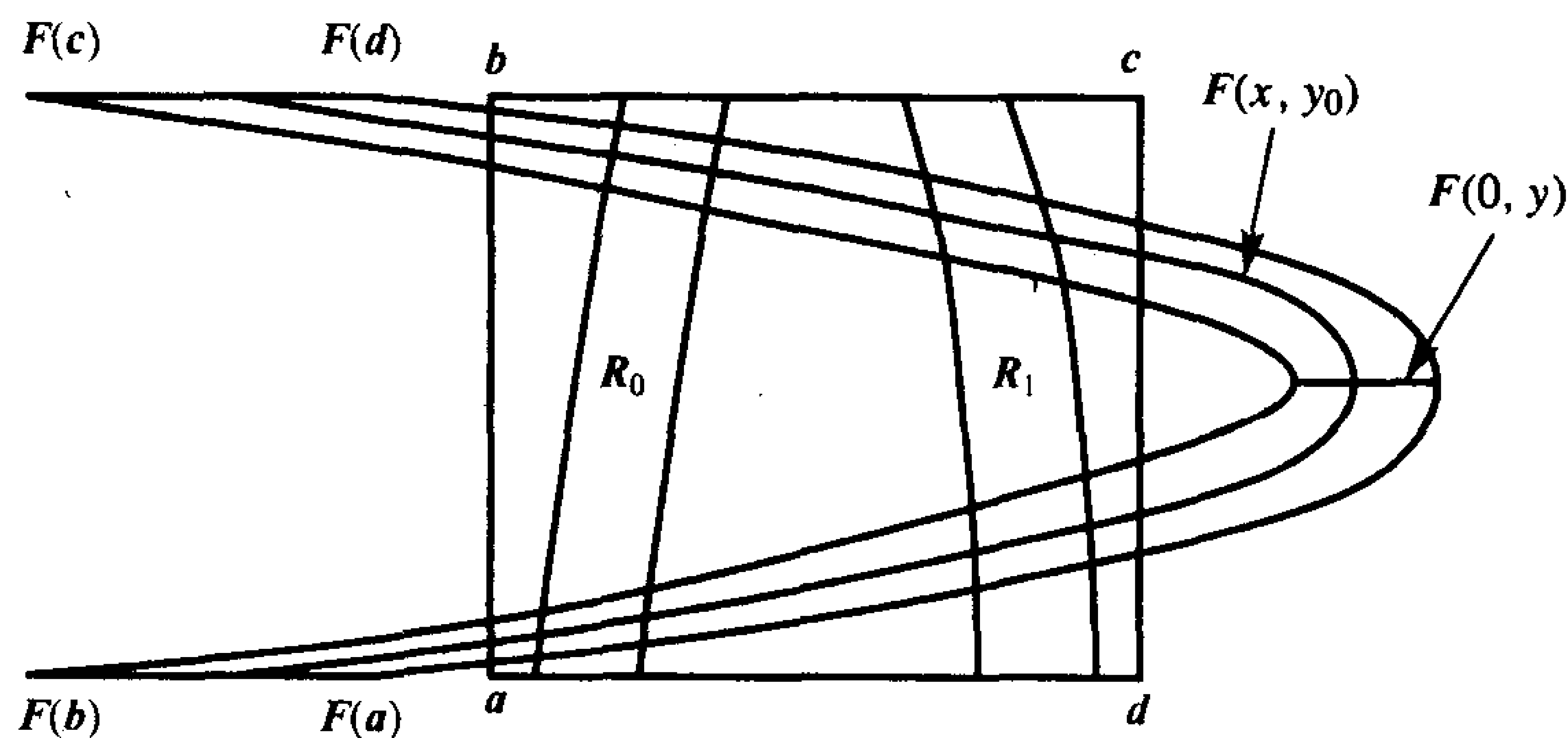


图 13.2.7　正方形 S 在 Hénon 映射之下的像

交集 $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{S})$ 为两个从 $\boldsymbol{S}$ 的底部到顶部的带 $\boldsymbol{R}_0$ 和 $\boldsymbol{R}_1$ 的并，$\boldsymbol{R}_0 \cup \boldsymbol{R}_1$ 的像等于 $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})$，它是介于 $\boldsymbol{S}$ 两边之间的两个带的并. 这后两个带的作用如同马蹄的 $\boldsymbol{V}_0$ 和 $\boldsymbol{V}_1$，而 $\boldsymbol{R}_0$ 和 $\boldsymbol{R}_1$ 如同 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_1$. 带 $\boldsymbol{R}_0$ 和 $\boldsymbol{R}_1$ 是马尔可夫分割中的 M 矩形，这些 M 矩形由下面的逆映射确定

$$\boldsymbol{F}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dfrac{5 - x - y^2}{0.3} \end{bmatrix}.$$

这些带的边被映射到 $x = \pm 3$，这些边是抛物线

$$F^{-1}\begin{bmatrix}3\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\\dfrac{2-y^2}{0.3}\end{bmatrix}\quad 和 \quad F^{-1}\begin{bmatrix}-3\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\\dfrac{8-y^2}{0.3}\end{bmatrix}.$$

这些边是边界中"外映"的部分，在 $y=\pm3$ 上的部分边界是边界中"内映"的部分，它被映射到 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})\cap\boldsymbol{S}$ 之边界的水平段上.

带对 $\{\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1\}$ 形成了一个马尔可夫分割，转移矩阵中所有元素均为1. 对于0和1的每个双边无穷串 $\boldsymbol{s}$，交集 $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j})$ 非空. 看出它是一点并非易事，但进一步的分析可以证明这一点，这超出了本书讨论的范围，参见文献[**87**]. 然而，即使不知道交集是一个点，前面的结论表明周期符号序列对应于周期点. 我们还可以用非周期符号序列来确定非周期点. ■

13.2.3 双曲环面自同构的马尔可夫分割

环面自同构是用来构造马尔可夫分割的首先要考虑的映射之一，马尔可夫分割与 $\mathbb{T}^2$ 上的双曲环面自同构 $\boldsymbol{F}_A$ 的动力学性态是通过一个转移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的有限子位移建立联系的. R. Alder 和 B. Weiss(1970)证明，如果诱导出双曲环面自同构的初始矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为正，那么就有可能找到一个有两个M矩形的马尔可夫分割，其转移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 一样. (关于元素大于1的转移矩阵的注释见注13.2.25.)其他一些人，也包括 M. Snavely[**100**]和 E. Rykken[**91**]在内，在构造这样一个马尔可夫分割方面已经给出了具体的描述. 本节仅考虑最简单的情形，以便于容易应用 Adler 和 Weiss 的思想.

551

环面自同构的马尔可夫分割

马尔可夫分割可以用一种比已给出的一般定义更简洁的方法来构造. 有些性质与 Bowen 最初的定义很接近，但在这种情形下需要特别用到从平面到环面的覆盖映射.

对于环面自同构，选取一个马尔可夫分割 $\mathcal{R}=\{\boldsymbol{R}_i\}_{i=1}^m$ 来覆盖整个环面

$$\mathbb{T}^2=\bigcup_{i=1}^m\boldsymbol{R}_i.$$

每个M矩形可以由 $\boldsymbol{R}_i=\pi(\bar{\boldsymbol{R}}_i)$ 给出，其中 $\bar{\boldsymbol{R}}_i$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个平行四边形，而投影 π 为 $\bar{\boldsymbol{R}}_i$ 内部上的一个同胚. 我们用 $\boldsymbol{R}_i^\circ$ 表示 $\bar{\boldsymbol{R}}_i$ 内部的投影且称其为内部，即

$$\boldsymbol{R}_i^\circ=\pi(\mathrm{int}(\bar{\boldsymbol{R}}_i)),$$

我们要求

$$\boldsymbol{R}_j^\circ\cap\boldsymbol{R}_i^\circ=\varnothing,\quad 如果 j\neq i.$$

称

$$\partial(\boldsymbol{R}_i)=\boldsymbol{R}_i\setminus\boldsymbol{R}_i^\circ$$

为 $\boldsymbol{T}^2$ 中矩形的边界，尽管它可能比通常意义下的边界要大. 在例13.2.22中，$\boldsymbol{R}_1^\circ$ 大于环面中的内部 $\mathrm{int}(\boldsymbol{R}_1)$，因为它沿 $\partial(\boldsymbol{R}_1)$ 自交；同理，$\partial(\boldsymbol{R}_1)$ 大于环面中 $\boldsymbol{R}_1$ 的通常的拓扑边界.

该平行四边形的边界是由 $\mathbb{R}^2$ 上诱导映射的稳定流形和不稳定流形的若干段组成的. 实际上，对于我们的例子，边界可以由线段组 $\boldsymbol{L}$ 组成，使得 $\pi(\boldsymbol{L})$ 包含在 $\boldsymbol{W}^s(\boldsymbol{0})\cup\boldsymbol{W}^u(\boldsymbol{0})$ 内，且

$$\partial^{in}(\boldsymbol{R}_i) \subset W^u(\pi(\mathbf{0}))\text{ 和 }\partial^{out}(\boldsymbol{R}_i) \subset W^s(\pi(\mathbf{0})).$$

我们允许$\bar{\boldsymbol{R}}_i$边界上的两点在取模1下是等价的(即映射π可以将边界上的两点映射为环面上的同一点)，映射π在$\bar{\boldsymbol{R}}_i$边界上可以是多对一的. 因此，一个M矩形$\boldsymbol{R}_i$可以在边界上自交.

对于覆盖性质，我们仅要求$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_i^\circ)\cap\boldsymbol{R}_j^\circ$是一个连通块，只要它非空.（这样，我们允许边界的像出现其他的相触点.）

在平面上，稳定和不稳定流形是一些不能返回到矩形里的直线，因此交集$W^\sigma(\bar{z})\cap\bar{\boldsymbol{R}}_j$是一条线段，其中$\sigma=u$或$s$. 因此，对于$\bar{\boldsymbol{R}}_j$中的$\bar{z}$，$\boldsymbol{R}_j$中的$z=\pi(\bar{z})$，及$\sigma=u$或$s$，我们定义

$$W^\sigma(z,\boldsymbol{R}_j) = \pi(W^\sigma(\bar{z}) \cap \bar{\boldsymbol{R}}_j).$$

矩形中的这些稳定和不稳定流形满足下面的性质：若$z\in\boldsymbol{R}_i^\circ$且$\boldsymbol{F}(z)\in\boldsymbol{R}_j^\circ$，则

$$\boldsymbol{F}(W^u(z,\boldsymbol{R}_i)) \supset W^u(\boldsymbol{F}(z),\boldsymbol{R}_j),$$

$$\boldsymbol{F}(W^s(z,\ \boldsymbol{R}_i))\subset W^s(\boldsymbol{F}(z),\ \boldsymbol{R}_j).$$

552　(Bowen把这个性质作为他对M矩形定义的一部分.)

例子

例13.2.22　我们寻找由矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$诱导的环面自同构$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_A$的一个马尔可夫分割. 特征值为$\lambda_u=(1+\sqrt{5})/2>1$和$-1<\lambda_s=(1-\sqrt{5})/2<0$，对应的特征向量为$\boldsymbol{v}^u=(2,\ -1+\sqrt{5})^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{v}^s=(2,\ -1-\sqrt{5})^{\mathrm{T}}$. 特征向量$\boldsymbol{v}^u$有正斜率而$\boldsymbol{v}^s$有负斜率.

$\mathbb{R}^2$中的格点是纵横坐标均为整数的点，它们是满足$\pi(\boldsymbol{p})=\pi(\mathbf{0})$的点$\boldsymbol{p}$的集合.

为了形成$\mathbb{R}^2$中的矩形$\bar{\boldsymbol{R}}_j$，取不稳定流形中走向格点的右上方的部分，如图13.2.8所示，取稳定流形中向下走向点$\bar{\boldsymbol{a}}$的部分，其中$\bar{\boldsymbol{a}}$是稳定流形与上述不稳定线段的交点. 令$[\mathbf{0},\ \bar{\boldsymbol{a}}]_s$为稳定流形中从$\mathbf{0}$到$\bar{\boldsymbol{a}}$的线段，一般地，令$[\bar{\boldsymbol{x}},\ \bar{\boldsymbol{y}}]_s$为稳定流形中从$\bar{\boldsymbol{x}}$到$\bar{\boldsymbol{y}}$的线段. 同时，从一个格点向上延伸稳定流形到点$\bar{\boldsymbol{b}}$，点$\bar{\boldsymbol{b}}$是稳定流形与向上的不稳定线段的交点，参见图13.2.8. 可适当地选择这些点使得$\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{a}})=\bar{\boldsymbol{b}}$. 令$\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{b}})$且$\bar{\boldsymbol{c}}'=\bar{\boldsymbol{c}}+(1,\ 1)$，故$\pi(\bar{\boldsymbol{c}})=\pi(\bar{\boldsymbol{c}}')$. 最后，延伸不稳定流形到点$\bar{\boldsymbol{c}}'$，它正好是不稳定流形与稳定流形中的线段$[\bar{\boldsymbol{a}},\ \bar{\boldsymbol{b}}]_s$之交点. 这些线段$[\bar{\boldsymbol{a}},\ \bar{\boldsymbol{b}}]_s$(在$W^s(\mathbf{0})$中)和$[\mathbf{0},\ \bar{\boldsymbol{c}}']_u$(在$W^u(\mathbf{0})$中)(和它们在$\mathbb{R}^2$上的平移)定义了$\mathbb{R}^2$上的两个矩形$\bar{\boldsymbol{R}}_1$和$\bar{\boldsymbol{R}}_2$，因此定义了在$\mathbb{T}^2$中的$\boldsymbol{R}_1$和$\boldsymbol{R}_2$，参见图13.2.8.

为了明确这些矩形在$\boldsymbol{F}$下的像，首先考虑点$\bar{\boldsymbol{a}}$，$\bar{\boldsymbol{b}}$和$\bar{\boldsymbol{c}}$的像：我们有$\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{a}})=\bar{\boldsymbol{b}}$，$\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{b}})=\bar{\boldsymbol{c}}$和$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{c}})\in[\mathbf{0},\ \bar{\boldsymbol{b}}]_s$，参见图13.2.8. 我们用同一字母标记投影到环上同一点的那些点，用加撇来区别它们. 利用这些像，我们得到

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_1)\text{ 穿过}\mathbb{T}^2\text{上的 }\boldsymbol{R}_1\text{ 和 }\boldsymbol{R}_2\text{，而}$$

553

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_2)\text{ 穿过}\mathbb{T}^2\text{上的 }\boldsymbol{R}_1,$$

参见图13.2.9. 每个$\boldsymbol{R}_j$边界的映入部分$\partial^{in}(\boldsymbol{R}_j)$由若干段不稳定流形组成，而每个$\boldsymbol{R}_j$边界的映出部分$\partial^{out}(\boldsymbol{R}_j)$由若干段稳定流形组成. 矩形对$\{\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2\}$具有对$\boldsymbol{F}$的马尔可夫分割的性质：

(1)每个矩形都是一个平行四边形，(2)矩形的并集覆盖$\mathbb{T}^2$且$\boldsymbol{R}_1$的内部和$\boldsymbol{R}_2$的内部不相交，(3)如果$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_i^\circ)\cap\boldsymbol{R}_j^\circ\neq\varnothing$，那么$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_i)$在不稳定方向上总穿过$\boldsymbol{R}_j$，而在稳定方向不与$\boldsymbol{R}_j$的边相交.

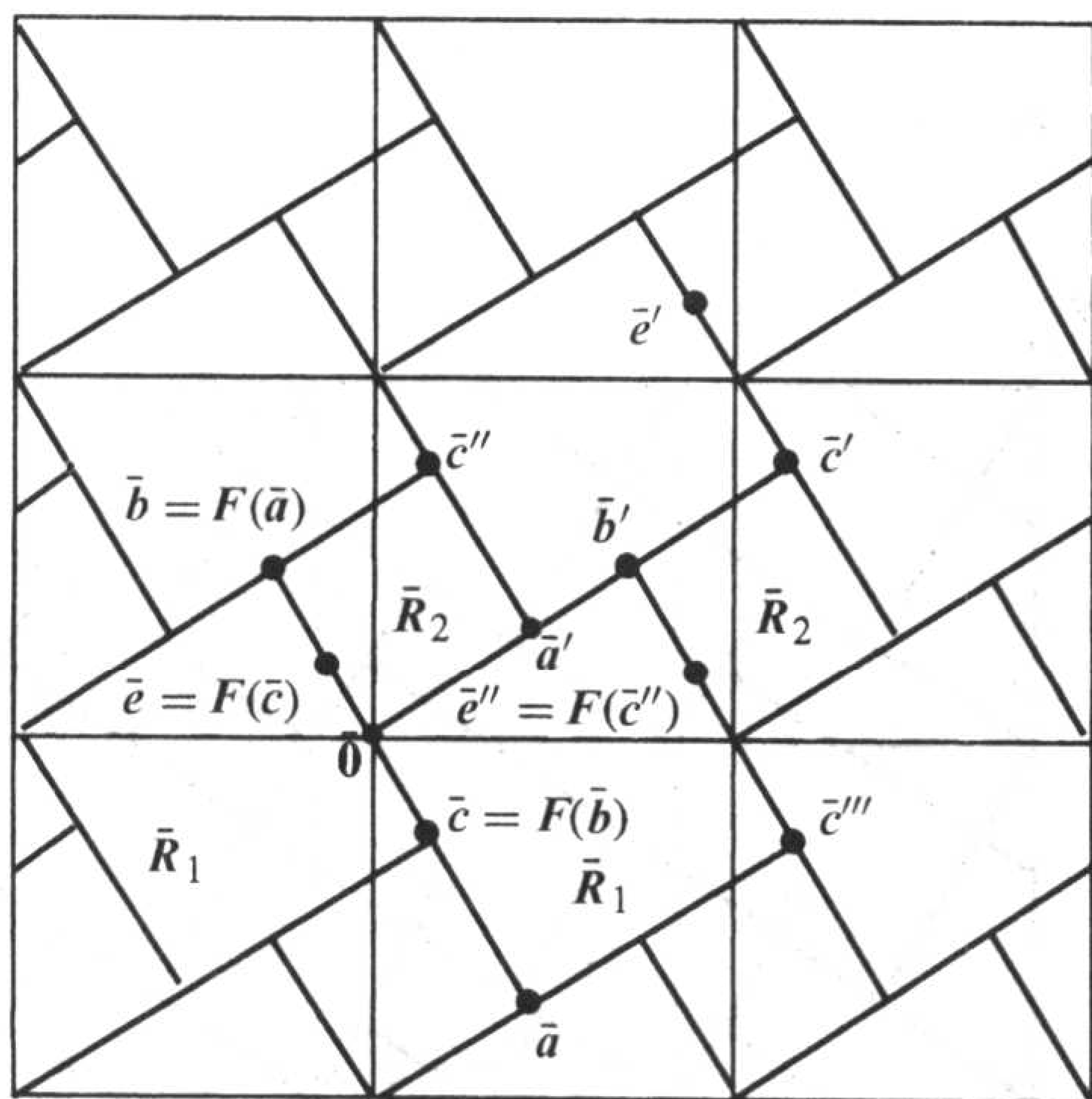


图 13.2.8　例 13.2.22 中的矩形

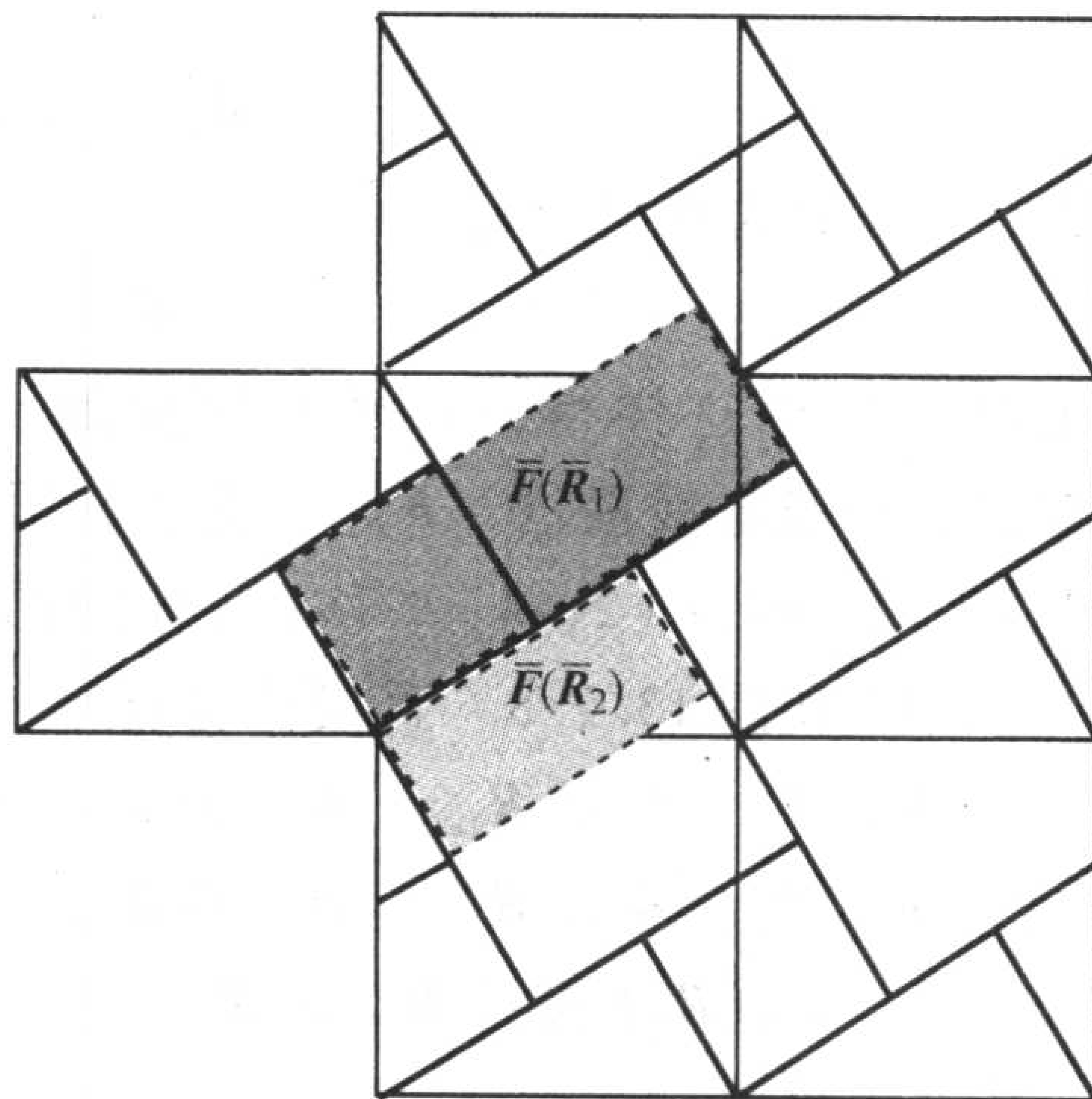


图 13.2.9　例 13.2.22 中的矩形的像

转移矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},$$

符号空间Σ_T由可行序列组成，$\sigma_T=\sigma\mid\Sigma_B$是限制在子位移$\Sigma_B$上的位移映射. 从$\Sigma_B$到$\mathbb{T}^2$上满的半共轭映射$k$定义为

$$k(s)=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-n}^{n}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}^\circ_{s_j})\right).$$

我们对内部取像是因为$\boldsymbol{R}_{s_1}\cap\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R}_{s_2})$并不总是等于$\mathrm{cl}\,(\boldsymbol{R}^\circ_{s_1}\cap\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R}^\circ_{s_2}))$，而可能有额外点，其像在$\boldsymbol{R}_{s_2}$的边界上.（为了使用更少的矩形，我们不得不容忍这些麻烦.）定理 13.2.26 表明k是一个半共轭：连续，满的，且$\boldsymbol{F}\circ k=k\circ\sigma_T$. 实际上，由此定理知$k$至多是四对一的，因为仅有两个矩形. ■

注 13.2.23　在上例中，对于一点$\boldsymbol{p}\in\partial(\boldsymbol{R}_i)$，对于$\boldsymbol{p}$所属的矩形至少有两个选择. 因此，对一个矩形边界上的点，无法指定一个唯一的符号序列(即迭标映射h并不总是唯一定义，即是不连续的). 实际上，由于环面是连通的，而符号空间Σ_T不连通，所以不可能有从$\mathbb{T}^2$到Σ_T的连续满射.

554

例 13.2.24　作为双曲环面自同构的第二个例子，令$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$. 如前所述，若$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}$. 令$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}_B$且$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_A$，则$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}^2$.

例 13.2.22 中的矩形$\boldsymbol{R}_1$和$\boldsymbol{R}_2$仍然是该矩阵的矩形，这一分割满足马尔可夫分割的大部分

条件，但 $\boldsymbol{R}_1$ 在 G 下的像穿过 $\boldsymbol{R}_1$ 两次，故 $G(\boldsymbol{R}_1^\circ)\cap\boldsymbol{R}_1^\circ$ 是非连通的. 计算几何上的穿过次数，转移矩阵(邻接矩阵)就是 $\boldsymbol{B}$.

若想得到一个仅含 0 和 1 的转移矩阵，我们必须细分矩形而取 $\boldsymbol{R}_1\cap\boldsymbol{F}_B(\boldsymbol{R}_1)$ 的连通分支：引入矩形

$$\boldsymbol{R}_{1a}=\pi(\bar{\boldsymbol{R}}_1\cap L_B(\bar{\boldsymbol{R}}_1)),$$

其中 L_B 为 $\mathbb{R}^2$ 上的映射，且

$$\boldsymbol{R}_{1b}=\mathrm{cl}(\boldsymbol{R}_1\setminus\boldsymbol{R}_{1a}).$$

这些矩形也可以这样得到：延伸原点的不稳定流形，直到它与稳定线段 $[\mathbf{0},\boldsymbol{b}]_s$ 相交，线段 $[\mathbf{0},\boldsymbol{b}]_s$ 是在点 $\boldsymbol{e}'''=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c})+(2,1)$ 平移 $(2,1)$ 得到的. 参见图 13.2.10 和图 13.2.8. 直接检验可知

$\boldsymbol{F}_B(\boldsymbol{R}_{1a})$ 穿过 $\boldsymbol{R}_{1a}$，$\boldsymbol{R}_{1b}$ 和 $\boldsymbol{R}_2$，

$\boldsymbol{F}_B(\boldsymbol{R}_{1b})$ 穿过 $\boldsymbol{R}_{1a}$，$\boldsymbol{R}_{1b}$ 和 $\boldsymbol{R}_2$，

$\boldsymbol{F}_B(\boldsymbol{R}_2)$ 穿过 $\boldsymbol{R}_{1b}$ 和 $\boldsymbol{R}_2$.

因此，转移矩阵是

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

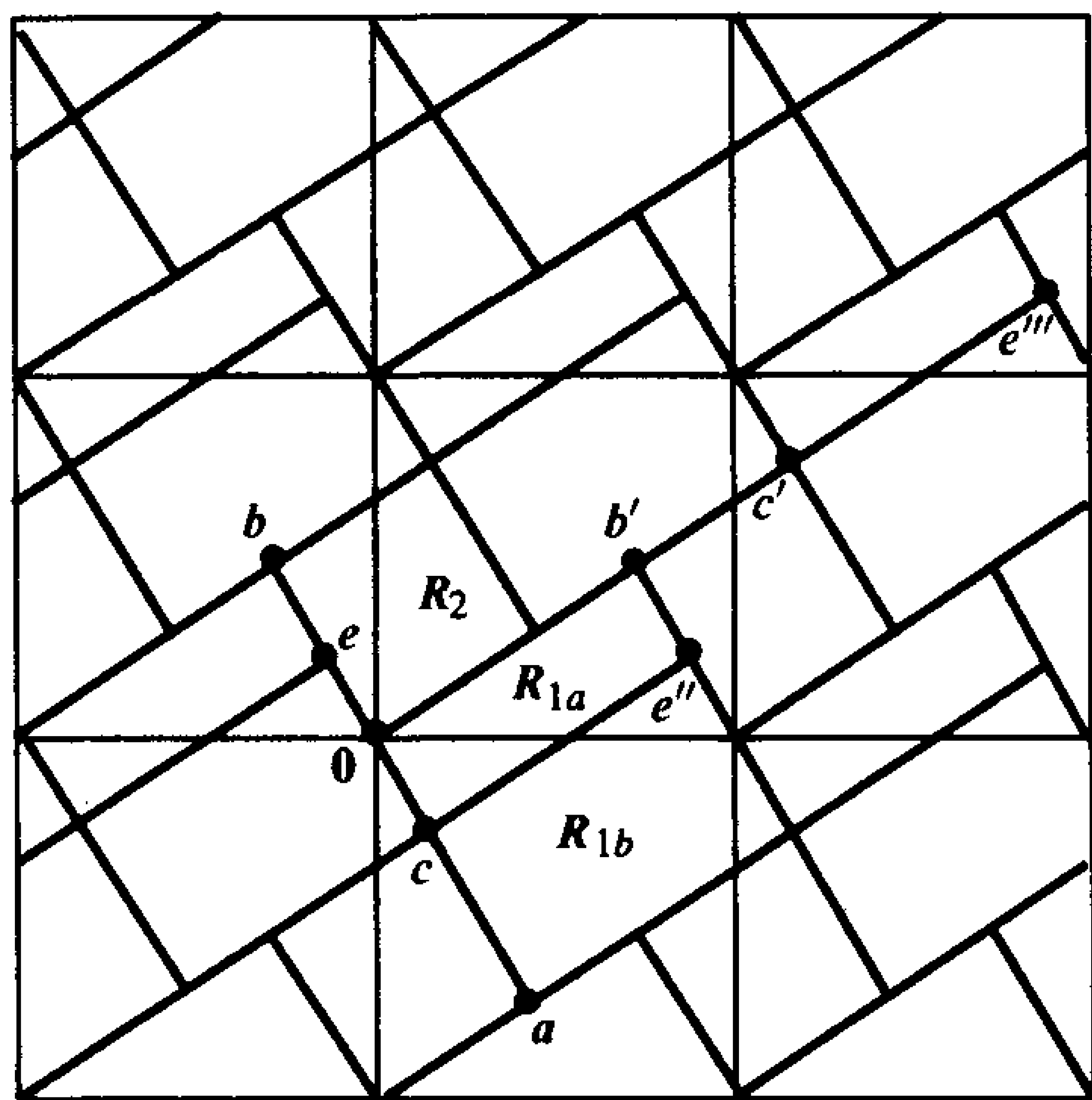


图 13.2.10　例 13.2.24 的马尔可夫分割

该矩阵有特征多项式 $p(\lambda)=-\lambda(\lambda^2-3\lambda+1)$，且有特征值 0，$\lambda_u^2$ 和 λ_s^2，其中 λ_u 和 λ_s 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因此，$\boldsymbol{T}$ 的特征值即为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和 0. 事实上，转移矩阵的特征值总是等于诱导出双曲环面自同构的初始矩阵的特征值的本身或其相反数，另外可能有 0 和单位根，见[**100**]. ■

注 13.2.25　在上一个例子中，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$，如果我们允许一个矩形的像穿过多次，我们就可以使用仅仅含两个矩形 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 的马尔可夫分割. 如果允许多次穿过，那么我们必须允许转移矩阵有大于 1 的整数元素(即得到非负整元素的邻接矩阵). 这种情形容易用转换图来处理，其中允许出现多条边连接顶点，此处不作详述. 见 Franks(1982).

我们现在给出关于有限子位移的半共轭和双曲环面自同构的结论.

定理 13.2.26　令 $\mathcal{R}=\{\boldsymbol{R}_i\}_{i=1}^m$ 为 $\mathbb{T}^2$ 上一个双曲环面自同构的马尔可夫分割，且转移矩阵为 $\boldsymbol{T}$，且

555

$$\bigcup_{j=1}^m\boldsymbol{R}_j=\mathbb{T}^2.$$

令 (Σ_T,σ_T) 为移位空间，且定义 $k:\Sigma_T\to\mathbb{T}^2$ 为

$$k(s)=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=-n}^{n}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j}^\circ)\right).$$

则 k 是一个从 σ_T 到 $\boldsymbol{F}$ 的有限多对一的半共轭. 事实上，k 至多是 m^2 对一的，其中 m 为分割中矩形的个数.

粗略的证明在 13.8 节中给出.

注 13.2.27 因为假设 $F(R_i^\circ)\cap R_j^\circ$是连通的而 $F(R_i)\cap R_j$ 不是，所以有必要在 k 的定义中先取内部然后再取闭包，图 13.2.9 中的 $F(R_1)$和 R_2 即是一个二者有区别的例子. 如果我们假设每个交集 $F(R_i)\cap R_j$ 都是连通的，那么我们就可以使用由

$$k(s)=\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}F^{-j}(R_{s_j})$$

给出的 k 的简化定义. 问题是 $F(R_i^\circ)\cap R_j^\circ$可以是非空的，而 $F(R_i)$可能在邻近无内点的边界点处紧靠 R_j 的边界，因此

$$\mathrm{cl}\,(F(R_i^\circ)\cap R_j^\circ)\neq F(R_i)\cap R_j,$$

见例 13.2.22. 为了找到有较少矩形的马尔可夫分割，我们允许在边界上有这样的交集，这就使得我们只好使用 k 的稍复杂的定义.

13.2.4 跟踪

当一个映射用计算机迭代时，每次迭代都可能有运行误差. 如果映射有扩张方向且对初始值有敏感依赖性，那么小的运行误差通过多次迭代后可能会被放大. E. Lorenz 在他关于空气对流运动模型的著名研究中发现了这种现象. 由于迭代过程中的这些不确定性，用来模拟实际轨迹的算出的轨迹到底有多少有效性呢？跟踪的思想和它对一些映射的有效性表明用计算机算出的一个近似轨迹通常接近于一条真实轨迹，只是初始值稍有不同. 本节我们粗略地描述这种思想. [556]

定义 13.2.28 一个点列 $\{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$，或一个有限串 $\{x_j\}_{j=k_1}^{k_2}$ 称为映射 F 的一个 ε 链或 ε 伪轨道，如果

$$\|F(x_{j-1})-x_j\|<\varepsilon$$

对所有 j 都成立. 因此，一个 ε 链是一条有误差或小跳跃的轨道.

称 ε 链 $\{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 可以被 δ-跟踪，如果存在初始值 y_0 使

$$\|F^j(y_0)-x_j\|<\delta$$

对所有 j 成立.

定义 13.2.29 为了在一不变集上实行跟踪，我们需要假设微分同胚 F 在 A 中每个点附近有扩张方向和收缩方向，具有这种性质的不变集称为是双曲的. 几何马蹄和双曲环面自同构都是具有这种性质的例子. 精确地，我们假设存在一个 $\delta_0>0$，使得对每个满足 $0<\delta\leqslant\delta_0$ 的 δ，存在一个依赖于 δ 的 $\varepsilon>0$，满足下列条件：在 A 中每点 x 附近，存在一个 δ 邻域 R_x，使得如果 A 中点 x_1 是在 $F(x_0)$的 ε 范围内，则 R_{x_0}在 F 下的像关于 R_{x_1}是正规的.

定理 13.2.30 假设一个微分同胚在一不变集 A 上是双曲的，则对于所有的 $\delta>0$，存在一个依赖于 δ 的 $\varepsilon>0$，使得 F 的任一 ε 链可以被一条真正的轨道 δ-跟踪；即，如果 $\{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 为 F 的一个 ε 链，那么存在一个初始值 y_0 使得对所有的 j 有 $\|F^j(y_0)-x_j\|<\delta$.

将定理 13.2.18(d)的证明应用于一系列正规 M 矩形就得到上述结果的证明. 更精确的处理需要用到“双曲性”，见[**87**].

J. Yorke 及其合作者对该思想进行了进一步的扩展，他们证明了即使没有正规矩形(双曲

性)的假设，一个映射的 ε 链也是能够在长时间内被 δ-跟踪的.

13.3　同宿点和马蹄

到目前为止，我们已经描述了几何马蹄并证明了 Hénon 映射对一些参数值会有马蹄出现. 本节利用马尔可夫分割，我们将证明只要同一周期轨的稳定流形和不稳定流形相交，则马蹄都会产生. 这样，马蹄是普遍存在的. 由于马蹄存在意味着对初始值的敏感依赖性，那么敏感依赖性也会变得很普遍了. 亨利·庞加莱早在 18 世纪后半叶就发现了这种联系，进一步的讨论见 13.7.1 节.

定义 13.3.1　假设 $\boldsymbol{p}$ 是一个周期鞍点，若一点 $\boldsymbol{q}$ 同时包含在 $\boldsymbol{p}$ 点的轨道的稳定流形和不稳定流形中，且不在 $\boldsymbol{p}$ 点的轨道上，则点 $\boldsymbol{q}$ 称为过 $\boldsymbol{p}$ 之轨道的同宿点，即

$$\boldsymbol{q} \in [W^s(\mathcal{O}_F(\boldsymbol{p})) \cap W^u(\mathcal{O}_F(\boldsymbol{p}))] \setminus \{\mathcal{O}_F(\boldsymbol{p})\}.$$

557　因此 $\omega(\boldsymbol{q}) = \alpha(\boldsymbol{q}) = \mathcal{O}_F(\boldsymbol{p})$.

图 13.3.1 给出了一个鞍不动点的同宿点的简化图，图 12.3.2 给出了 Hénon 映射的一个不动点的稳定和不稳定流形的同宿相交示意图. 我们应该注意到有很多这样的同宿交集；一旦有一个，则这一点的整条轨道就给出了其他同宿交集.

定义 13.3.2　$\mathbb{R}^2$ 中稳定流形 $W^s(\boldsymbol{p}_1)$ 和不稳定流形 $W^u(\boldsymbol{p}_2)$ 称为在 $\boldsymbol{q}$ 点是横截的，如果(i)它们在 $\boldsymbol{q}$ 点不相交，或(ii) $W^s(\boldsymbol{p}_1)$ 在 $\boldsymbol{q}$ 点的某一切向量与 $W^u(\boldsymbol{p}_2)$ 在 $\boldsymbol{q}$ 点的切向量不平行.

在更高维的 $\mathbb{R}^n$ 中，要求是 $W^s(\boldsymbol{p}_1)$ 在 $\boldsymbol{q}$ 点的所有切向量与 $W^u(\boldsymbol{p}_2)$ 在 $\boldsymbol{q}$ 点的所有切向量能生成 $\mathbb{R}^n$ 中的所有向量.

图 13.3.1 展示了 $W^s(\boldsymbol{p})$ 和 $W^u(\boldsymbol{p})$ 有一个横截同宿点 $\boldsymbol{q}$，而图 13.3.2 中的同宿点 $\boldsymbol{q}$ 是非横截的.

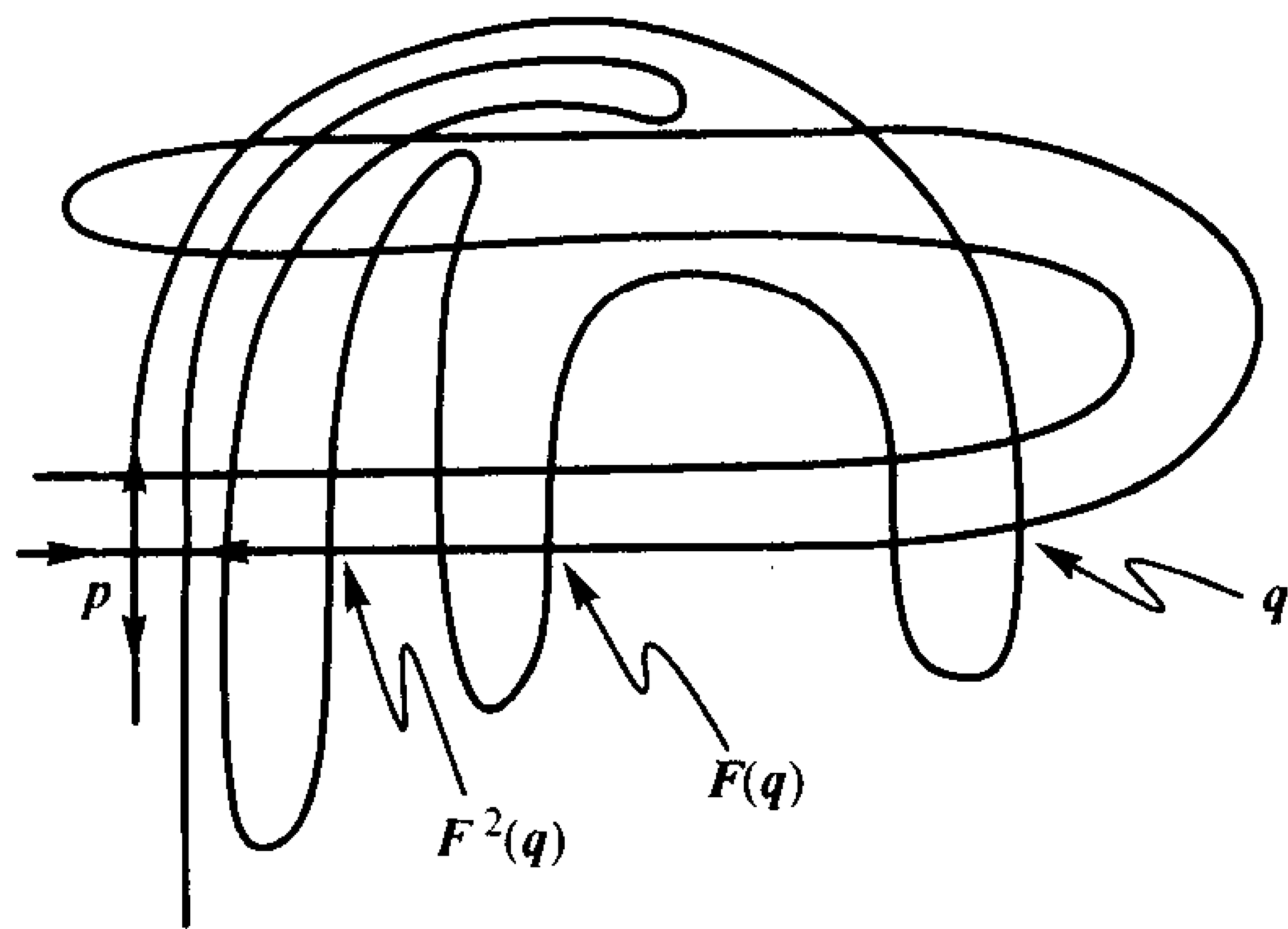


图 13.3.1　横截同宿点 $\boldsymbol{q}$

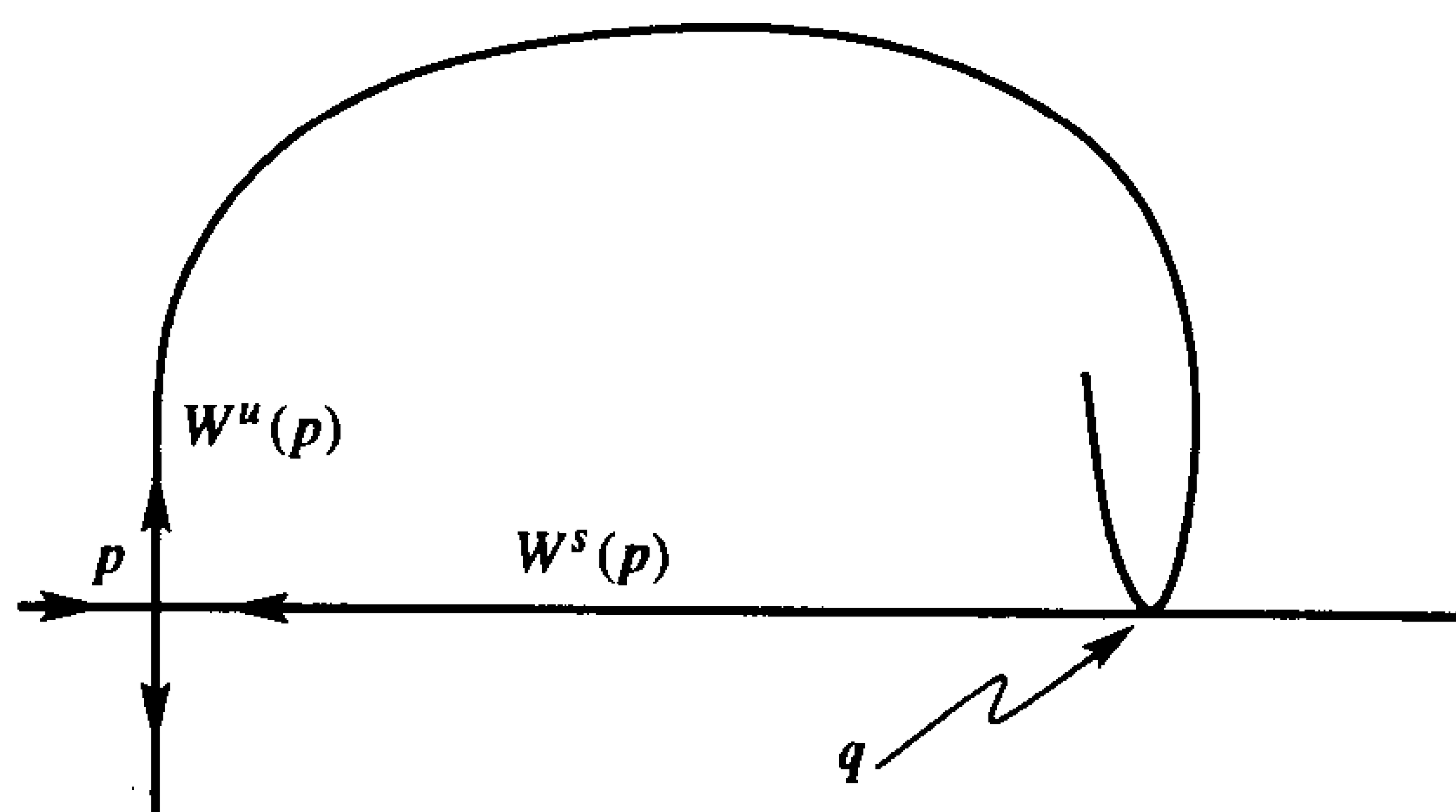


图 13.3.2　非横截同宿点 $\boldsymbol{q}$

有了这些定义，我们可以给出这一节的主要结论. 它既适用于共轭于两个符号的完全位移的 $\boldsymbol{F}$ 的幂的不变集，又适用于共轭于有限子位移的 $\boldsymbol{F}$ 的不变集.

定理 13.3.3(横截同宿点)　假设 $\mathbb{R}^n$ 上的一个映射 $\boldsymbol{F}$ 有一个鞍周期点 $\boldsymbol{p}$，它的轨道有一个横截同宿点 $\boldsymbol{q}$.（即

$$q \in [W^s(\mathcal{O}_F(p)) \cap W^u(\mathcal{O}_F(p))] \setminus \{\mathcal{O}_F(p)\}$$

且 $W^s(\mathcal{O}_F(p))$ 在 q 点横截于 $W^u(\mathcal{O}_F(p))$.)

558

(a) 则存在映射的一个幂 F^k, $k>0$, 它有一个包含 p 和 q 的不变集 Λ_k, 使得 F^k 限制在 Λ_k 上共轭于两个符号的全位移空间 Σ_2 上的位移映射.

(b) 映射 F 有一个包含 p 和 q 的不变集 Λ, 使得映射 F 限制在 Λ 上共轭于有限符号的有限子位移 Σ_G 上的一个位移映射, 当 p 为不动点时的转换图见图 13.3.3. 特别地, F 有无穷多个周期轨, 且对初始值有敏感依赖性.

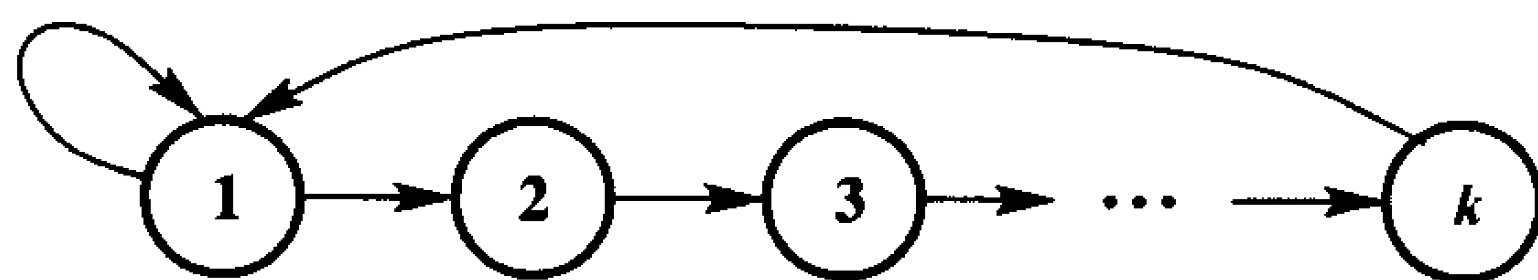


图 13.3.3　始于同宿点的子位移的转换图

注 13.3.4　在 p 为不动点的情形下, 集合 $A=\{p\}\cup\mathcal{O}(q)$ 是不变的且有定理 13.2.30 的性质. 许多不同的 ε 链可如下形成: 跟踪 q 的轨道直到进入 p 的 ε 范围内, 跳到点 p, 则任意多次迭代都保持在点 p, 然后跳出点 p 再次回到 q 的轨道上, 而 q 的轨道能回到 q 点且回到点 p 附近. 跟踪这种 ε 链的这些轨道形成了定理(b)部分的不变集, 且有如图 13.3.3 所示的转换图.

这些 ε 链给出了构造转换图的一个方法. 数字 1 对应于不动点 p; 数字 2 对应于过点 q 的负向轨道上且非常接近 p 点的某点 $F^{-k_-}(q)$; 数字 $j(2\leqslant j\leqslant k)$ 对应于点 $F^{-k_-+j-2}(q)$; 其中 k 的选择应使得 $F^{-k_-+k-2}(q)$ 也非常接近点 p. 从 $F^{-k_-+k-2}(q)$ 到 p 和从 p 到 $F^{-k_-}(q)$ 的跳跃都是很小的, 大小为"ε". 这组轨道中的任意 ε 链对应于 F 的一条跟踪该 ε 链的实际轨道.

构造思路　在接下来的讨论中, 我们考虑$\mathbb{R}^2$上一个有横截同宿点 q 的鞍不动点 p 的情形, 尽管我们对一般的$\mathbb{R}^n$上鞍周期轨道的情形给出了定理.

(a) 对于认真选取的点 p 附近的矩形 B 和负幂 $-k_-<0$,

$$S = F^{-k_-}(B)$$

是一个含过点 p 的稳定流形的细带, 这个稳定流形向外趋向同宿点 q. 适当选取 $k_+>0$ 和 $k=k_++k_-$, 带 S 在 F^k 下的像按正规方式与它自身相交两次:

$$F^{k_+}(B) = F^k(S),$$

参见图 13.3.4. B, k_- 和 k_+ 的选取是有内在联系的, 而且必须同时选取, 更详细的选取方法见[**87**]. 一旦 S 在 F^k 下的像与它自身相交两次, 我们就能得到可以用两个符号来模拟的不变集, 即有马蹄出现. 事实上, 利用横截性, 通过更多的工作, 我们可以证明每一个符号序列仅确定一个点. 点的唯一性给出了到位移空间的一个共轭映射及对初始值的敏感依赖性.

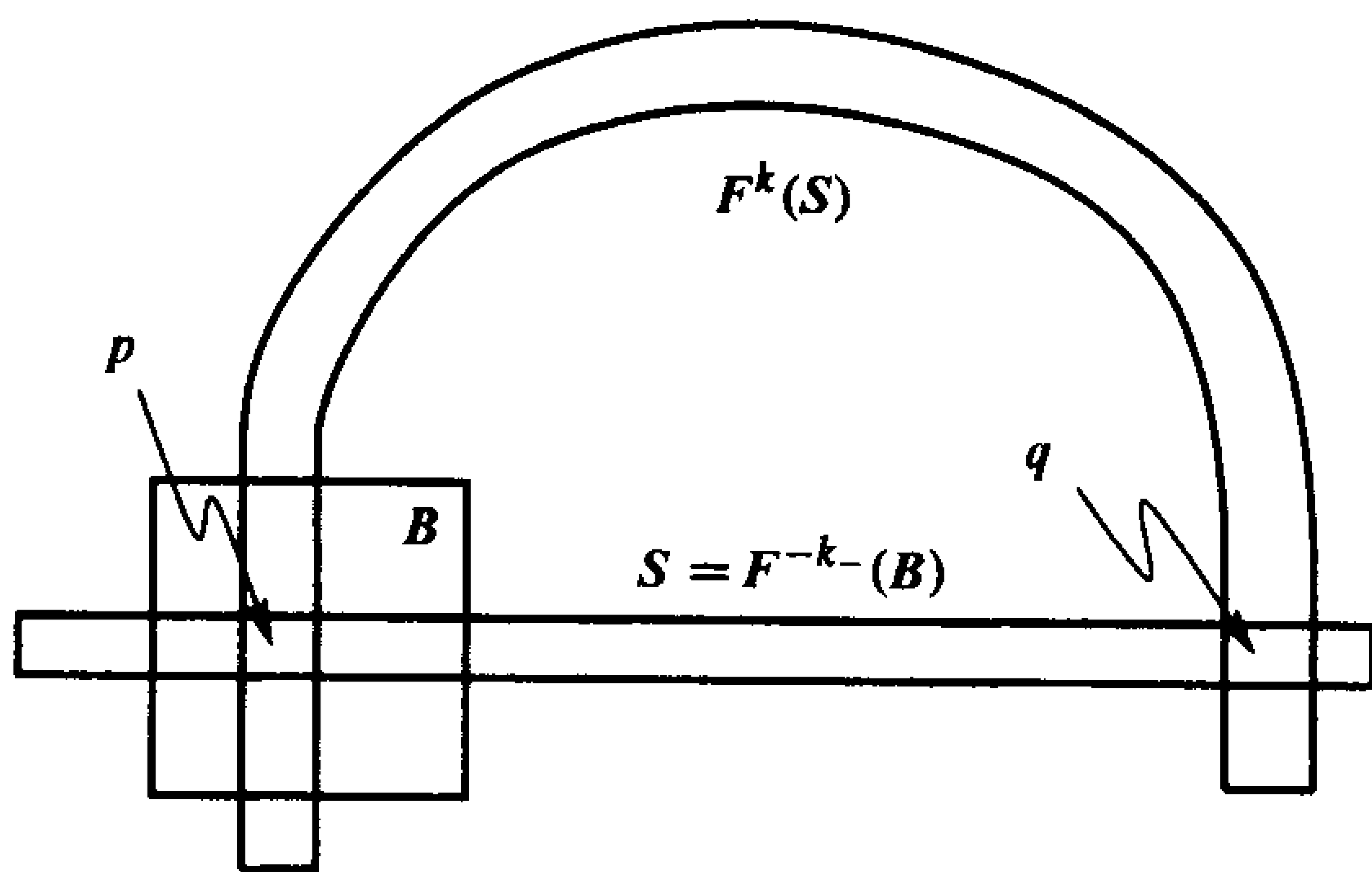


图 13.3.4　同宿点的矩形

(b) 设 B 如 (a) 证明中的一样, 令 R_1 为 (a) 中得到的包含点 q 的 M 矩形(即 R_1 为 $F^n(S)\cap S$ 中包含 q 的连通分支), 则

559

$$F^j(R_1)\cap B\begin{cases}=\varnothing & -k_+<j<k_-\\ \neq\varnothing & j=-k_+,k_-.\end{cases}$$

实际上，$F^k(R_1)$对于B是正规的，$F(B)$对于$F^{-k_++1}(R_1)$是正规的. 因此，我们可以使用M矩形

$$R'_1=B,$$
$$R'_2=F^{-k_++1}(R_1)$$

和

$$R'_j=F^{-k_++j-1}(R_1),\quad 2\leqslant j\leqslant k_++k_-=k$$

来形成一个马尔可夫分割，且有如图13.3.3所示的转换图. 根据注13.3.4可以理解其子位移. ■

13.4 吸引子

高维空间中涉及吸引子一些定义和以前对一维情形所给的定义是相同的，现在重述它们是因为这有助于根据不同的几何形式进一步思考它们的含义. 我们也给出了$\mathbb{R}^3$中一个吸引子的例子，称为螺旋管，这个不变集有这样的特征形式，即局部来看它是一个康托尔集和一条曲线的卡氏积. 最后，我们讨论Hénon吸引子.

在下列定义中，令F为$\mathbb{R}^n$到其自身的映射.

定义 13.4.1　F的一个收缩域是使得

$$\mathrm{cl}(F(U))\subset \mathrm{int}(U)$$

的有界集U. 这样，该集合的像的闭包包含在其内部.

定义 13.4.2　集合A是一个吸引集，如果存在一个收缩域U，使得

$$A=\bigcap_{j=0}^{\infty}F^j(U).$$

集合U就称为A的一个收缩域. 应注意到，U中每个点x的ω极限集都在A中，即$\omega(x)\subset A$. 吸引集A的吸引域定义为

560

$$\mathcal{B}(A;F)=\{x:\omega(x;F)\subset A\}.$$

定义 13.4.3　一个不以吸引集为其真子集的吸引集称为是不可分的(即如果A'为吸引集且$\varnothing\neq A'\subset A$，则$A'=A$).

不可分的吸引集称为吸引子.

注 13.4.4　下面是一个稍强但容易检验的条件，它还能保证吸引集是不可分的：

存在一个初始值$x_0\in\mathcal{B}(A;F)$，使得x_0的ω极限集等于A，即$\omega(x_0)=A$.

定义 13.4.5　同胚F的一个不变集S称为孤立的，如果存在包含S在其内部的有界区域U，使得

$$S=\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}F^j(U).$$

应注意到，这个交集是从负无穷到正无穷取的. 集合U称为不变集S的孤立邻域.

任意双曲鞍周期轨是孤立不变集. 因此，几何马蹄的不变集确有孤立不变的非平凡的子

集，但我们仍称之为不可分的．我们给出一个含有这种情形的不可分孤立不变集的定义，C. Conley 发展的理论产生下面孤立不变集不可分性的定义．

定义 13.4.6　一个孤立不变集 S 称为不可分的，如果下列条件满足：

(i)有两个收缩域 U_1 和 U_2，使得 $U = U_1 \setminus U_2$ 为 S 的一个孤立邻域．（注意：U_1 为包含 S 的收缩域且 $U_2 \cap S = \varnothing$.）

(ii)不存在满足 $\varnothing \neq S' \neq S$ 的孤立不变集 $S' \subset S$，使得 S' 有条件(i)中给出的那种类型的孤立邻域 $U' = U_1' \setminus U_2'$，其中 U_1' 和 U_2' 都是收缩域．

注 13.4.7　再有，一个孤立不变集 S 是不可分的，如果它满足下列条件：

(i)集合 S 满足不可分定义中的条件(i).

(ii′)在孤立邻域 U 中，存在一个初始值 x_0，使得 x_0 的 ω 极限集等于 S，即 $\omega(x_0) = S$.

注 13.4.8　13.1 节中的几何马蹄 Λ 是不可分的孤立不变集，集合 $U_1 = S' \cup E_0 \cup E_1$ 和 $U_2 = E_0 \cup E_1$ 为满足定义中条件(i)的收缩域，$S' = U_1 \setminus U_2$ 为 Λ 的孤立邻域．存在一点，它的 ω 极限集为 Λ，因此满足条件(ii′)，故是不可分的．

Conley 称我们所说的吸引集为吸引子，然而，他确实证明了我们称之为吸引子的集合的一个非常重要的性质．这些条件是根据 ε 链（或 ε 伪轨道）给出的．下面的定义与一维情形下给出的一样，我们重复一下是因为从第 11 章后就没再用到过了．

定义 13.4.9　点 p 称为链回归的，如果对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 ε 链 x_0，…，$x_k (k \geq 1)$ 使得 $p = x_0 = x_k$.（这里，k 可以依赖于 ε.）

561

定理 13.4.10(Conley)　假设 S 是一个孤立不变集，则 S 是不可分的当且仅当 S 中的每个点都是链回归的．

特别地，如果 A 是一个吸引集，则下列条件等价：(i)A 为吸引子；(ii)A 中每个点为链回归的．

对微分方程的等价结论的证明见[**87**]．

下一个定理表明一个吸引集包含集合中所有点的不稳定流形．对于这个定理，通过定义

$$W^u(p,F) = \{x : |F^j(x) - F^j(p)| \to 0, j \to -\infty\},$$

可把不稳定流形的定义推广到非周期点上．

定理 13.4.11　设 A 为 F 的一个吸引集，p 为 A 中的一点，那么 p 的不稳定流形包含在 A 中，即 $W^u(p, F) \subset A$.

证明　令 U 为 A 的一个收缩域．因为 U 为 A 的邻域，所以存在 $r > 0$ 使得对任意的 $x \in A$，局部不稳定流形 $W_r^u(x, F) \subset U$．那么，对 $k > 0$ 和 $j > 0$，

$$W_r^u(F^{-k}(p),F) \subset F^j(W_r^u(F^{-k-j}(p),F)) \subset F^j(U),$$

$$F^k(W_r^u(F^{-k}(p),F)) \subset F^{k+j}(W_r^u(F^{-k-j}(p),F)) \subset F^{k+j}(U),$$

$$F^k(W_r^u(F^{-k}(p),F)) \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} F^{k+j}(U) = A$$

和

$$W^u(p, F) = \bigcup_{k=0}^{\infty} F^k(W_r^u(F^{-k}(p), F)) \subset A.$$

故定理得证. ■

例 13.4.12(螺旋管)　螺旋管是$\mathbb{R}^3$中的吸引子. 考虑这样的坐标，其中有两维是用$\mathbb{C}$中的一个复变量给出的. 令

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$$

为复平面上的单位圆盘，用取模 1 的实变量 t 表示圆 S^1 上的坐标. 那么，一个环体可以表示为

$$U = S^1 \times D = \{(t(\bmod 1), z) \in S^1 \times D\}.$$

将 U 在 t 方向上拉伸 2 倍，在 z 坐标上收缩，然后把所得的细长柱体裹在 U 中并在 S^1 方向上转两周，如此这般就定义一个从 U 到其自身的映射 F，第一坐标函数由 $F_1(t) = 2t(\bmod 1)$ 给出，因此

$$F(t,z) = \left(2t(\bmod 1), \beta z + \frac{1}{2}e^{2\pi t i}\right),$$

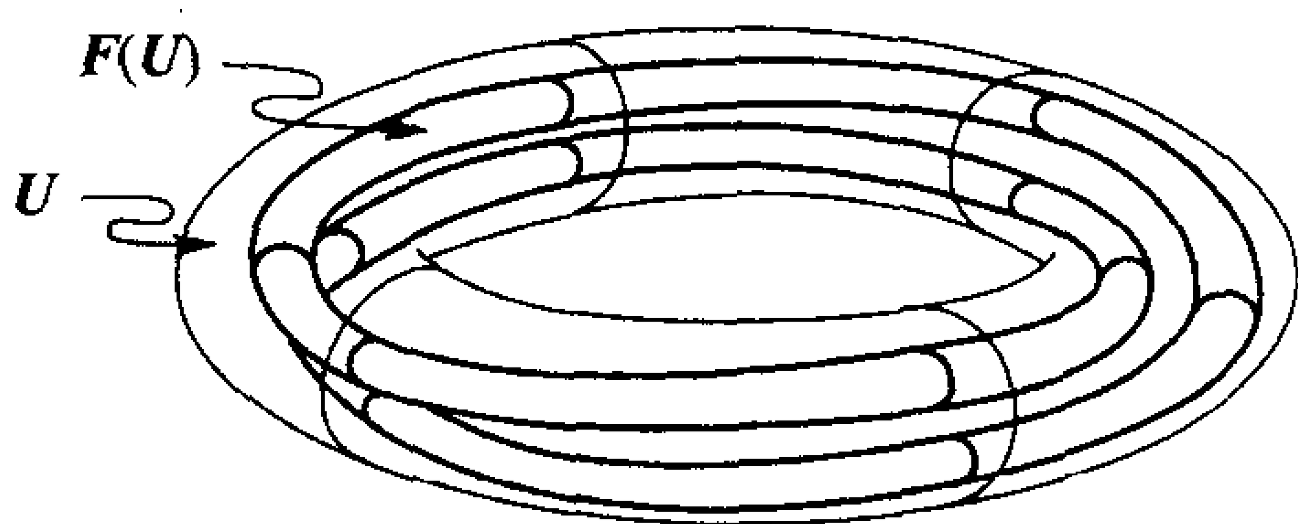


图 13.4.1　螺旋管的收缩域及其像 $F(U)$

其中 $0 < \beta < \frac{1}{2}$. 区域 U 是 F 的收缩域(见图 13.4.1)且有吸引集

$$\Lambda = \bigcap_{k \geqslant 0} F^k(U),$$

以后我们还会知道 Λ 是一个吸引子.

令

562

$$D(t_0) = \{t_0\} \times D$$

为有固定“角度”t_0 的圆盘. 绝对值

$$\left|\frac{1}{2}e^{2\pi t i}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{2\pi t i}\right| = \frac{1}{2},$$

所以圆盘 $D(t_0)$ 的像是一个中心在点$\frac{1}{2}e^{2\pi t i}$(该点位于半径为$\frac{1}{2}$的圆上)、半径为 β 的圆盘. 两个值 t 和 $t+\frac{1}{2}$被映射为同一点，$F_1(t) = F_1\left(t+\frac{1}{2}\right)$. 实际上，如果 $F_1(t) = t_0$，则 $t = \frac{1}{2}t_0$ 或$\frac{t_0}{2}+\frac{1}{2}$. 这样，

$$F(U) \cap D(t_0) = F\left(D\left(\frac{t_0}{2}\right)\right) \cup F\left(D\left(\frac{t_0+1}{2}\right)\right)$$

由中心分别在点

$$\frac{1}{2}e^{\pi t_0 i} \text{ 和 } \frac{1}{2}e^{\pi(t_0+1)i} = \frac{1}{2}e^{\pi t_0 i}e^{\pi i} = -\frac{1}{2}e^{\pi t_0 i}$$

的两个子圆盘组成. 所以这些中心两两相对，且其间距离为 1，又由于 $2\beta < 1$，故圆盘不相交. 如图 13.4.2 所示为 $t_0 = 0$，$\frac{1}{6}$时的 $F(U) \cap D(t_0)$.

而二次像

$$\begin{aligned} F^2(U) \cap D(t_0) &= F\left(F(U) \cap D\left(\frac{t_0}{2}\right)\right) \cup F\left(F(U) \cap D\left(\frac{t_0+1}{2}\right)\right) \\ &= F^2\left(D\left(\frac{t_0}{4}\right)\right) \cup F^2\left(D\left(\frac{t_0+2}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

563

$$\cup F^2\left(D\left(\frac{t_0+1}{4}\right)\right) \cup F^2\left(D\left(\frac{t_0+3}{4}\right)\right)$$

是 $2^2=4$ 个半径为 β^2 的不相交的圆的并. 由归纳法继续下去，$F^k(U)\cap D(t_0)$ 为 2^k 个半径为 β^k 的不相交的的圆的并. 交集

$$D(t_0) \cap \bigcap_{k\geqslant 0} F^k(U) = D(t_0) \cap \Lambda$$

是点的康托尔集，有时称为康托尔尘埃，集合 $D(t_0)\cap\Lambda$ 是闭的且是完备的，其连通分支是单个点，且含有不可数个点.

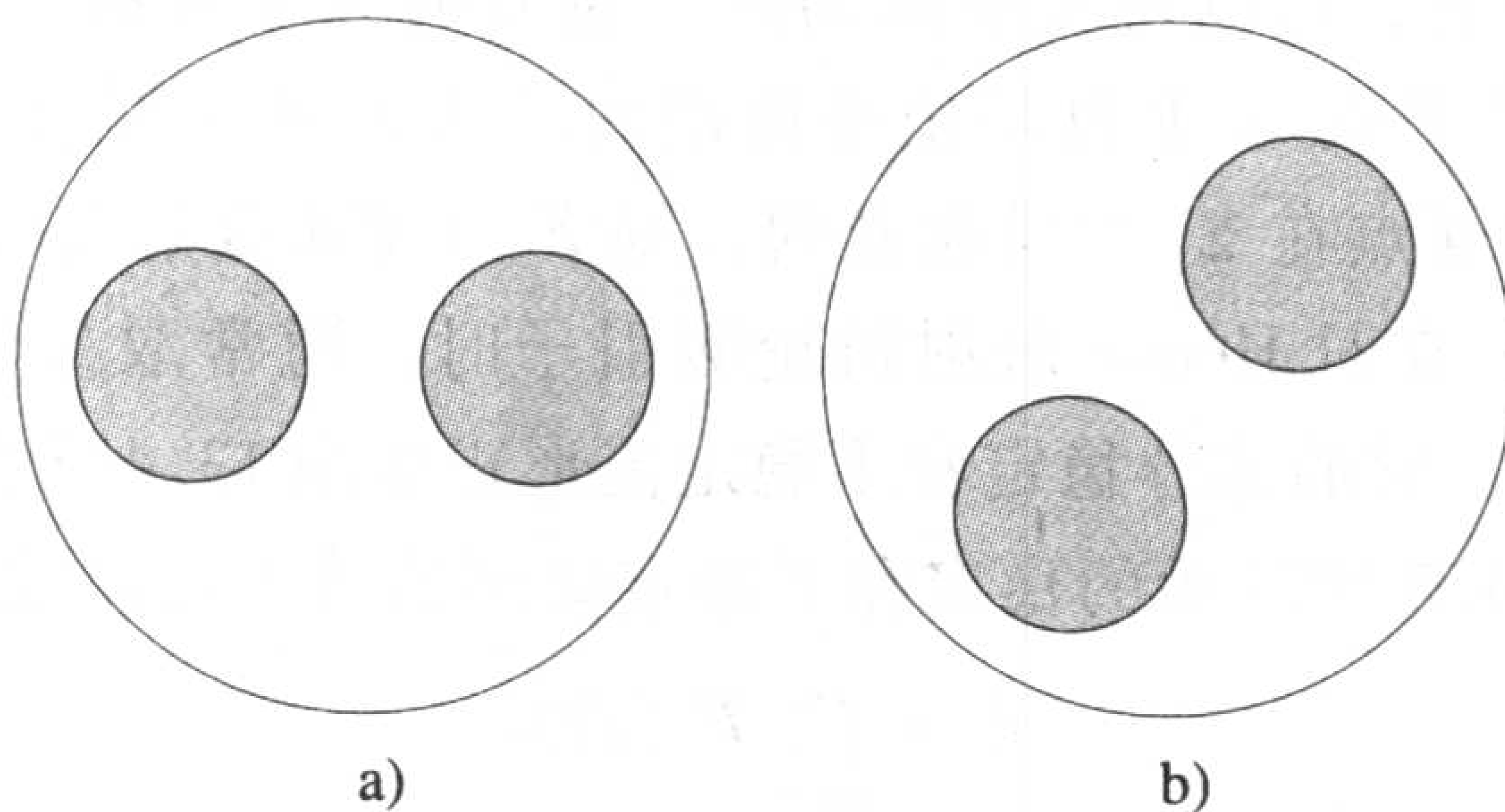


图 13.4.2　$t_0=0$，$\frac{1}{6}$时的 $F(U)\cap D(t_0)$

圆 $D(t_0)$是以因子 β 收缩的且被映入另一个圆 $D(t_1)$内. 继续下去，点的局部稳定流形就是这些二维圆盘之一，即

$$W^s_{\text{loc}}(t_0,z_0) = D(t_0).$$

一条短线段 $L=[t_0,\ t_1]\times\{z\}$ 在 t 方向上被拉伸并环绕在环体 U 上，继续迭代下去，把线段再拉长，一圈又一圈绕在环体 U 上. 因此，不稳定流形为在吸引子内在 t 方向上无限环绕的曲线. 事实上，每个 $W^u(t_0,\ z_0)$都在 Λ 内无限环绕且稠密. 局部地看，康托尔集 $D(t_0)\cap\Lambda$ 中的每个点都被不稳定流形中的某条曲线穿过. 因此，从局部上来看，吸引子是曲线的康托尔集.

收缩域 U 和它的每个迭代 $F^k(U)$都是连通的，且相互嵌套，所以它们的交集 Λ 是连通的. 然而，有两个不同点$(t_1,\ z_1)$和$(t_2,\ z_2)$，它们不能由完全包含在 Λ 内的一条曲线连接.（即 Λ 不是轨道连通的.）

应注意到，这个例子中的映射是可逆的，像 $F^k(U)$随 k 的增大而变小：不存在有限的 k 使 $F^k(U)=\Lambda$. 这个特征与我们对一维映射的吸引子给出的例子是不同的，它是高维可逆映射(微分同胚)的吸引子的一个特性.

马尔可夫分割　令

$$R_0 = \left[0,\frac{1}{2}\right]\times D \text{ 和 } R_1 = \left[\frac{1}{2},1\right]\times D.$$

那么，对任意的 i 和 j，$F(\text{int}(R_i))\cap\text{int}(R_j)$都是连通的，而 $F(R_i)\cap R_j$ 则不然(如，$F(R_0)\cap R_0$ 在$\{0\}\times D$ 内还有第二个圆盘). 马尔可夫分割的其他性质都是很直接的. 边界的各个部分可以表示为

$$\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}_0) = \boldsymbol{D}(0) \cup \boldsymbol{D}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}_1) = \boldsymbol{D}\left(\frac{1}{2}\right) \cup \boldsymbol{D}(1),$$

$$\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}_0) = \left[0,\frac{1}{2}\right] \times \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}_1) = \left[\frac{1}{2},1\right] \times \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

因为所有的转移都是允许的，所以符号空间为两个符号的完全位移空间 Σ_2. 由于位移映射在 Σ_2 上是拓扑传递的，所以 $\boldsymbol{F}$ 在 Λ 上也是拓扑传递的. 这表明 Λ 是吸引子而不仅仅是吸引集. 564 再者，由于位移映射的周期点在 Σ_2 中是稠密的，则 $\boldsymbol{F}$ 的周期点集在 Λ 中是稠密的. ■

例 13.4.13(Hénon)　在对 Hénon 映射讨论吸引子时，通常取参数值 $a=1.4$, $b=-0.3$, 此时它有一个鞍不动点 $\boldsymbol{p}$，它的部分稳定和不稳定流形正如图 13.4.3 所示. 取这样的正不变闭集 Ω，它的边界为图 13.4.3 中所示的稳定和不稳定流形的若干段组成. 令

$$\Lambda = \bigcap_{k\geq 0} \boldsymbol{F}^k(\Omega).$$

对每次迭代，其面积都以 $|\det(D\boldsymbol{F}_{(x,y)})| = |b| = 0.3$ 收缩. 这样，区域 $\boldsymbol{F}^k(\Omega)$ 的面积趋于零，故 Λ 的面积必为零(即为零测度).

为了构造 Λ 的一个收缩域，必须在属于 $W^u(\boldsymbol{p})$ 的边界部分稍微扩大 Ω. 由于映射在 $\boldsymbol{p}$ 点附近向 $W^u(\boldsymbol{p})$ 内收缩，可以选择扩大后的边界曲线使得它的像更靠近 Ω，参见图 13.4.3 中的虚线. 扩大后的区域 $\boldsymbol{U}\supset\Omega$ 仍然是 Λ 的收缩域：

$$\bigcap_{k\geq 0} \boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{U}) = \bigcap_{k\geq 0} \boldsymbol{F}^k(\Omega) = \Lambda.$$

该讨论证明了 Λ 为吸引集.

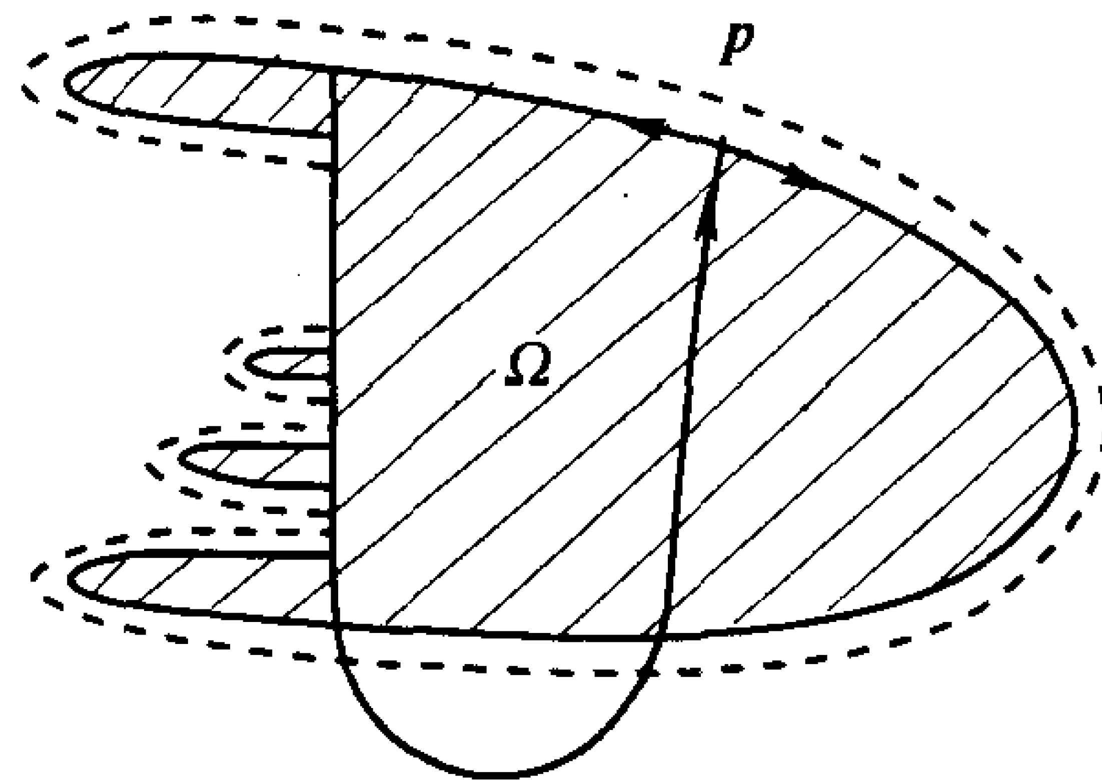


图 13.4.3　Hénon 映射的正不变域

由定理 13.4.11，$\boldsymbol{p}$ 的不稳定流形必须完全包含在 Λ 内，因为属于稳定流形的那部分线段的长度在迭代下趋于零，故可知 $W^u(\boldsymbol{p})$ 在 Λ 内是稠密的. 见[**87**].

局部地，吸引子是由曲线所组成的康托尔集之一般形式，参见图 13.4.4. 当吸引子被部分扩大时，吸引子的形式变化不大，如从图 13.4.4b 到 13.4.4c.

数值验证显示，Λ 中所有点都是链回归的. 图 13.4.4 显示了吸引子中一个点的迭代. M. Benedicks 和 L. Carleson 已经对零附近的 b 值严格证明了这个结论，但当 $b=-0.3$ 时结论就不对了，见[**14**]和[**15**]. ■

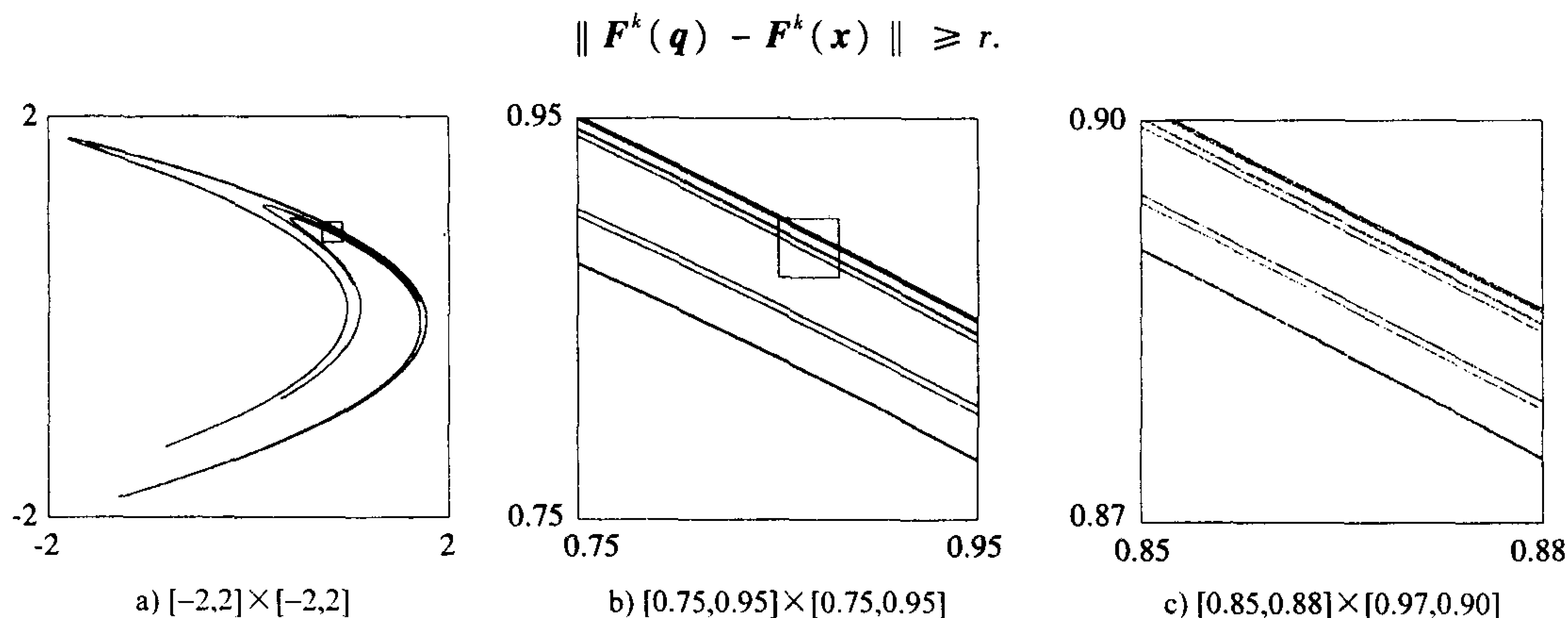
混沌吸引子

如在一维情形下一样，我们利用对初始值的敏感依赖性来定义混沌吸引子.

定义 13.4.14　映射 $\boldsymbol{F}$ 限制在一个不变集 $\boldsymbol{S}$ 上有对初始值的敏感依赖性是指：存在 $r>0$，使得对任一点 $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{S}$ 和任何 $\delta>0$，存在 $k>0$ 和点 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ 满足 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}\|<\delta$，使得

$$\| F^k(q) - F^k(x) \| \geq r.$$

565



a) [−2,2]×[−2,2]　b) [0.75,0.95]×[0.75,0.95]　c) [0.85,0.88]×[0.97,0.90]

图 13.4.4　当 $a=1.4$ 和 $b=-0.3$ 时 Hénon 吸引子内一轨道

定义 13.4.15　一个不变集 S 称为是混沌的，如果它满足下列条件：

1. 它是一个孤立不变集.
2. 它是不可分的.
3. 映射 F 限制在 S 上有对初始值的敏感依赖性.

定义 13.4.16　一个不变集 A 称为是混沌吸引子，如果它满足下列条件：

1. 它是一个吸引集.
2. 它是不可分的.
3. 映射 F 限制在 A 上有对初始值的敏感依赖性.

注 13.4.17　在混沌不变集或混沌吸引子的定义中，我们要求集合是不可分的. 注 13.4.4 指出下面稍强些的条件可以保证一个集合是不可分的：

(2′)在孤立邻域或收缩域 U 中存在一个初始值 x_0，使得 x_0 的 ω 极限集等于 A，即 $\omega(x_0)=A$.

注 13.4.18　在第三个条件中，我们要求系统限制在吸引子上有对初始值敏感依赖性而不只是对吸引子中所有的点都有敏感依赖性. 例 7.2.11 和例 11.2.11 表明这两个条件是不一样的：上述更强的假设消除了这些例子呈现出的这种非混沌性态.

566

例 13.4.19(简单例子)　考虑极坐标下的不可逆映射

$$G(\theta,r) = (2\theta(\bmod 2\pi), \sqrt{r}).$$

集合 $r=1$ 是不变的. 由于 $G_2(r)=\sqrt{r}$，故 $G_2'(r)=1/(2\sqrt{r})$ 和 $G_2'(1)=1/2<1$，所以不变集 $\{r=1\}$ 是吸引的. 映射 G_1 是可传递的，故 G 在圆 $\{r=1\}$ 上必然是链回归的；这样，这个集合就是一个吸引子. 又，映射 G_1 对初始值有敏感依赖性，所以 G 限制在该吸引子上有敏感依赖性. 这样，$\{r=1\}$ 是 G 的混沌吸引子. ■

例 13.4.20(螺旋管)　上一节介绍的螺旋管是一个吸引子. 它限制在吸引子上对初始值有敏感依赖性，因为第一坐标映射(双倍映射)是扩张的. 因此，该集合为螺旋管的混沌吸引子，

这一点与前一个例子中很像，不同的是螺旋管的映射是可逆的而上一个例子不是. ■

例 13.4.21　Martelli 在[73]中给出了下面的有混沌不变集的不可逆映射的例子：考虑函数（在极坐标下）

$$F(r,\theta) = \begin{cases} (2r, \theta + 2\pi\omega (\mathrm{mod}\ 2\pi)), & 0 \leqslant r < 0.5 \\ (2 - 2r, \theta + 2\pi\omega(\mathrm{mod}\ 2\pi)) & 0.5 \leqslant r < 1, \end{cases}$$

其中 ω 为无理数. 第一坐标类似于帐篷映射，因此是拓扑传递的. 第二坐标的函数为一无理旋转，故也是拓扑传递的. 因此，存在一点(r_0, θ_0)，其 ω 极限集等于整个集合. 第一坐标提供了不稳定性，因此也提供了对初始值的敏感依赖性. ■

例 13.4.22　几何马蹄给出了混沌不变集不是吸引子的例子. 定理 13.1.2 证明了存在一个点，它的 ω 极限集为该不变集，而映射限制在该不变集上对初始值有敏感依赖性. 注 13.4.8 给出了一对收缩域，它们确定了孤立邻域，由此知该不变集是不可分的. ■

13.5　高维映射的李雅普诺夫指数

与一维情形下的处理一样，李雅普诺夫指数是一些量，它们可以进行数值计算且与对初始值的敏感依赖性密切相关.

对于从$\mathbb{R}$到其自身的可微映射 f，我们定义点 p 的李雅普诺夫指数为下面的极限：

$$\ell(p,f) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\ln |(f^k)'(p)|.$$

对于从$\mathbb{R}^n$到其自身的映射 $\boldsymbol{F}$，在几个不同的方向，它们有不同速度的扩张和收缩. 这样，我们需要定义一个数，它既依赖于点 $\boldsymbol{p}$，又依赖于一个方向或向量 $\boldsymbol{v}$. 通过仔细选择 n 个不同的向量，对点 $\boldsymbol{p}$ 我们可得到 n 个扩大和缩小的基本速度.

567

定义 13.5.1　令 $\boldsymbol{F}$ 为从$\mathbb{R}^n$到其自身的可微映射，$\boldsymbol{p}$ 为一点且有有界正向轨道$\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p})$. 令 $\boldsymbol{v}$ 为$\mathbb{R}^n$中的一个向量，通常是单位向量（即长为 1），定义 $\boldsymbol{F}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 沿着 $\boldsymbol{v}$ 的方向的李雅普诺夫指数为下面的极限：

$$\ell(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v};\boldsymbol{F}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\ln \| D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p})}\boldsymbol{v} \|.$$

正如一维情形一样，计算李雅普诺夫指数也是利用链式法则，即写出

$$D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p})} = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p}_{k-1})}\cdots D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p}_0)},$$

其中 $\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p})$. 由于矩阵的乘积与顺序有关，所以上面矩阵相乘要按给定的次序进行. 我们也可以令 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}$，定义 $\boldsymbol{v}_k = D\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{p}_{k-1}}\boldsymbol{v}_{k-1}$，那么 $\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{F}) = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln(\|\boldsymbol{v}_{k-1}\|)$.

考虑一 n 维微分同胚 $\boldsymbol{F}$，对于大多数正向轨道有界的初始值 $\boldsymbol{p}$，李雅普诺夫指数对所有向量 $\boldsymbol{v}$ 都是存在的. 当 $\boldsymbol{v}$ 变化时，$\ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{F})$至多有 n 个不同的值. 如果考虑重数，则恰好存在 n 个值：$\ell_1(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{F}) = \ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{F})$，$\ell_2(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{F}) = \ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}_2; \boldsymbol{F})$，…，$\ell_n(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{F}) = \ell(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}_n; \boldsymbol{F})$，可排序使得

$$\ell_1(\boldsymbol{p};\boldsymbol{F}) \geqslant \ell_2(\boldsymbol{p};\boldsymbol{F}) \geqslant \cdots \geqslant \ell_n(\boldsymbol{p};\boldsymbol{F}).$$

在 13.5.1 节中，我们将根据矩阵的特征值解释有 n 个速率的事实. 因为若干量的组合的增长

率是由最大增长率决定的，所以大多数初始向量按速率 $\ell_1(\boldsymbol{p};\ \boldsymbol{F})$ 增大. 实际上，若 $\boldsymbol{v}$ 可写为 $\boldsymbol{v}_j$，…，$\boldsymbol{v}_n$ 的组合，即

$$\boldsymbol{v} = a_j\boldsymbol{v}_j + a_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n,$$

其中 $a_j \neq 0$. 那么

$$\ell(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v};\boldsymbol{F}) = \ell(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}_j;\boldsymbol{F}) = \ell_j(\boldsymbol{p};\boldsymbol{F}).$$

对于一个其导数的行列式为常数的微分同胚，如 Hénon 映射或螺旋管映射，下面的定理给出了所有李雅普诺夫指数之和满足的一个条件.

定理 13.5.2　设 $\boldsymbol{F}$ 为一个 n 维微分同胚，$|\det(D\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{p}})| = \Delta$，$\Delta$ 为常数(与点 $\boldsymbol{p}$ 无关). 那么，对任意点 $\boldsymbol{p}$，只要李雅普诺夫指数存在，就有

$$\ell_1(\boldsymbol{p};\boldsymbol{F}) + \cdots + \ell_n(\boldsymbol{p};\boldsymbol{F}) = \ln(\Delta).$$

在 13.5.1 节，在讨论完为什么李雅普诺夫指数为一系列特定矩阵的特征值的极限后，我们将证明这个定理的真实性.

稍后再回来讨论数值计算李雅普诺夫指数的实用算法. 眼下需要说明的是李雅普诺夫指数类似于周期点的特征值的对数. 实际上，我们有下面的定理.

定理 13.5.3　设 $\boldsymbol{p}$ 为可微映射 $\boldsymbol{F}$ 的一个 m-周期点，令 λ_j 为 $D(\boldsymbol{F}^m)_{(\boldsymbol{p})}$ 的特征值，且有广义特征向量 $\boldsymbol{v}^j$. (如果特征值 $\lambda_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$ 是复数，那么必须用一个复特征向量(有实部和虚部)来代替 $\alpha_j \pm \mathrm{i}\beta_j$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}^j$.)那么，李雅普诺夫指数为

$$\ell(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}^j;\boldsymbol{F}) = \frac{1}{m}\ln|\lambda_j|.$$

用周期来除是因为特征值是映射的幂的而不是映射 $\boldsymbol{F}$ 自身的.

下面的定理类似于关于一维映射的定理 11.3.7，不同的是这里的微分同胚没有使 $\det(D\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{p}}) = 0$ 的点，因此不用担心导数为 0.

568

定理 13.5.4　设 $\boldsymbol{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个微分同胚，进一步设 $\ell_i(\boldsymbol{p}_0;\ \boldsymbol{F})$ 对 $1 \leq i \leq n$ 都存在，且 $\boldsymbol{x}_0$ 为一个满足

$$\lim_{j\to\infty} \|\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}_0)\| = 0$$

的点. 那么，$\ell_i(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{F})$ 存在且 $\ell_i(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{F}) = \ell_i(\boldsymbol{p}_0,\ \boldsymbol{F})$，$1 \leq i \leq n$.

特别地，如果 $\boldsymbol{p}_0$ 是一个周期点，$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{p}_0$ 的轨道的稳定流形上的点，则对 $1 \leq i \leq n$，有 $\ell_i(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{F}) = \ell_i(\boldsymbol{p}_0;\ \boldsymbol{F})$.

我们用两个具有不变扩张和收缩方向的简单例子来结束本节，它们的李雅普诺夫指数可以容易地计算出来. 在 13.5.2 节，对扩张方向在各点不尽相同的例子给出了计算李雅普诺夫指数的数值方法.

例 13.5.5　对于几何马蹄，在所有点的导数都有形式

$$D\boldsymbol{F}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \pm 4 \end{bmatrix}.$$

由于这个导数保持水平和竖直方向，如果 $\boldsymbol{p}$ 为不变集 A 上的一点，则

$$D(F^k)_p\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\pm\left(\frac{1}{3}\right)^k\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$D(F^k)_p\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\pm 4^k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\ell(p,(1,0)^{\mathrm{T}};F)=\ln(1/3)=-\ln 3,$$

$$\ell(p,(0,1)^{\mathrm{T}};F)=\ln 4.$$

因此，映射有两个非零的李雅普诺夫指数：一个为正的，另一个为负的. 又因为

$$\Delta=|\det(DF_{(x,y)})|=\frac{4}{3}$$

为常数，所以 $\ln(\Delta)$ 为两个李雅普诺夫指数的和. ■

例 13.5.6 作为第二个例子，我们考虑螺旋管. 映射的导数为

$$DF_{(t_0,z_0)}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ \pi\mathrm{i} & \beta I_2\end{bmatrix},$$

其中 I_2 为 2×2 阶单位矩阵(因为 β 作用于一个二维空间)，$0<\beta<\frac{1}{2}$. 常数为

$$\Delta=|\det(DF_{(x,y)})|=2\beta^2.$$

切于圆盘 $D(t_0)$ 之一的向量 $v=(0,v_2)^{\mathrm{T}}$ 以因数 $\beta<\frac{1}{2}$ 收缩，且变为同类型的另一个向量. 因此，

$$DF^k_{(t_0,z_0)}\begin{bmatrix}0\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\beta^k v_2\end{bmatrix}$$

且

$$\ell((t_0,z_0),(0,v_2)^{\mathrm{T}};F)=\ln\beta<0.$$

由于这些圆盘是二维的($z\in\mathbb{C}$)，因此李雅普诺夫指数 $\ln\beta$ 的重数为 2.

由定理 13.5.2，第三个李雅普诺夫指数为

569

$$\ln(2\beta^2)-2\ln\beta=\ln 2.$$

这也可以从以下事实看出：导数使得具有形式$(v_1,v_2)^{\mathrm{T}}$(其中 $v_1\neq 0$)的向量的第一个支量以 2 倍的因数伸展，使第二个支量收缩. 因此，增长率取决于第一个支量，即

$$\ell((t_0,z_0),(v_1,v_2)^{\mathrm{T}};F)=\ln 2>0.$$

这个例子有两个负李雅普诺夫指数(两个收缩方向)和一个正李雅普诺夫指数(一个扩张方向). ■

13.5.1 缘于椭球轴的李雅普诺夫指数

本节我们给出李雅普诺夫指数和一个球在导映射下的像的形状之间的关系，这些讨论有助于解释为什么 n 维映射有 n 个李雅普诺夫指数. 进一步，我们将用它建立李雅普诺夫指数之和与微分同胚的导数之行列式的联系.

矩阵作用下单位向量的像

首先考虑在一个线性映射下所有单位向量的像. 我们用记号

$$\mathcal{U}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|=1\}$$

表示$\mathbb{R}^n$上所有单位向量组成的集合. 在$\mathbb{R}^2$上，$\mathcal{U}$为单位圆(周)；在三维空间中，$\mathcal{U}$为单位球面. 在更高维的空间里，这个集合称为 $n-1$ 球面，因为这个集合里有 $n-1$ 个方向(独立坐标).

在二维空间中，单位圆$\mathcal{U}$在线性映射下的像是一个椭圆；在三维及更多维空间中，单位球面$\mathcal{U}$在线性映射下的像是一个椭球面. 椭圆或椭球面的轴长给出了在该线性映射下哪些向量被压缩或拉伸的一些基本量. 对于由一个映射的幂的导数给出的一系列映射，这些扩张速率决定了轨道的李雅普诺夫指数.

定理 13.5.7　令 $\boldsymbol{A}$ 为一个实 $n\times n$ 阶矩阵.

(a)$\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$ 有相同的特征值$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，而且所有的 λ_j 都是实的且 $\lambda_j\geqslant 0$. 令 $s_j=\sqrt{\lambda_j}$，$\{\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^n\}$是 $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$ 的对应的特征值且 $s_j\boldsymbol{u}^j=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j$，则$\{\boldsymbol{u}^1,\cdots,\boldsymbol{u}^n\}$为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$ 的特征向量. 而且，这两组特征向量可以取成为标准正交的，即 $\boldsymbol{v}^k\cdot\boldsymbol{v}^j=0=\boldsymbol{u}^k\cdot\boldsymbol{u}^j$，$k\neq j$ 且 $\|\boldsymbol{v}^j\|=1=\|\boldsymbol{u}^j\|$. 最后，$\mathcal{U}$在 $\boldsymbol{A}$ 下的像是一个由向量$s_j\boldsymbol{u}^j=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j$ 为半轴的椭球面.

(b)如果由 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}^j=s_j\boldsymbol{v}^j$ 来定义矩阵 $\boldsymbol{P}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是一个半正定的对称矩阵. 若令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是一个正交矩阵，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$. 这样，任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以写成一个正交矩阵和一个半正定对称矩阵的积.

更进一步的讨论和这个结论的证明在 13.8 节给出. 椭球面 $\boldsymbol{A}(\mathcal{U})$的轴和它们的长度可以用矩阵 $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量来表示. 本节仅仅给出一个例子来计算这些量，然后再回到李雅普诺夫指数的讨论.

例 13.5.8　令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

570

那么，

$$\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 1+\frac{4}{9}\end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2-\frac{17}{9}\lambda+\frac{16}{81}=0,$$

特征值为

$$\lambda=\frac{1}{9},\frac{16}{9}.$$

所以，尽管 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值都小于 1，而 $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$ 的最大的特征值为$\frac{16}{9}$，是大于 1 的，从而 $\boldsymbol{A}$ 的

范数为$\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$，也大于 1.

李雅普诺夫指数与矩阵积的特征值的对数有关，所以我们通过考虑同一矩阵的幂来继续讨论这个例子. 前面曾看到，

$$A^k=\begin{bmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^k & k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^k\end{bmatrix},$$

$$(A^k)^{\top}A^k=\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}B_k,$$

其中，

$$B_k=\begin{bmatrix}1 & k\left(\frac{3}{2}\right)\\ k\left(\frac{3}{2}\right) & 1+k^2\left(\frac{9}{4}\right)\end{bmatrix}.$$

B_k 的特征值为

$$\lambda^2-\left(2+\frac{9k^2}{4}\right)\lambda+1=0$$

的根，即

$$\lambda=\frac{2+\frac{9k^2}{4}\pm\sqrt{\left(2+\frac{9k^2}{4}\right)^2-4}}{2}=\frac{8+9k^2\pm\sqrt{81k^4+144k^2}}{8}.$$

这样，$(A^k)^{\top}A^k$ 的特征值为

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\left[\frac{8+9k^2\pm 9k^2\sqrt{1+16/(9k^2)}}{8}\right].$$

表 13.5.1 表明这两个特征值中较大的一个，即 $\lambda_1^{(k)}$，先增大然后随着 k 的增大而减小. 这个表还包含平方根 $s_1^{(k)}=\sqrt{\lambda_1^{(k)}}$，在前面李雅普诺夫指数的讨论中提起过它. 这些特征值趋于零的速率与$(2/3)^{2k}$是相同的，其中 2/3 是原矩阵 A 的重特征值.

571

表 13.5.1　例 13.5.8 中$(A^k)^{\top}A^k$ 的较大的特征值 $\lambda_1^{(k)}$ 及其平方根 $s_1^{(k)}$

k	$\lambda_1^{(k)}$	$s_1^{(k)}$	k	$\lambda_1^{(k)}$	$s_1^{(k)}$
1	1.7777	1.3333	4	1.4816	1.2172
2	2.1540	1.4677	5	1.0098	1.0049
3	1.9400	1.3928	6	0.6396	0.7997

在李雅普诺夫指数的计算中，

$$s_j^{(k)}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\left[\frac{8+9k^2\pm 9k^2\sqrt{1+16/(9k^2)}}{8}\right]\right)^{1/2}$$

和

$$\begin{aligned}
\ell_j &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln(s_j^{(k)}) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k}\ln\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8+9k^2 \pm 9k^2\sqrt{1+16/(9k^2)}}{8}\right)\right] \\
&= \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(8+9k^2 \pm 9k^2\sqrt{1+16/(9k^2)}) - \ln(8)}{2k} \\
&= \ln\left(\frac{2}{3}\right),
\end{aligned}$$

因为 $\ln(k^2)=2\ln(k)$ 的增长比 k 慢. 这样，两个李雅普诺夫指数都等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的对数 $\ln(2/3)$. ■

作为特征值极限的李雅普诺夫指数

回到一般的情形，假设 $\boldsymbol{F}$ 为从$\mathbb{R}^n$ 到其自身的可微映射，且点 $\boldsymbol{p}_0$ 的轨道有界. 令

$$\boldsymbol{A}_k = D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p}_0)},$$

$(s_j^{(k)})^2(1\leqslant j\leqslant n)$ 为 $(\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k$ 的特征值，经排序后使得

$$s_1^{(k)} \geqslant s_2^{(k)} \geqslant \cdots \geqslant s_n^{(k)}.$$

因此，像 $\boldsymbol{A}_k(\mathcal{U})$ 是一个轴长为 $s_1^{(k)}$，…，$s_n^{(k)}$ 的椭球面. 稍后给出的 Oseledec 乘法遍历定理表明第 j 个李雅普诺夫指数为第 j 个根 $s_j^{(k)}$ 的对数的极限，即

$$\ell_j(\boldsymbol{p}_0;\boldsymbol{F}) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln(s_j^{(k)}).$$

572

特别地，这表明在 n 维空间上有 n 个李雅普诺夫指数(重数计算在内).

我们根据吸引集的收缩域来叙述 Oseledec 定理. 它的表达涉及任一不变测度，包括频率测度 $\mu_{x_0;F}$. 在给出这个定理之后，我们再对频率测度都给出相同的不变测度的情形来解释它(即存在一个自然测度或 Sinai-Ruelle-Bowen 测度). 进一步的描述可参考有关文献(如[**87**]或[**57**]).

定理 13.5.9(Oseledec 乘法遍历定理) 令 $\boldsymbol{F}$ 为$\mathbb{R}^n$(或其他 n 维空间)上一个 C^2 微分同胚，$\boldsymbol{U}$ 为某孤立不变集 $\boldsymbol{S}$ 的一孤立邻域. 那么，存在一个子集 $\boldsymbol{S}'\subset\boldsymbol{S}$ 使得下列结论成立:

a. 集合 $\boldsymbol{S}'$是不变集，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S}')=\boldsymbol{S}'$.

b. 如果 μ 是任一个支集含于 $\boldsymbol{U}$(从而含于 $\boldsymbol{S}$)的不变概率测度，那么 $\boldsymbol{S}'$有完全 μ 测度，即 $\mu(\boldsymbol{S}')=1$.

c. 在 $\boldsymbol{S}'$ 中取一点 $\boldsymbol{x}_0$，且令 $(s_j^{(k)})^2$ 为 $(D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{x}_0)})^{\mathrm{T}}D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{x}_0)}$ 的特征值，并使它们有序 $s_1^{(k)}\geqslant s_2^{(k)}\geqslant\cdots\geqslant s_n^{(k)}$. 那么，$(1/k)\ln(s_j^{(k)})$ 的极限对 $1\leqslant j\leqslant n$ 都存在而且是点 $\boldsymbol{x}_0$ 的李雅普诺夫指数；即

$$\ell_j(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln(s_j^{(k)}) \text{ 和}$$

$$\ell_1(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{F}) \geqslant \ell_2(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{F}) \geqslant \cdots \geqslant \ell_n(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{F}).$$

d. 对任意的 $x_0 \in S'$，存在一个向量基 $v_{x_0}^1, \cdots, v_{x_0}^n$，使得 $\ell(x_0, v_{x_0}^j; F)$ 存在且等于 $\ell_j(x_0; F)$，$1 \leq j \leq n$.

e. 如果 $x_0 \in S'$，v 是一个向量且可以写成 $v = a_j v_{x_0}^j + \cdots + a_n v_{x_0}^n$，$a_j \neq 0$. 那么，

$$\ell(x_0, v; F) = \ell(x_0, v_{x_0}^j; F).$$

我们现在对吸引子有一个自然测度或 Sinai-Ruelle-Bowen 测度 μ 的情形来解释这个定理. 在这种情形下，存在一个收缩域 U 和依勒贝格测度 λ 有完全测度子集 $U' \subset U$，$\lambda(U') = \lambda(U)$ 和 $\lambda(U \setminus U') = 0$，使得对所有 $x_0 \in U'$ 有 $\mu_{x_0;F} = \mu$. 因为 U' 中某点 x_0 的频率测度等于自然测度 μ，所以在定理的(c)和(d)部分集合 U' 可以用来替换 A'. 又因为频率测度对 U' 中所有点都是一样的，故自然测度 μ 是"遍历"的，而且李雅普诺夫指数与 U' 中的点 x_0 无关. 这样，存在数 $\ell_1, \cdots, \ell_n$ 使得对所有的点 $x_0 \in U'$ 有 $\ell_j(x_0; F) = \ell_j$，$1 \leq j \leq n$. 对于一个有完全勒贝格测度的集合得到这个结论的意义在于，这意味着吸引域中的大多数初始值(依勒贝格测度)都有李雅普诺夫指数. 这样，如果随机选取初始值，李雅普诺夫指数都是存在的且与初始值的选取无关. 所以，李雅普诺夫指数是这类微分同胚的吸引子的一个特征而不是这一特定初始值的特征. 我们用下面的推论总结这些思想.

推论 13.5.10 令 F 为 $\mathbb{R}^n$(或其他 n 维空间)上一个 C^2 微分同胚，且有一个有界吸引子 A，并有自然测度或 Sinai-Ruelle-Bowen 测度 μ. 那么，存在吸引子 A 的一收缩域 U 和一个子集 $U' \subset U$，使得(i) U' 中任一点 x_0 的频率测度等于 μ，$\mu_{x_0:F} = \mu$，(ii)下列结论成立：

573

a. 集合 U' 是相对于 U 的不变集；即 $F(U') = U' \cap F(U)$.

b. 子集 $U' \subset U$ 依勒贝格测度 λ 有完全测度，即 $\lambda(U') = \lambda(U)$ 或 $\lambda(U \setminus U') = 0$.

c. 存在与点无关的数

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

它们给出了 U' 中每个点的李雅普诺夫指数. 更精确地，下面结论成立：对 U' 中的任一点 x_0，令 $(s_j^{(k)})^2$ 为

$$(D(F^k)_{(x_0)})^{\top} D(F^k)_{(p_0)}$$

的特征值，且满足 $s_1^{(k)} \geq s_2^{(k)} \geq \cdots \geq s_n^{(k)}$. 那么，$(1/k)\ln(s_j^{(k)})$ 的极限对 $1 \leq j \leq n$ 都存在而且是点 x_0 的李雅普诺夫指数；即

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \ln(s_j^{(k)}) = \ell_j(x_0) = \ell_j, 1 \leq j \leq n.$$

d. 对 U' 中的任一点 x_0，存在一个向量基 $v_{x_0}^1, \cdots, v_{x_0}^n$，使得 $\ell(x_0, v_{x_0}^j; F)$ 存在且等于 ℓ_j，$1 \leq j \leq n$.

e. 若 $x_0 \in S'$，v 是一个向量且可写成从 $v_{x_0}^j$ 到 $v_{x_0}^n$ 的线性组合 $v = a_j v_{x_0}^j + \cdots + a_n v_{x_0}^n$，$a_j \neq 0$. 那么，$\ell(x_0, v; F) = \ell_j$.

下面我们证明定理 13.5.2 也是 Oseledec 乘法遍历定理的一个推论.

定理 13.5.2 的证明 一个矩阵的特征值的积等于该矩阵的行列式，所以

$$(s_1^{(k)})^2 \cdots (s_n^{(k)})^2 = \det((D(F^k)_{(p_0)})^{\top} D(F^k)_{(p_0)}).$$

但是矩阵的积的行列式等于行列式的积，且一个矩阵的转置的行列式等于原矩阵的行列

式，所以

$$\det((D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p}_0)})^{\top} D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p}_0)}) = (\det(D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p}_0)}))^2.$$

因为

$$D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p}_0)} = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p}_{k-1})} \cdots D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p}_0)},$$

可得

$$\begin{aligned}(s_1^{(k)})^2 \cdots (s_n^{(k)})^2 &= (\det(D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p}_0)}))^2 \\ &= (\det(D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p}_{k-1})}) \cdots \det(D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p}_0)}))^2 \\ &= (\Delta^k)^2 = \Delta^{2k}.\end{aligned}$$

574

因此

$$\begin{aligned}\ln(\Delta) = \frac{1}{2k}\ln(\Delta^{2k}) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\ln((s_1^{(k)})^2 \cdots (s_n^{(k)})^2) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\ln(s_1^{(k)}) + \cdots + \frac{1}{k}\ln(s_n^{(k)}) \\ &= \ell_1(\boldsymbol{p}_0) + \cdots + \ell_n(\boldsymbol{p}_0).\end{aligned}$$

■

13.5.2　李雅普诺夫指数的数值计算

到目前为止，我们已经定义了李雅普诺夫指数且把它们与一列矩阵的特征值的极限建立了联系．本节我们将描述对它们做数值计算的步骤．

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在$\mathbb{R}^2$ 中的原点处有一个鞍点，对大部分的初始向量 $\boldsymbol{v}$，迭代 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}$ 趋于扩张特征向量的方向．在$\mathbb{R}^n$ 上用同样的方法，对大部分的初始向量 $\boldsymbol{v}$，在 k 次幂的导数的作用下，当 k 趋向于无穷时，$D(\boldsymbol{F}^k)_{(\boldsymbol{p}_0)}\boldsymbol{v}$ 趋于增加最大的方向．因此，对于大多数向量有

$$\ell(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{F}) = \ell_1(\boldsymbol{p}_0; \boldsymbol{F}).$$

寻求增长率次大的向量是很困难的，除非是其导数为常数矩阵的这种特殊情形．因此，我们并不试图确定这个向量，而是用格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)过程，即取一个无关向量组，然后把它们正交化．

在$\mathbb{R}^3$ 中我们列出这一过程，但它很容易被推广到任意维空间．令 $\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}_0)$，从互相正交(垂直的)单位向量组 $\boldsymbol{v}_1^0$，$\boldsymbol{v}_2^0$，$\boldsymbol{v}_3^0$ 开始，它们显然是规范的．取它们在 $\boldsymbol{p}_0$ 点的导数下的像：

$$\boldsymbol{w}_j^1 = D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p}_0)}\boldsymbol{v}_j^0, \quad j = 1,2,3.$$

可认为这些向量以 $\boldsymbol{p}_1$ 为基点．应用格拉姆-施密特过程可把这些向量变为一正交向量组：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1^1 &= \boldsymbol{w}_1^1, \\ \boldsymbol{v}_2^1 &= \boldsymbol{w}_2^1 - \left(\frac{\boldsymbol{w}_2^1 \cdot \boldsymbol{v}_1^1}{\|\boldsymbol{v}_1^1\|^2}\right)\boldsymbol{v}_1^1, \\ \boldsymbol{v}_3^1 &= \boldsymbol{w}_3^1 - \left(\frac{\boldsymbol{w}_3^1 \cdot \boldsymbol{v}_1^1}{\|\boldsymbol{v}_1^1\|^2}\right)\boldsymbol{v}_1^1 - \left(\frac{\boldsymbol{w}_3^1 \cdot \boldsymbol{v}_2^1}{\|\boldsymbol{v}_2^1\|^2}\right)\boldsymbol{v}_2^1.\end{aligned}$$

注意到，$\boldsymbol{v}_2^1$ 垂直于 $\boldsymbol{v}_1^1$，而且由 $\boldsymbol{v}_1^1$ 和 $\boldsymbol{v}_2^1$ 张成的平行四边形面积与由 $\boldsymbol{w}_1^1$ 和 $\boldsymbol{w}_2^1$ 张成的一样；还注

意到，v_3^1 垂直于 v_1^1 和 v_2^1，而且由 v_1^1，v_2^1 和 v_3^1 张成的平行六面体的体积与由 w_1^1，w_2^1 和 w_3^1 张成的一样.

575

由归纳法继续，假设我们已经定义了 v_1^{k-1}，v_2^{k-1} 和 v_3^{k-1}，取这些向量在 p_{k-1} 点的导数下的像：

$$w_j^k = DF_{(p_{k-1})}v_j^{k-1}, \quad j = 1,2,3.$$

其中认为这些向量以 p_k 为基点. 同上，应用格拉姆–施密特过程把这些向量正交化：

$$v_1^k = w_1^k,$$

$$v_2^k = w_2^k - \left(\frac{w_2^k \cdot v_1^k}{\| v_1^k \|^2}\right)v_1^k,$$

$$v_3^k = w_3^k - \left(\frac{w_3^k \cdot v_1^k}{\| v_1^k \|^2}\right)v_1^k - \left(\frac{w_3^k \cdot v_2^k}{\| v_2^k \|^2}\right)v_2^k.$$

注意到，由 v_1^k 和 v_2^k 张成的平行四边形的面积与由 w_1^k 和 w_2^k 张成的一样；还注意到，由 v_1^k，v_2^k 和 v_3^k 张成的平行六面体的体积与由 w_1^k，w_2^k 和 w_3^k 张成的一样.

值得指出的是 $s_j^{(k)}$ 与 $\| v_j^k \|$ 以相同的速率增长，这一点并不明显，其中 $(s_j^{(k)})^2$ 为 $(D(F^k)_{(p_0)}^{\top})D(F^k)_{(p_0)}$ 的第 j 个特征值，所以

$$\ell_j(p_0;F) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\ln \| v_j^k \|.$$

通过每一步都使向量互相垂直，第二个向量长度的增长率给出了第二个李雅普诺夫指数，第三个向量长度的增长率给出了第三个李雅普诺夫指数.

例 13.5.11　对于取 $a=1.4$ 和 $b=-0.3$ 的 Hénon 映射，第一个李雅普诺夫指数可以计算出等于 $\ell_1(p;\ F)=0.42\cdots$. 因为导数的行列式是一个常数，不必去数值计算第二个李雅普诺夫指数，我们可以仅仅从第一个指数和行列式的对数来得到它. 李雅普诺夫指数的和等于

$$\ln(\Delta) = \ln(|\det(DF_x)|) = \ln(0.3),$$

所以，第二个李雅普诺夫指数为

$$\begin{aligned}\ell_2(p;F) &= \ln(0.3) - \ell_1(p;F)\\ &= -1.20\cdots - 0.42\cdots\\ &= -1.62\cdots.\end{aligned}$$

■

13.6　混沌吸引子的检验

正如对一维映射和微分方程组所做的一样，我们用李雅普诺夫指数给出混沌吸引子存在的一个判别准则. 这个判别准则在实验或数值工作中比我们给出的定义更容易验证. 我们不把这个准则作为定义，因为有很多不同的病态很难用这种方法来排除. 然而，对于“绝大部分系统”，病态不会发生，因此这个准则是检验一个系统是否出现混沌吸引子的好方法.

576

假设所有的李雅普诺夫指数都非零，所以相近的轨道不会沿着平行路线行进. 这个准则也排除了拟周期运动. (见下面的例 13.6.4 和例 11.2.11.)　如果指数之一是正的，那么相应方

向上的小的位移也会导致长度的增长(至少是无穷小的).

混沌吸引子检验 一个集合 $\boldsymbol{A}$ 是映射 $\boldsymbol{F}$ 的一个混沌吸引子的实验判别准则如下:

1. 存在以 $\boldsymbol{A}$ 为 ω 极限集的且不共轨道的许多点 $\boldsymbol{x}_0^1, \cdots, \boldsymbol{x}_0^k$, 即
$$\omega(\boldsymbol{x}_0^i;\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$
2. 点 $\boldsymbol{x}_0^i$ 至少有一个李雅普诺夫指数是正的, $\ell_1(\boldsymbol{x}_0^i; \boldsymbol{F}) > 0$.
3. 所有的李雅普诺夫指数非零, $\ell_j(\boldsymbol{x}_0^i; \boldsymbol{F}) \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

注 13.6.1 存在许多不同点有同一 ω 极限集这一事实表明吸引域有正测度, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是米尔诺吸引子. 许多情况下这种米尔诺吸引子有收缩域, 但这在实验上难以验证. 我们不要求点 $\boldsymbol{x}_0^i$ 在 $\boldsymbol{A}$ 中, 因此 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上未必是拓扑转递的, 然而, 由于确实有 $\omega(\boldsymbol{x}_0^i; \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}$, 不存在吸引的真子集, 故 $\boldsymbol{A}$ 应当是吸引子.

在这个判别准则中, 正李雅普诺夫指数的存在性代替了对初始值的敏感依赖性, 后者曾在 13.4.1 节给出的数学味较浓的定义中出现过.

注 13.6.2 大部分满足前面的检验的系统也满足更早给出的定义. 这样, 我们心照不宣地假设系统是"通有"的. 这个假设是不能验证的, 但常用于消除如与例 11.2.11 相关的例 7.2.11 的情况. 这个条件蕴涵周期点是在 $\boldsymbol{A}$ 中是稠密的, 且不动点和周期轨道的稳定和不稳定流形彼此交叉穿过. 对于混沌吸引子的定义与通有性质的关系的更多讨论, 可参见附录 D 中的内容.

注 13.6.3 我们所称的混沌吸引子的检验方法本质上是 Alligood、Sauer 和 Yorke 在他们的书[7]中给出混沌吸引子的定义. 他们在多处都给出了定义, 但对单变量映射, 他们称集合 $\boldsymbol{A}$ 为 f 的一个混沌吸引子, 如果(i) $\boldsymbol{A}$ 是一个米尔诺吸引子和(ii)存在 $\boldsymbol{A}$ 中一点 $\boldsymbol{x}_0$ 使得 $\omega(x_0; f) = \boldsymbol{A}$ 和 $\ell(x_0; f) > 0$.

例 13.6.4(拟周期吸引子) 考虑映射
$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\omega) & -\sin(2\pi\omega) \\ \sin(2\pi\omega) & \cos(2\pi\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x\,(1+2x)^{-1} \\ 3y\,(1+2y)^{-1} \end{bmatrix},$$
其中 ω 为无理数. 如果我们引入极坐标 $r^2 = x^2 + y^2$ 和 $\tan(\theta) = y/x$, 那么映射变为
$$\boldsymbol{G}\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3r\,(1+2r)^{-1} \\ \theta + \omega(\bmod 2\pi) \end{bmatrix}.$$
令 $f(r) = 3r\,(1+2r)^{-1}$, 则 $f(1) = 1$ 和 $f'(1) = 1/3$, 所以集合 $r = 1$ 是一个吸引集. 由于此集合上的运动是一个无理旋转, 故存在一个稠密轨道, 从而该集合为吸引子. 两个变量耦合在一起(偏导数矩阵是对角的); 对变量 r 的李雅普诺夫指数为 $\ln(1/3) = -\ln(3)$, 对变量 θ 的李雅普诺夫指数为 0. 所以, 整个系统的李雅普诺夫指数是 $-\ln(3)$ 和 0. 由于 0 作为一个李雅普诺夫指数出现, 所以吸引子不满足混沌吸引子检验的条件. 注意到映射限制在混沌吸引子上对初始值不具有敏感依赖性, 所以该吸引子也不满足我们对混沌吸引子定义的条件. 由于无理旋转表现出来的性态不是"混沌"的, 所以这个分类就很自然了. ■

577

13.7 应用

太阳系的稳定性

庞加莱

在历史回顾中，我们提到亨利·庞加莱与太阳系的运动有关的工作. 事实上，在 G. Mittag-Leffler 的催促下，1885 年瑞典奥卡国王对能证明太阳系是稳定还是不稳定的任何人提供奖金. 该奖金在 1889 年授予了庞加莱，原因是他在一篇文章里引入了同宿点的不稳定性的思想. 他讨论了为什么在如太阳系等系统里，稳定和不稳定流形的同宿相交会导致对初始值的敏感依赖性. 下面引用庞加莱后来的书《Les Méthodes Nouvelles》中的一段话，这段话体现了他对产生于横截同宿点的复杂性的深刻理解：

当我们试图描绘由[稳定和不稳定流形]及它们的无限多个交点形成的图像时，其中每个交点都对应于一个双渐近解，这些交点形成了一类有无限网眼的格子或网格. 两条曲线都不能与它自身再次相交，但必须依一种非常复杂的方式弯曲返回到它自身，以至于与网格中的所有网眼相交无数次.

尽管庞加莱没有完整地证明太阳系的不稳定性，但仍然因为他原创性的贡献而授予了奖金. 对庞加莱工作更完整的讨论，包括他最初的错误，见 F. Diacu 和 P. Holmes 的书[**33**]和 J. Barrow-Green 的书[**10**].

牛顿力学框架下的马蹄

从庞加莱最初的论文问世以来，已有很多的研究工作致力于探索对稳定性和不稳定性的认识和理解. 20 世纪 60 年代，斯梅尔关于几何马蹄及其与同宿点(或异宿环)的联系的工作是在这个努力上的重要一步. 他的综述论文[**98**]总结了他的很多结果，并进一步激发了对动力系统稳定性和不稳定性以及 n 体问题和其他应用的数学研究.

J. Moser 的书[**78**]把这些思想应用到了在牛顿引力影响多体的运动问题，也就是所谓的 n 体问题. 特别地，他对[**97**]中给出的三体振荡的 K. Sitnikov 例子给出了一个非常清晰的处理方法. 按其最简形式，假定两个重质量物体在平面上一椭圆轨道上运动，设第三个物体适当轻以至于不会影响前两个物体的运动，但会受到它们的影响. 这就是所谓的*约束三体问题*. 在 K. Sitnikov 的例子中，第三个物体在 z 轴上运动，z 轴垂直于前两个大物体运动的平面且通过这两个物体的质量中心. 当第三个物体在无穷远时，前两个物体在一条周期轨上运动. 这个周期轨在相空间有稳定和不稳定流形，且沿着 z 轴与第三个物体有有限的距离，可以证明这些稳定和不稳定流形有一个横截的同宿点. 稳定和不稳定流形的这个交集蕴涵第三个物体存在复杂的轨道，这可以利用符号系统给予阐述. 第三个物体沿 z 轴上下移动，与平面 $z=0$ 反复相交. 可按在第三个物体与 $z=0$ 相交的间隔时间内前两个物体所做的旋转次数来赋予符号. 存在一个整数 N，使得对任一个整数列 n_i，其中 $n_i \geq N$，存在一条轨线，使得前两个物体在第三个物体第 i 次与第 $i+1$ 次与 $z=0$ 相交的时间里完成了 n_i 次旋转. 这样，就存在一些轨道会一直振荡下去，而另一些轨道在振荡若干次后会逃逸至无穷. 尽管这个运动与太阳系运动不够接近，但它确实揭示在牛顿引力影响下物体的运动可以有很复杂的运动方式.

578

致力于证明 n 体问题的马蹄的存在性的还有其他人，Z. Xia(夏志宏)有一些非常有意义的结果. Sitnikov 的空间问题的维数低于运动于平面的三体问题(在 Sitnikov 的例子中，第三个物体被限制在一条线上). 对于平面三体问题，Xia 证明了马蹄和混沌运动的存在性[**115**].

在另一个工作[**116**]中，他对具正质量且在有限时间内不碰撞的一类五体问题证明了运动的存在性，这回答了 Painlevé 的一个遗留问题：在没有碰撞时并非对所有时间都有定义的运动是否可能存在. 这个问题是 P. Painlevé 在 1890 年前后提出的. 早些时候，J. Mather 和 R. McGehee[**74**]已经给出了位于包括双态碰撞的直线上的解. 由于目标并没有碰撞，Xia 的结果圆满解决了这个问题.

其他许多人对理解 n 体问题可能的运动的复杂性各有贡献. D. Saari 对数学理论做出了一些贡献，包括物体在分离运动中的构型的分类. 在[**92**]中他展望性地介绍了自己对 n 体问题的研究方法. K. Meyer 和 G. R. Hall 的书[**76**]也对 n 体问题给出了一个数学介绍，F. Diacu 和 P. Holmes 的书[**33**]则主要描述了这个问题的历史，它是为非专家而写的，但也涉及了许多数学概念.

太阳系的计算研究

庞加莱，斯梅尔和夏的工作表明在牛顿引力影响下的 n 个物体的运动是有可能不稳定的，但这些结论并不能直接适用于太阳系. J. Laskar[**61**]和 G. J. Sussman 与 J. Wisdom[**105**]对太阳系的数值模拟表明初始值的分离要出现以因数的 $e\approx 2.718$ 增长需要用 500 万年的时间才行. 太阳系的年龄是大约 50 亿年，这虽然比人们预期的要短，但相对于人类的寿命仍然是一个非常长的时间了.

因而，根据人类的观察，太阳系表现得非常稳定. 但是数学和计算结果都显示，它将来的长期性态是不能根据甚至只有很小不确定性的测量来给出确定性预测的.

13.8　理论与证明

双曲环面自同构的马尔可夫分割

定理 13.2.26　令 $\mathcal{R}=\{\boldsymbol{R}_i\}_{i=1}^{m}$ 为 $\mathbb{T}^2$ 上一个双曲环面自同构的马尔可夫分割，且转移矩阵为 $\boldsymbol{T}$，且

$$\bigcup_{j=1}^{m}\boldsymbol{R}_j=\mathbb{T}^2.$$

令 $(\Sigma_T,\ \sigma_T)$ 为位移空间，且定义 $k:\ \Sigma_T\to\mathbb{T}^2$ 为

$$k(\boldsymbol{s})=\bigcap_{n=0}^{\infty}\operatorname{cl}\left(\bigcap_{j=-n}^{n}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j}^{\circ})\right).$$

579

则 k 是一个从 σ_T 到 $\boldsymbol{F}$ 的有限多对一的半共轭. 事实上，k 至多是 m^2 对一的，其中 m 为分割中矩形的个数.

证明　由假设，$\operatorname{cl}(\boldsymbol{R}_{s_j}^{\circ}\cap\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{R}_{s_{j+1}}^{\circ}))$是一个非空子矩形，它在稳定方向上总是穿行的，由归纳法，

$$\operatorname{cl}\left(\bigcap_{j=n}^{n+i}\boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j}^{\circ})\right)$$

对任意的 n，$j \geqslant 0$ 是一个在稳定方向上不断穿行的非空子矩形. 该集合在不稳定方向的宽度以 1 除以扩张常数的速度指数阶衰减. 这样，存在点 $\boldsymbol{p}_1 \in \boldsymbol{R}_{s_0}$ 使得

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=0}^{n} \boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j}^{\circ})\right) = W^s(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{R}_{s_0}).$$

类似地，存在点 $\boldsymbol{p}_2 \in \boldsymbol{R}_{s_0}$ 使得

$$\bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=n}^{0} \boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j}^{\circ})\right) = W^u(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{R}_{s_0}).$$

因此，

$$\bigcap_{n=\infty}^{\infty} \mathrm{cl}\left(\bigcap_{j=0}^{n} \boldsymbol{F}^{-j}(\boldsymbol{R}_{s_j}^{\circ})\right) = W^s(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{R}_{s_0}) \cap W^u(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{R}_{s_0})$$

仅是一点 $\boldsymbol{p} = k(\boldsymbol{s})$，这表明 k 确实是一映射. 如对马蹄映射一样的讨论，可证 k 是连续，满的，故是半共轭.

下面将证明 k 至多是 m^2 对一的，其中 m 为分割中矩形的个数. 令 $\boldsymbol{p} = k(\boldsymbol{s})$，如果对所有的 j，$\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{R}_{s_j}^{\circ}$ 而不仅仅是在 $\boldsymbol{R}_{s_j}$ 中，那么 $k^{-1}(\boldsymbol{p})$ 就是唯一的符号列 $\boldsymbol{s}$，因为对 $i \neq s_j$ 有 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}) \notin \boldsymbol{R}_i$. 因此，我们仅需要考虑 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p})$ 在某一个矩形 $\boldsymbol{R}_i$ 的边界上的情形. 任意 M 矩形的边界是由 $\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}_i)$ 和 $\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}_i)$ 组成的，其中 $\partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}_i)$ 是不稳定流形 $W^u(z, \boldsymbol{R}_i)$ 的并，而 $\partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}_i)$ 是稳定流形 $W^s(z, \boldsymbol{R}_i)$ 的并. 如果 $\boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}) \in \partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}_{s_j})$，则 $\boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{p}) \in \partial^{\text{out}}(\boldsymbol{R}_{s_i})$，$i \geqslant j$，对 s_j 至多有 m 个选择. 由于内部的转换是唯一的，所以 s_j 的一个选择决定了 s_i 的选择，$i \geqslant j$. 类似地，如果 $\boldsymbol{F}^{j'}(\boldsymbol{p}) \in \partial^{\text{in}}(\boldsymbol{R}_{s_{j'}})$，那么 $s_{j'}$ 的一个选择决定了 s_i 的选择，$i \leqslant j'$. 结合起来即证明了至多有 m^2 个选择. ■

一个球面的线性像是一个椭球面

定理 13.5.7　令 A 为一个实 $n \times n$ 阶矩阵，$\mathcal{U}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位长向量的集合.

(a) $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$ 有相同的特征值 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$，而且所有的 λ_j 都是实的且 $\lambda_j \geqslant 0$. 令 $s_j = \sqrt{\lambda_j}$，$\{\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^n\}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$ 的对应的特征值且 $s_j\boldsymbol{u}^j = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j$，则 $\{\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n\}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$ 的特征向量. 而且，这两组特征向量可以取成为标准正交的，即 $\boldsymbol{v}^k \cdot \boldsymbol{v}^j = 0 = \boldsymbol{u}^k \cdot \boldsymbol{u}^j$，$k \neq j$ 且 $\|\boldsymbol{v}^j\| = 1 = \|\boldsymbol{u}^j\|$. 最后，$\mathcal{U}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 下的像是一个由向量 $s_j\boldsymbol{u}^j = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j$ 为半轴的椭球面.

(b) 如果由 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}^j = s_j\boldsymbol{v}^j$ 来定义矩阵 $\boldsymbol{P}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是一个半正定的对称矩阵. 若令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是一个正交矩阵，且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$. 这样，任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以写成一个正交矩阵和一个半正定对称矩阵的积.

580

证明　比值 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\| / \|\boldsymbol{v}\|$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 当被 $\boldsymbol{A}$ 作用时伸长的量. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ 的长的平方

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

与矩阵 $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$ 有关. 这个矩阵的特征值 λ_j 是实的，因为它是对称的：

$$(\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A})^{\top} = \boldsymbol{A}^{\top}(\boldsymbol{A}^{\top})^{\top} = \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}.$$

对应的特征向量 $\boldsymbol{v}^j$ 可以取为一个标准正交基(即长为 1 且相互垂直：$\boldsymbol{v}^k \cdot \boldsymbol{v}^j = 0$，$k \neq j$ 和 $\boldsymbol{v}^j \cdot \boldsymbol{v}^j = \|\boldsymbol{v}^j\|^2 = 1$). 而且

$$0 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j\|^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j)^{\top}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j) = (\boldsymbol{v}^j)^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^j$$

$$= (\boldsymbol{v}^j)^{\top}\lambda_j\boldsymbol{v}^j = \lambda_j \|\boldsymbol{v}^j\|^2 = \lambda_j.$$

因此，$A^{\top}A$ 的特征值 λ_j 都是非负的.（这样的对称矩阵 $A^{\top}A$ 称为半正定的.）这**第一步**已经证明了 $A^{\top}A$ 的特征值 λ_j 是实的和非负的，它们对应的特征向量 $\{\boldsymbol{v}^j\}$ 形成一个标准正交基. 令 $s_j=\sqrt{\lambda_j}$.

如果我们定义矩阵 P 使得 $P\boldsymbol{v}^j=s_j\boldsymbol{v}^j$，那么 $P^2\boldsymbol{v}^j=s_j^2\boldsymbol{v}^j=A^{\top}A\boldsymbol{v}^j$ 且 P 为一个半正定的对称矩阵. 由于 $P^2=A^{\top}A$，P 可以解释成 $A^{\top}A$ 的平方根，即 $P=\sqrt{A^{\top}A}$.

结果表明 $A^{\top}A$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}^j$ 是决定在 A 作用下向量被拉伸程度的方向，它们的像 $A\boldsymbol{v}^j=s_j\boldsymbol{u}^j$ 给出了椭球的轴.

第二步证明 $\boldsymbol{u}^j=(1/s_j)A\boldsymbol{v}^j$ 是矩阵 $AA^{\top}$ 对应于同一特征值 λ_j 的特征向量. 为了简化讨论，已假定所有的 $\lambda_j>0$；如果对 $1\leqslant j\leqslant k$ 有 $s_j=0$，则取这样的 $\boldsymbol{u}^j$，它们为垂直于 $\boldsymbol{u}^i(k<i\leqslant n)$ 的单位向量. 我们省略对这种可能性的具体描述. 第二步的证明是一个直接计算，这用到定义和重组矩阵的积：

$$(AA^{\top})\boldsymbol{u}^j = (AA^{\top})\frac{1}{s_j}A\boldsymbol{v}^j = \frac{1}{s_j}A(A^{\top}A)\boldsymbol{v}^j$$

$$= \frac{1}{s_j}A\lambda_j\boldsymbol{v}^j = \lambda_j\boldsymbol{u}^j.$$

第三步证明向量组 $\{\boldsymbol{u}^j\}$ 形成了一个标准正交基（即 $\boldsymbol{u}^k\cdot\boldsymbol{u}^j=0$，$k\neq j$ 且 $\boldsymbol{u}^j\cdot\boldsymbol{u}^j=\|\boldsymbol{u}^j\|^2=1$）. 同样地，这也是一个直接计算：

$$\boldsymbol{u}^k\cdot\boldsymbol{u}^j = (\boldsymbol{u}^k)^{\top}\boldsymbol{u}^j = \left(\frac{1}{s_k}A\boldsymbol{v}^k\right)^{\top}\left(\frac{1}{s_j}A\boldsymbol{v}^j\right)$$

$$= \frac{1}{s_ks_j}(\boldsymbol{v}^k)^{\top}(A^{\top}A)\boldsymbol{v}^j = \frac{1}{s_ks_j}(\boldsymbol{v}^k)^{\top}\lambda_j\boldsymbol{v}^j$$

$$= \frac{\lambda_j}{s_ks_j}\boldsymbol{v}^k\cdot\boldsymbol{v}^j = \begin{cases}0 & k\neq j\\ 1 & k=j.\end{cases}$$

581

第四步证明像 $A(\mathcal{U})$ 是一个椭球. 为了确定像，我们由标准正交集 $\{\boldsymbol{v}^j\}$ 来表示任一向量 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{U}$：$x=x_1\boldsymbol{v}^1+\cdots+x_n\boldsymbol{v}^n\in\mathcal{U}$ 且 $\|\boldsymbol{x}\|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2=1$. 像点为

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = x_1A\boldsymbol{v}^1+\cdots+x_nA\boldsymbol{v}^n$$

$$= x_1s_1\boldsymbol{u}^1+\cdots+x_ns_n\boldsymbol{u}^n.$$

这样，像点 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 在基 $\{\boldsymbol{u}^j\}$ 下有坐标 $y_j=x_js_j$，这些坐标满足

$$\frac{y_1^2}{s_1^2}+\cdots+\frac{y_n^2}{s_n^2} = x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1,$$

所以 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 在椭球

$$\left\{y_1\boldsymbol{u}^1+\cdots+y_n\boldsymbol{u}^n:\frac{y_1^2}{s_1^2}+\cdots+\frac{y_n^2}{s_n^2}=1\right\}$$

上，它有沿着向量 $\boldsymbol{u}^j$ 的轴，且对应轴长为 $s_j=\sqrt{\lambda_j}$，即

$$A(\mathcal{U}) = \left\{y_1\boldsymbol{u}^1+\cdots+y_n\boldsymbol{u}^n:\frac{y_1^2}{s_1^2}+\cdots+\frac{y_n^2}{s_n^2}=1\right\}.$$

第五步即最后一步是把矩阵 A 写成一正交矩阵和一半正定对称矩阵的积. 在第一步的最后我们已说过，存在一个半正定对称矩阵 P 满足 $P^2=A^{\top}A$. 如果令 $Q=AP^{-1}$，那么

$$\begin{aligned}Q^{\top}Q &= (P^{-1})^{\top}A^{\top}AP^{-1}\\ &= P^{-1}P^2P^{-1}=I,\end{aligned}$$

所以 Q 是一个正交矩阵.（在上面给出的基之下，$Qv^j=u^j$.）因此，任意矩阵 A 可以写成 $A=QP$，其中 Q 是一个正交矩阵而 P 是半正定对称矩阵. 通过类似的讨论，它也可以写成 $A=P'Q'$，其中 P'是一个半正定对称矩阵而 Q'是正交的.

我们可以进一步分解矩阵. 如前写成 $A=QP$，那么半正定对称矩阵 P 在某正交矩阵 Q_1 下共轭于一个非负对角矩阵 Λ. 那么，$A=QQ_1^{-1}\Lambda Q_1=Q_2\Lambda Q_1$，其中 Q_1 和 Q_2 是正交的，而 Λ 是一个非负对角矩阵. ■

练习

13.1　几何马蹄

13.1.1　考虑本章所给的几何马蹄映射.

a. 在平面上求两个不动点的坐标. 提示：考虑 F 在 H_0 和 H_1 中两种不同的定义：

$$F_0(x,y)=\left(\frac{1}{3}x,4y\right)\quad (x,y)\in H_0$$

$$F_1(x,y)=\left(1-\frac{1}{3}x,4-4y\right)\quad (x,y)\in H_1.$$

582

因此，一个不动点满足 $F_0(x,y)=(x,y)$，另一不动点满足 $F_1(x,y)=(x,y)$.

b. 求 2-周期轨道上的点. 提示：这种轨道上的点 q 满足 $F_1\circ F_0(x,y)=(x,y)$，另一点就是$F_0(q)$.

13.1.2　考虑在 13.1 节给出的几何马蹄映射. 试描述稳定与不稳定流形位于 S'中的部分 $W^s(\mathbf{0},F)\cap S'$与 $W^u(\mathbf{0},F)\cap S'$. 注意，这不只是局部稳定和不稳定流形，而是整个流形.

13.1.3　考虑下列$\mathbb{R}^2$ 上的映射 G

$$G(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}x,3y\right) & y<\frac{1}{2}\\ \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x,3y-2\right) & y\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

注意，G 沿 $y=1/2$ 不连续.

(a)令 $S=[0,1]\times[0,1]$，定义

$$S_0^n=\bigcap_{j=0}^{n}G^j(S),\qquad S_0^{\infty}=\bigcap_{j=0}^{\infty}G^j(S),$$

$$S_{-n}^0=\bigcap_{j=-n}^{0}G^j(S),\qquad S_{-\infty}^0=\bigcap_{j=-\infty}^{0}G^j(S),$$

$$S_{-\infty}^{\infty}=\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}G^j(S).$$

试描述集合 S_0^1，S_0^2，S_0^n，S_0^∞，S_{-1}^0，S_{-2}^0，S_{-n}^0，$S_{-\infty}^0$ 和 $S_{-\infty}^\infty$

(b)此例与几何马蹄有何不同？

13.1.4 令 $S=[0,1]\times[0,1]$ 为单位正方形，定义 S 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 G 如下：

$$G(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{1}{5}x,5y\right) & 0\leqslant y<\frac{1}{3}\\ \left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}x,5y-2\right) & \frac{1}{3}\leqslant y<\frac{2}{3}\\ \left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}x,5y-4\right) & \frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

注意，G 沿 $y=1/3$ 和 $2/3$ 不连续.

(a)定义

$$S_0^n=\bigcap_{j=0}^{n}G^j(S),\qquad S_0^\infty=\bigcap_{j=0}^{\infty}G^j(S),$$

$$S_{-n}^0=\bigcap_{j=-n}^{0}G^j(S),\qquad S_{-\infty}^0=\bigcap_{j=-\infty}^{0}G^j(S),$$

$$S_{-\infty}^\infty=\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}G^j(S).$$

试描述集合 S_0^1，S_0^2，S_0^n，S_0^∞，S_{-1}^0，S_{-2}^0，S_{-n}^0，$S_{-\infty}^0$ 和 $S_{-\infty}^\infty$.

(b)此例与几何马蹄有何不同？

13.1.5 更充分地解释为什么几何马蹄有点 x^* 使得 $\mathcal{O}_F^+(x^*)$ 和 $\mathcal{O}_F^-(x^*)$ 在 Λ 中是稠密的. 583

13.1.6 考虑几何马蹄映射 F. 设 $L^s=W_{loc}^s(\mathbf{0})$ 和 $L^u=W_{loc}^u(\mathbf{0})$ 分别为在原点之不动点的局部稳定与不稳定流形. 试画出 L^u 在 F^3 的作用之下的像和 L^s 在 F^{-3} 的作用之下的像.

13.2 符号动力学

13.2.1 对下列映射查验正方形 $[-1,1]\times[-1,1]$ 的指标：

a. $F(x,y)=\left(-2x,\frac{1}{2}y\right)$.

b. $F(x,y)=(-2x,2y)$.

c. $F(x,y)=(-2x,-2y)$.

d. $F(x,y)=\left(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y\right)$.

e. $F(x,y)=\left(x+\frac{1}{2}x^2,\frac{1}{2}y\right)$.

f. $F(x,y)=\left(8y-5,\frac{1}{2}x\right)$.

13.2.2 考虑如下定义的映射

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(-3x+1,\frac{1}{3}y\right) & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\\ \left(x-\frac{2}{3},1-\frac{1}{3}y\right) & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

对中间所缺$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$，映射在左端附近弯曲，参见图 13.8.1.

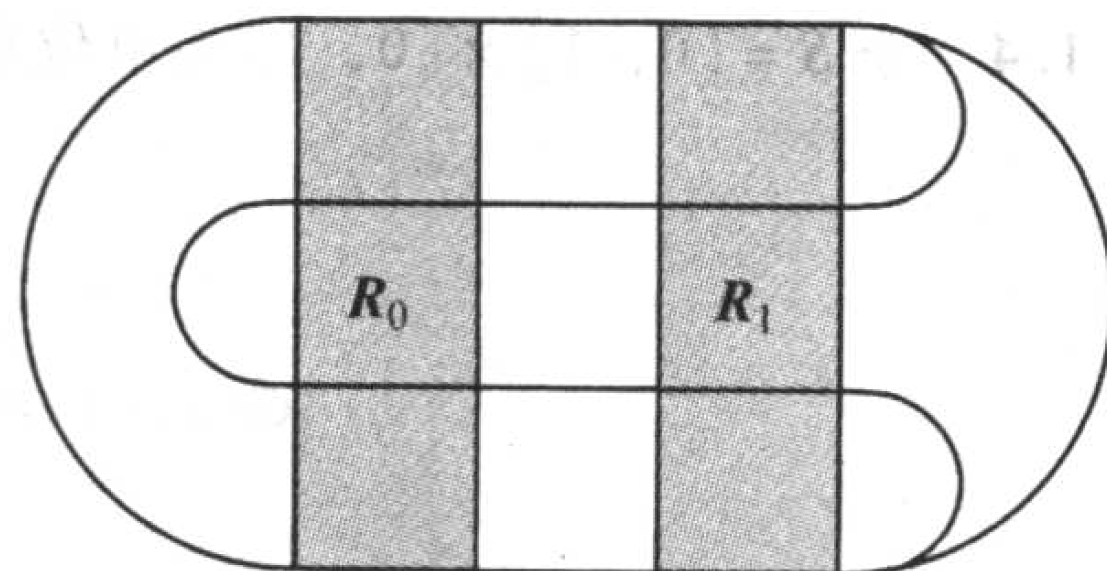


图 13.8.1　练习题 13.2.2

a. 令

$$R_0 = \left\{(x,y):0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3},0\leqslant y\leqslant 1\right\}$$

$$R_1 = \left\{(x,y):\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\right\}.$$

试解释为什么$\{R_0, R_1\}$满足 F 的马尔可夫分割的条件. $\partial^{in}(R_0)$，$\partial^{out}(R_0)$，$\partial^{in}(R_1)$和$\partial^{out}(R_1)$各是什么？转换图又是什么？

b. 有多少不动点？有多少 2-周期点？提示：利用转换图.

c. 为什么在不变集中有稠密轨道？

584

13.2.3　练习题 13.1.3 中的映射的转换图是什么？

13.2.4　考虑如下映射

$$F\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin(4\pi y)\\4y\end{bmatrix} & y<\frac{1}{2}\\ \begin{bmatrix}\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\sin(4\pi(y-0.75))\\4y-3\end{bmatrix} & \frac{1}{2}\leqslant y.\end{cases}$$

a. 定义矩形 $R_0=[0,\ 1]\times[0,\ 0.25]$和 $R_1=[0,\ 1]\times[0.75,\ 1]$. 证明$\{R_0, R_1\}$是一马尔可夫分割（即证明 R_0 和 R_1 在 F 下的像对于 R_0 和 R_1 是正规的）. 特别地，对 $j=1, 2$，$\partial^{in}(R_j)$与$\partial^{out}(R_j)$各是什么？它们的像又是什么？

b. 从 R_0 到其自身的映射的指标是什么？从 R_1 到其自身的映射的指标是什么？利用若干点在映射

$$G(x)=\frac{x-F(x)}{\|x-F(x)\|}$$

的像来解释所得答案.

13.2.5　考虑由极坐标给出的映射

$$F\begin{bmatrix}\theta\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\theta-\pi/8\\1+r/16+(2\theta)/\pi\end{bmatrix},$$

其中$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，$1\leqslant r\leqslant 2$.（注意，定义只在部分平面上给出.）令

$$R_0=\{(\theta,r):0\leqslant\theta\leqslant 3\pi/32,1\leqslant r\leqslant 2\}$$

$$R_1=\{(\theta,r):\pi/4\leqslant\theta\leqslant 11\pi/32,1\leqslant r\leqslant 2\}.$$

证明$\{R_0, R_1\}$满足 G 的马尔可夫分割的条件.

13.2.6　设 $S=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$为包含高为 1/10 的 4 条水平带 H_0，H_1，H_2 与 H_3 和宽为 1/12 的 4 条竖直带 V_0，V_1，V_2 与 V_3 的单位正方形，参见图 13.8.2. 考虑$\mathbb{R}^2$ 上把 H_j 映满 V_j 的一映射 F，且在竖直方向拉长 10 倍，在水平方向收缩 1/12，并经过合适的平移. 带 H_1 与 H_3 又被折叠. 注意到

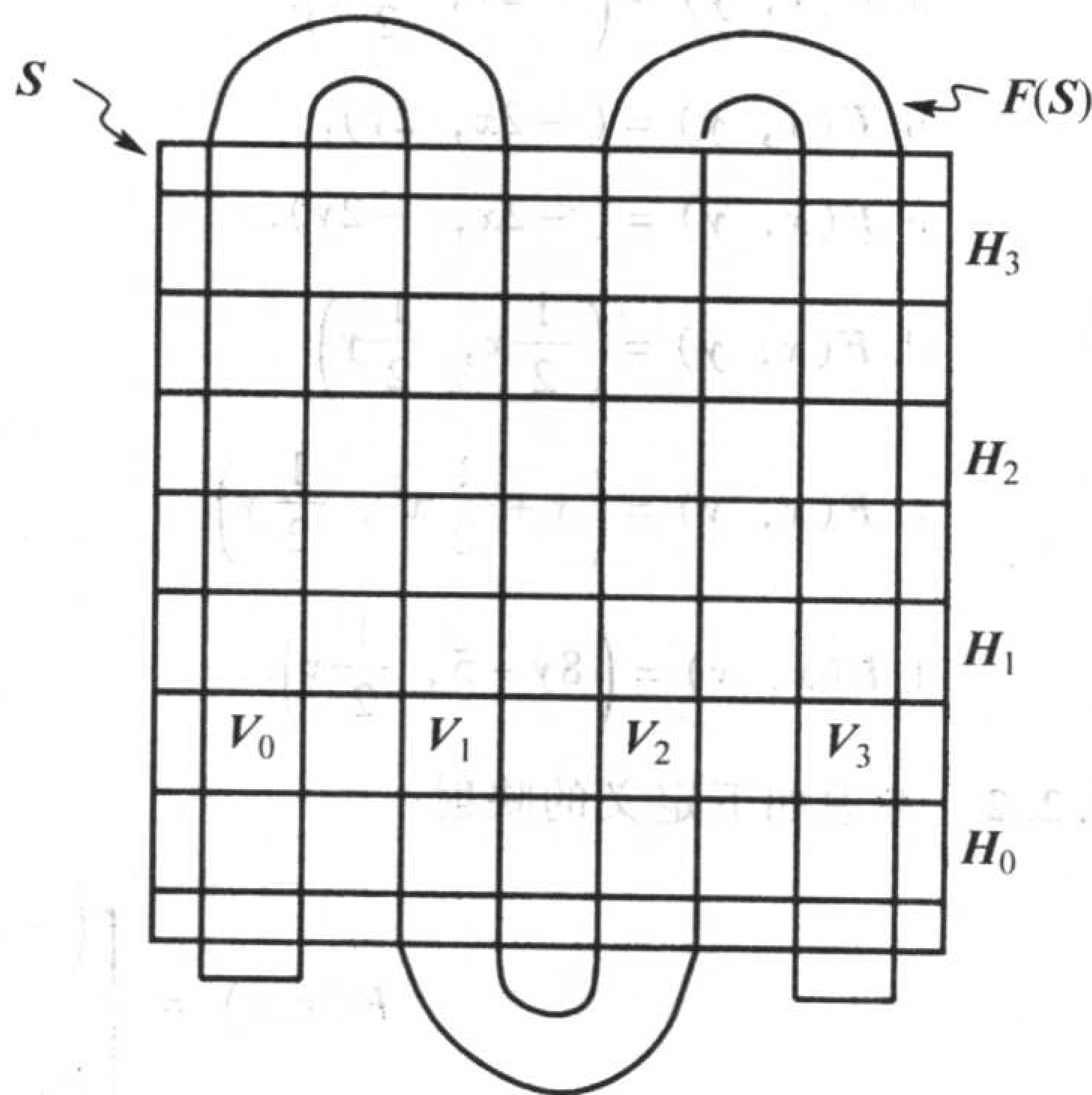


图 13.8.2　练习题 13.2.6

$$S \cap F(S) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \text{和}$$

$$S \cap F^{-1}(S) = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3.$$

a. 交集 $S \cap F(S) \cap F^2(S)$ 含有多少个竖直带？它们的宽是多少？

b. 交集 $S \cap F^{-1}(S) \cap F^{-2}(S)$ 含有多少个水平带？它们的高是多少？

c. 注意到

$$V_j = \{x : F^{-1}(x) \in H_j\} \equiv S_{j.}.$$

令

$$S_{s_{-2}s_{-1}.} = \{x : F^{-1}(x) \in H_{s_{-1}} \quad \text{及} \quad F^{-2}(x) \in H_{s_{-2}}\}.$$

585

试叙述竖直带 $S_{00.}$, $S_{10.}$, …, $S_{33.}$ 的序.

d. 映射 F 有多少个不动点？

13.2.7 设 f: $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

诱导的微分同胚. 构造一个有 3 个矩形的马尔可夫分割，利用如文中所用的线段 $[a, b]_s$ 及不稳定线段 $[g, c]_u$，其中延拓原点的不稳定流形通过原点并止于点 $g \in [a, 0]_s$ 来决定 g，如此一来，0 介于不稳定段 $[g, c]_u$ 中. 试求这一分割的转移矩阵 B，求此转移矩阵的特征值. 这些特征值与 A 的特征值有何关系？

13.2.8 （马蹄作为一双曲环面自同构的子系统.）设 f_{A_2}: $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为矩阵

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

诱导的微分同胚，有关讨论见例 13.2.24. 设 R_{1a} 为用于该微分同胚的马尔可夫分割的矩形. 设 $g = f_{A_2}^2$ 且

$$\Lambda = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} g^j(R_{1a}).$$

证明 g: $\Lambda \to \Lambda$ 拓扑共轭于两边全 2-位移 σ: $\Sigma_2 \to \Sigma_2$. 提示：R_{1a} 的作用如同构造几何马蹄中 S 的作用一样. 证明 $g(R_{1a}) \cap R_{1a}$ 是两个不交矩形. （这些矩形类似于几何马蹄中的 V_1 与 V_2.）考察 f_{A_2} 的马尔可夫分割的转移矩阵会有帮助.

586

13.3 同宿点和马蹄

13.3.1 假设 $\mathbb{R}^2$ 上的映射 F 有两个鞍不动点 p_1 和 p_2 及异宿点

$$q_1 \in W^u(p_1) \cap W^s(p_2) \text{ 和 } q_2 \in W^u(p_2) \cap W^s(p_1).$$

讨论集合

$$A = \{p_1, p_2\} \cup \mathcal{O}(q_1) \cup \mathcal{O}(q_2)$$

含于与某有限子位移 $\Sigma_{\mathcal{G}}$ 共轭的一不变集 Λ 的原因. 这一有限子位移的转换图 $\mathcal{G}$ 应当是什么？

13.3.2 考虑在 13.1 节讨论的几何马蹄，它有不动点 0 和 $p = (3/4, 4/5)$. 可以确定这两点的稳定与不稳定流形穿过正方形多于一次，由此证明不动点 0 有横截同宿点 $(1/3, 3/4)$，而 $p = (3/4, 4/5)$ 有横截同宿点 $(1/4, 4/5)$.

13.4 吸引子

13.4.1 考虑 Hénon 映射，取 $a = 1.4$，$b = -0.3$. 设 R 表示以 $(1.857, 0.63)$，$(-1.875, 1.99)$，$(-1.49, -2.2)$ 和 $(1.752, -0.60)$ 为顶点的四边形. 证明 R 是收缩域.

13.4.2 Lozi 映射是一与 Hénon 映射有关的分段仿射映射. 设

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + y - A\,|x| \\ Bx \end{bmatrix},$$

其中 A 与 B 为参数. 取 $B = 1/2$，$A = 3/2$.

a. 证明 F 有两个不动点，其中一个不动点 p_1 在第一象限.

b. 证明 p_1 的不稳定流形 $W^u(p_1; F)$ 包含一直线段 L，该直线段交 x 轴于一点 q，交 y 轴于点 $F^{-1}(q)$.

c. 画出直线段 L，$F(L)$ 和 $F^2(L)$.

d. 设 U 表示以 q，$F(q)$ 和 $F^2(q)$ 为顶角的三角形域，证明 U 是一个收缩域.

13.4.3 考虑本章讨论过的螺旋管映射. 证明如下三个集合

$$R_0 = \{(t,z) \in N: 0 \leqslant t \leqslant 1/3\},$$

$$R_1 = \left\{(t,z) \in N: \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 2/3\right\},$$

$$R_2 = \{(t,z) \in N: 2/3 \leqslant t \leqslant 1\}$$

构成一个马尔可夫分割. 其转换图是什么?

13.4.4 考虑映射

$$F\begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t(\bmod 1) \\ \beta z + 0.5e^{2\pi t i} \end{bmatrix},$$

这是螺旋管的一个变种.

a. 证明当 $0 < b < 1/(2\sqrt{2})$ 时该映射在曾用于螺旋管的收缩邻域 N 上是一对一的.

587 b. 求此映射的一个马尔可夫分割及此分割的转移图. 提示：欲使交集连通有必要取两个以上的 M 矩形.

13.5 高维映射的李雅普诺夫指数

13.5.1 定义环面自同构

$$F_A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y(\bmod 1) \\ x + y(\bmod 1) \end{bmatrix}.$$

求其李雅普诺夫指数. 提示：在所有点处的扩张和收缩方向是相同的.

13.5.2 对下列两个矩阵，计算单位圆之像的轴方向和轴长.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

13.5.3 定义映射 F 如下：

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin(2\pi y) \\ 2y \end{bmatrix} & y < \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\sin(2\pi y) \\ 2y - 1 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

a. 取点 $p_0 = (x_0, y_0)$，$0 \leqslant x_0 \leqslant 1$，$0 \leqslant y_0 \leqslant 1$，向量 $v = (1, 0)$，求李雅普诺夫指数 $\ell(p_0, v; F)$.

b. 其他李雅普诺夫指数是什么?

13.5.4 考虑螺旋管映射的如下的变种：

$$F\begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t(\bmod 1) \\ \beta z + \frac{1}{2}e^{2\pi t i} \end{bmatrix},$$

其中 $0 < \beta < 1/(2\sqrt{2})$，$z$ 是复数，求此映射的三个李雅普诺夫指数.

588 **13.5.5** 利用计算机程序计算当 $a = 1.4$，$b = -0.3$ 时 Hénon 映射的李雅普诺夫指数.

第14章　分　　形

B. Mandelbrot 在 20 世纪 60 年代对一个有复杂的几何性质但局部看起来仍一样的几何对象提出了“分形”的概念. 一个集合称为是自相似的，如果它的任意小的部分都能够放大而再生成整个集合. 我们已经遇到过的康托尔集就是自相似集的一个例子.

一个“分形”并不必须是自相似的，但是在任意小的范围内都必须能够再生其重要的非正则性质. Hénon 吸引子足够接近于自相似，从而满足成为一个分形的条件；吸引子的小块差不多就是一个康托尔集和直线段的笛卡儿积.

非正则的其他性质是由某种“分形维数”而确定的. 盒维数就是这样一个维数，它可以有非整数值和整数值. 这种维数可以度量出一个吸引子是“奇异”的（既不是曲线又不是曲面的集合）. 我们也给出另外两个分形维数，李雅普诺夫维数和关联维数，它们是根据映射的动力学性质定义的，而不是根据不变集的复杂性定义. 这些维数度量了一个映射表现为非正则或混沌方式的程度.

结合这些概念，一个分形就是这样一个集合，它满足(i)几乎自相似性(ii)具有一个非整数的分形维数，比如盒维数.

马蹄的所有不稳定流形的并集形成的集合是一个分形，因此 13.1.1 节中讨论的边界区域也是一个分形. 混沌吸引子，如 Hénon 吸引子，就是从映射的动力系统中产生的分形集合的例子.

本章考虑用其他的方法来构造这样的一个集合，即叠函数系. 这些集合比非线性映射的混沌吸引子更容易产生，而且在二维上可以有某种有趣的表现和几何性质.

14.1　盒维数

因为混沌吸引子中的点的集合通常是一个复杂的集合，所以它有时被称为“奇异吸引子”. 本节引入吸引子的一个测度，它是一种维数，称为盒维数. 因为这个量并不总是整数，因此有时称为分形维数. 这些思想至少可以追溯到 19 世纪早期，豪斯多夫引入了一种不同的分形维数，称为豪斯多夫维数，它在数学上有一定的优势，但不容易定义和计算. 盒维数是由 A. N. Kolmogrov 引入的，他最初称之为集合的容量，但这个概念有其他的意义，因此被盒维数取代. 适用于初学者且对不同维数的更完善的处理可在书 J. Edgar[**35**]中找到.

我们所指的盒维数仅仅是针对$\mathbb{R}^n$ 的子集. 一个集合的闭包的盒维数与该集合的盒维数是相同的，因此考虑闭集就足够了.

定义 14.1.1　考虑一个固定的边长为 $r>0$ 的盒网格：

$$\bar{\boldsymbol{B}}_{(j_1,\cdots,j_n)} = \{(x_1,\cdots,x_n): j_i r \leqslant x_i < (j_i+1)r, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

其中 j_1，…，j_n 为整数. 对于$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\boldsymbol{S}$，令 $N(r,\ \boldsymbol{S})$ 为与 $\boldsymbol{S}$ 相交的盒的数目. 在图 14.1.1 中，$N(r,\ \boldsymbol{S})=65$.

如果 S 是长为 L 的线段，长度约等于盒的边长 r 和与 S 相交的盒的数目 $N(r, S)$ 的乘积；即

$$L \sim rN(r,S)\text{，故}$$
$$N(r,S) \sim \frac{L}{r}.$$

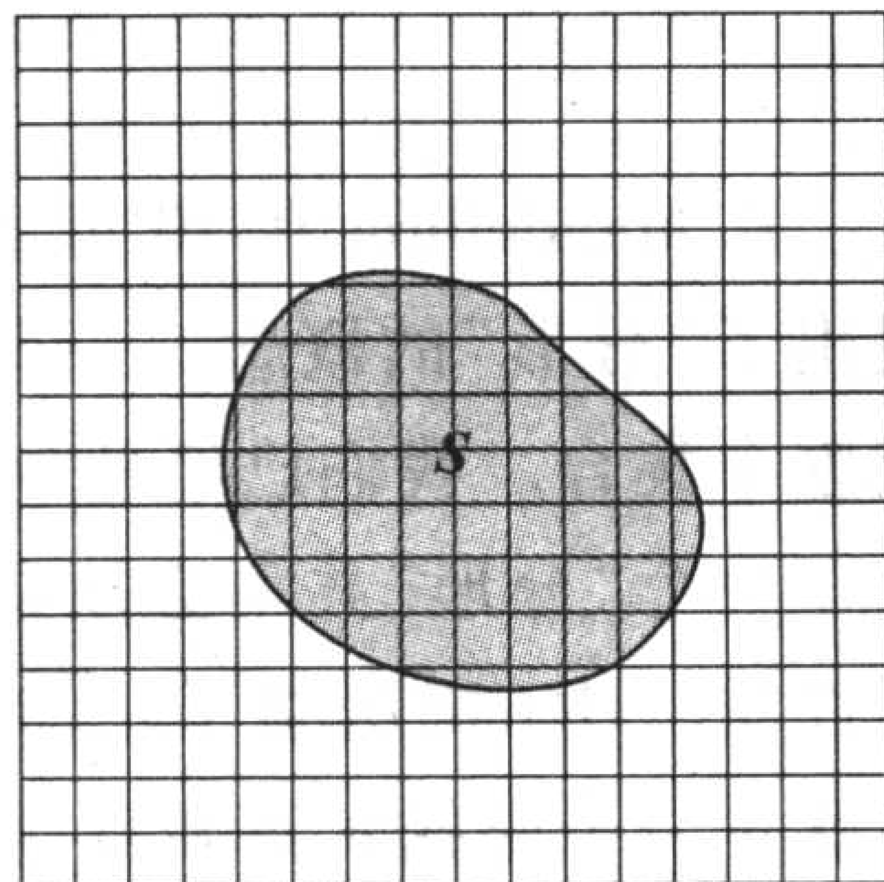


图 14.1.1　盒维数的网格线

如果 S 为平面上的一个面积为 A 的圆盘，那么面积约等于 $r^2N(r, S)$，即

$$A \sim r^2N(r,S)\text{，故 } N(r,S) \sim \frac{A}{r^2}.$$

如果 S 是一个 d 维的体积为 V 的对象，则体积约等于 $r^dN(r, S)$，即

590

$$V \sim r^dN(r,S)\text{，故 } N(r,S) \sim \frac{V}{r^d}.$$

为了解出指数 d，我们取对数然后再求极限：

$$V \sim r^dN(r,S)$$
$$\ln(V) \sim d\ln(r) + \ln(N(r,S))$$
$$d \sim \frac{\ln(V)}{\ln(r)} - \frac{\ln(N(r,S))}{\ln(r)}$$
$$\sim \frac{\ln(V)}{\ln(r)} + \frac{\ln(N(r,S))}{\ln(1/r)}.$$

在 $r\to 0$ 的极限中，最后一行右边的第一项趋于零，因为 $\ln(r)$ 趋于负无穷，所以可用第二项的极限来定义维数.

定义 14.1.2　令 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的集合，$N(r, S)$ 为与 S 相交的边长为 r 的盒的数目. S 的盒维数定义为下面的极限：

$$\dim_b(S) = \lim_{r\to 0}\frac{\ln(N(r,S))}{\ln(1/r)}.$$

下面两个例子给出了盒维数为非整数值的集合.

例 14.1.3　考虑集合

$$S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k}: k \geqslant 1\right\},$$

我们选取

$$r_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

把[0, 1]分为相等的长为 r_k 的固定区间. 对 $i\geqslant k$，点对 $1/(i+1)$ 和 $1/i$ 之间的距离和小于 r_k，所以每个满足 $jr_k\leqslant 1/k$ 的区间 $[(j-1)r_k, jr_k]$ 都与 S 相交. 一共有

$$\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k(k+1)}} = k+1$$

个这样的区间. 于是 $k-1$ 个点 1, …, $1/(k-1)$ 被分离在不同的长为 r_k 的区间内. 因此,

$$N(r_k, S) = (k+1) + (k-1) = 2k.$$

参见图 14.1.2.

591

我们不需要使用所有的 r 值, 但是数字 r_k 的选取应满足定理 14.1.7, 因此我们可以用它们来计算维数:

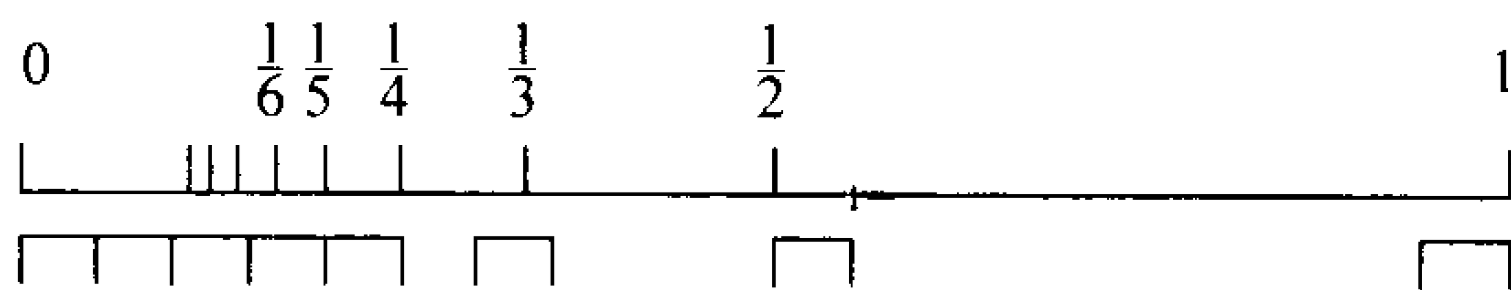


图 14.1.2　例子 14.1.3 中 $k=4$ 时的 8 个区间

$$\begin{aligned}\dim_b(S) &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(N(r_k, S))}{\ln(r_k^{-1})}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(2k)}{\ln(k(k+1))}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(2)+\ln(k)}{2\ln(k)+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

这样, 尽管这些集合仅仅是可数个点, 盒维数仍然是正的且不是整数. ■

例 14.1.4　在 10.5 节中, 我们介绍了三分康托尔集, 现在我们考虑一个更一般的康托尔集. 令 $0<b<0.5$ 和 $0<a<1$ 使得 $a+2b=1$. 设 $\boldsymbol{K}_0(a)=[0, 1]$ 为单位区间, 假设第一步, 去掉 $\boldsymbol{K}_0(a)$ 中间的一个长为 a 的开区间, 剩下的两个闭区间长度都为 b, 记 $\boldsymbol{K}_1(a)$ 为剩下的两个区间的并; 现在从 $\boldsymbol{K}_1(a)$ 的每个区间中, 去掉中间的 a 比例部分, 剩下的四个区间每个长度为 b^2, 记这 2^2 个长度为 b^2 的闭区间的并为 $\boldsymbol{K}_2(a)$; 继续下去, 在每一步都去掉每个闭区间中间的 a 比例部分. 这样, 在第 j 步, $\boldsymbol{K}_j(a)$ 为 2^j 个长度为 b^j 的闭区间的并. 集合

$$\boldsymbol{K}(a) = \bigcap_{j\geq 0}\boldsymbol{K}_j(a)$$

称为 a-中间康托尔集.

如果我们取 $r_j=b^j$, 且不用固定的网格来确定盒, 那么我们可以用 2^j 个盒来覆盖 $\boldsymbol{K}(a)$, 因此 $N(b^j, \boldsymbol{K}(a))=2^j$. 由于这些 r_j 选取为一个固定数的幂, 故它们可被用来计算维数:

$$\begin{aligned}\dim_b(\boldsymbol{K}(a)) &= \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(2^j)}{\ln(b^{-j})} = \lim_{j\to\infty}\frac{j\ln(2)}{j\ln(1/b)}\\ &= \frac{\ln(2)}{\ln(1/b)} < 1.\end{aligned}$$

注意, 对于三分康托尔集, 维数是 $\ln 2/\ln 3\approx 0.6309$. 所有这些 a-中间康托尔集的盒维数是正的, 尽管这些集合是完全不连通的. ■

在最后一个例子中我们已经用了两个简化. 第一, 我们没有用固定网格, 而更有效地用盒(区间)来覆盖集合. 第二, 不使用所有的 r 值, 而仅仅用一列值. 对于高维中的第三种简化, 用不同形状的"盒"是有可能的(例如, 在二或三维中用圆或球). 在给出一些定义后, 我们用两个定理来总结这些简化.

定义 14.1.5　有时，我们不想固定盒的网格. 令

592

$$N'(r,S)$$

为在不固定网格的情况下覆盖集合 S 所需要的边长为 r 的盒(正方形或正方体)的最小数目.

有时，我们想用圆球 $\bar{B}(x,\ r)$ 而不是盒来覆盖集合. 令

$$N''(r,S)$$

为覆盖 S 所需要的半径长为 r 的球的数目.

定理 14.1.6　设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的集合，并使极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{\ln(N'(r,S))}{\ln(1/r)} \text{ 或}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{\ln(N''(r,S))}{\ln(1/r)}$$

存在且等于 d. 则盒维数 $\dim_b(S)$ 存在且等于 d.

证明在 14.4 节给出.

定理 14.1.7　令 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的集合. 假设存在一系列长度 r_j，满足

$$0 = \lim_{j\to\infty} r_j,$$

$$1 = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(r_{j+1})}{\ln(r_j)},$$

$$d = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(N(r_j,S))}{\ln(1/r_j)}$$

(即极限存在). 则 $\dim_b(S)$ 存在且等于 d.

证明在 14.4 节给出.

注 14.1.8　如果取 $r_j = b^j$，$b<1$，那么这些值满足定理 14.1.7：

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln(r_{j+1})}{\ln(r_j)} = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(b^{j+1})}{\ln(b^j)} = \lim_{j\to\infty}\frac{(j+1)\ln(b)}{j\ln(b)}$$

$$= \lim_{j\to\infty}\frac{j+1}{j} = 1.$$

同例 14.1.3 一样，读者可以检验数列 $r_j = \dfrac{1}{j(j+1)}$ 也满足这个定理.

例 14.1.9　该例子中的集合是在 $\mathbb{R}^2$ 上，但类似于直线上的康托尔集. 它也像螺旋管与一个圆盘的交集，但我们用四个圆盘而不是仅仅两个. 参见图 14.1.3. 令 $\boldsymbol{K}_0$ 为平面上半径为 1 的圆盘，$\boldsymbol{K}_1$ 为四个半径为 a 的圆盘，中心分别在 $(\pm 0.5,\ 0)$ 和 $(0,\ \pm 0.5)$. 直接验证可知，如果 $a<\sqrt{2}/4$，这些新圆盘是不相交的. 下一步，令 $\boldsymbol{K}_2$ 为 4^2 个半径为 a^2 的圆盘，各有 4 个圆盘在 $\boldsymbol{K}_1$ 的每个圆盘里. 在 $\boldsymbol{K}_1$ 的每个圆盘中放置一个缩小的 $\boldsymbol{K}_1$ 来实现这些是有可能的，参见图 14.1.3. 由归纳法继续下去，我们知道 $\boldsymbol{K}_j$ 为 4^j 个半径为 a^j 的圆盘. 令

593

$\boldsymbol{K} = \bigcap_{j\geq 0}\boldsymbol{K}_j$，那么

$$\dim_b(\boldsymbol{K}) = \lim_{j\to\infty} \frac{\ln(N''(a^j,\boldsymbol{K}))}{\ln(a^{-j})}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{j\ln(4)}{j\ln(1/a)} = \frac{\ln(4)}{\ln(1/a)}.$$

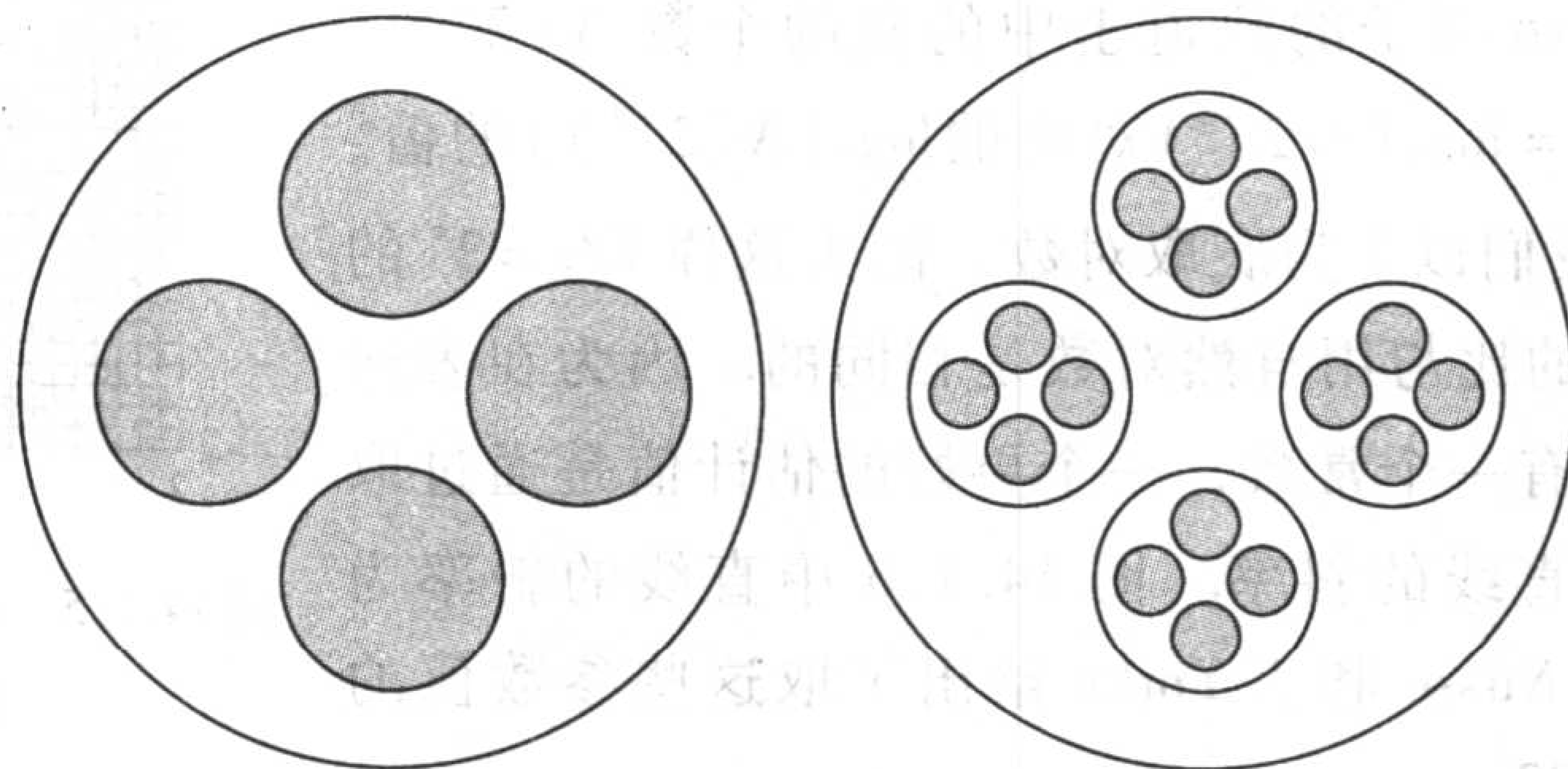
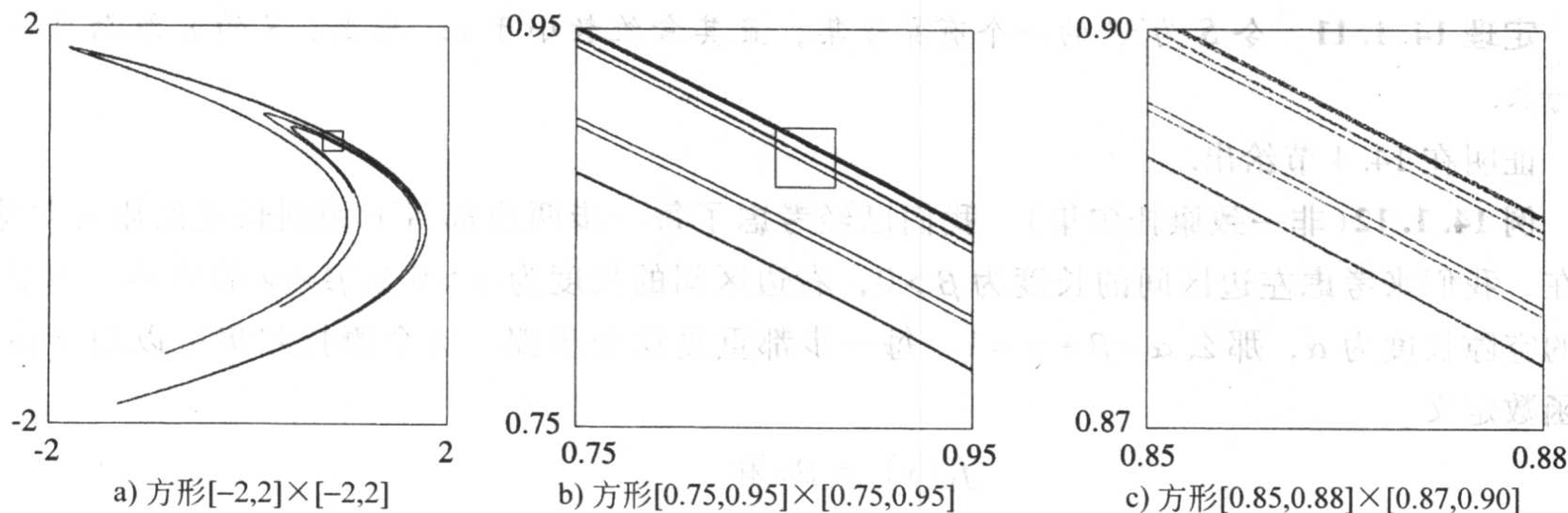


图 14.1.3　例子 14.1.9 中的集合 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$

如果取$\frac{1}{4} < a < \frac{\sqrt{2}}{4}$，则 $\ln(1/a) < \ln 4$ 从而$\dim_b(\boldsymbol{K}) > 1$. 因此，集合的盒维数可以大于 1，尽管它是完全不连通的且集合不包含曲线. ■

对于$\mathbb{R}^n$ 上一个特定的混沌吸引子，是有可能在$\mathbb{R}^n$ 上形成一个网格的，然后计算有多个盒被稠密于吸引子的轨道所穿过. 这个盒数给出了吸引子的盒维数的一个估计值. 对于如图 7.5.3 中受迫 Duffing 方程的集合，盒维数应稍微大于 1. 这是一个存储量非常大的计算，因为对$\mathbb{R}^n$ 中的集合要形成一个阶为 r^{-2}的元素的阵列：如 $r = 0.01$，则阵列就有 1000 个元素；对于更小的 r，元素则更多. 我们下面更详细地讨论 Hénon 吸引子的盒维数.

例 14.1.10(Hénon 吸引子)　考虑取值为 $a = 1.4$，$b = -0.3$ 时的 Hénon 吸引子. 与我们在本节的引言里讨论的一样，这个吸引子几乎是自相似的. 图 14.1.4 给出了不同尺寸的吸引子；在小尺寸下吸引子看起来像一个康托尔集和一个线区间的乘积.



a) 方形[-2,2]×[-2,2]　　b) 方形[0.75,0.95]×[0.75,0.95]　　c) 方形[0.85,0.88]×[0.87,0.90]

图 14.1.4　$a = 1.4$，$b = -0.3$ 时的 Hénon 吸引子

盒维数的数值计算是根据对应于 $r=2^{-3}$，2^{-4}，…，2^{-7}的吸引子击中的盒的数目来进行的. 图 14.1.5 给出了吸引子和边长为 $r=2^{-3}=1/8$ 的网格. 此吸引子击中了 160 个盒，即$N\left(\frac{1}{8}\right)=160$. 表 14.1.1 给出了通过1 000 000 次迭代的吸引子的轨道击中的盒的个数 $N(2^{-k})$. 图 14.1.6 给出了与 $k=\log_2(1/2^{-k})$对应的$\log_2(N(2^{-k}))$的值，其中 $k=3$，…，7. 我们以 2 为底取对数，因为这样 $1/r=2^k$ 的对数为整数，且对数的比与用自然对数是相同的. 因为在表达式$N(r)\sim Cr^{-d}$中可能有一个常数，一个更好的估计值是通过取最适合这些数据点的直线的斜率. 图 14.1.6 中直线的斜率为 1.24. 在[**80**]中，H. Nusse 和 J. Yorke 给出了取这些参数值的盒维数为 1.245 ±0.093.

594 ~ 595

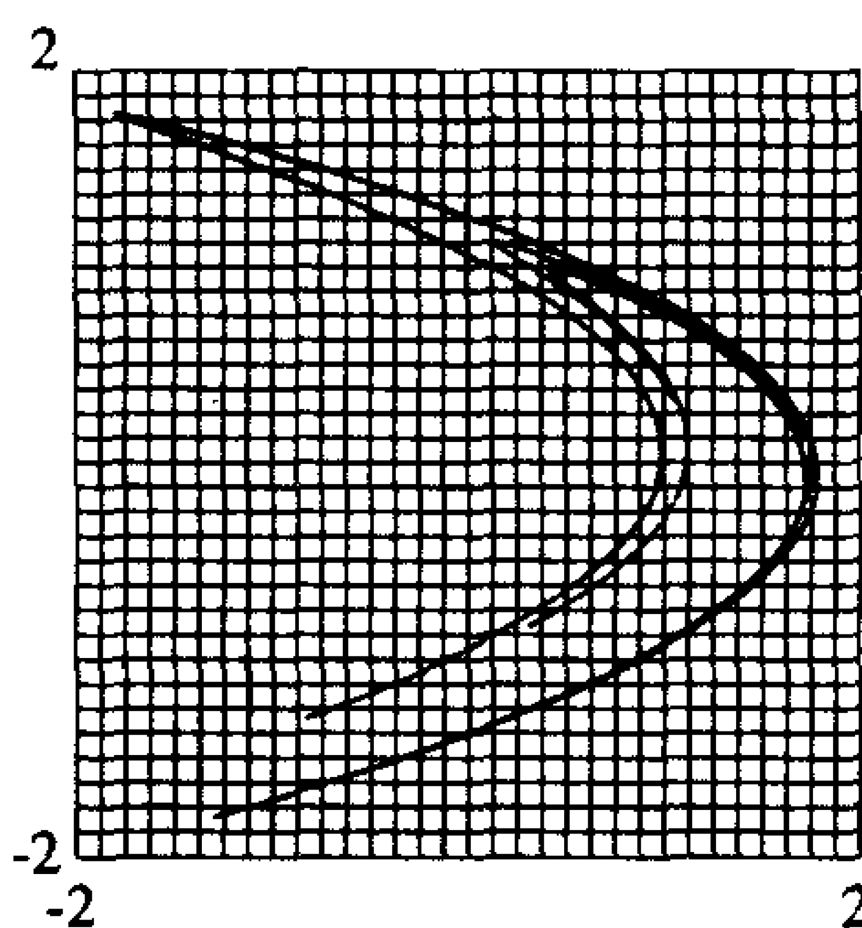


图 14.1.5　$a=1.4$，$b=-0.3$ 时的 Hénon 吸引子及边长为 $r=1/8$ 的网格

表 14.1.1　对 Hénon 映射的 $N(2^{-k})$的值

k	$N(2^{-k})$
3	160
4	388
5	908
6	2152
7	4947

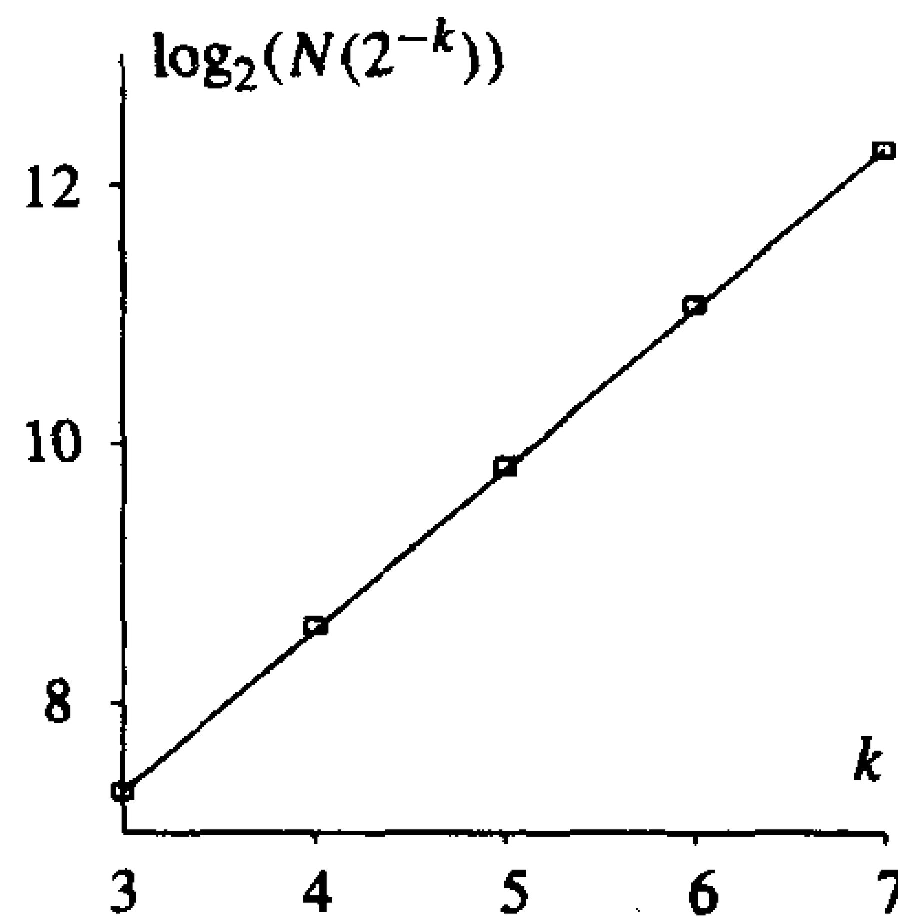


图 14.1.6　当 $k=2$，…，7 时作为 $k=\log_2(1/2^{-k})$的函数$\log_2(N(2^{-k}))$的布局 ■

在讨论两个不同类型的康托尔集之前，我们给出与盒维数和勒贝格测度都有关的一个定理.

定理 14.1.11　*令 S 为$\mathbb{R}^n$ 的一个有界子集，且其盒维数小于 n. 那么，S 的 n 维勒贝格测度为零.*

证明在 14.4 节给出.

例 14.1.12(非一致康托尔集)　我们已经考虑了每一步两边都留下相同长度的康托尔集. 现在，我们来考虑左边区间的长度为$\beta>0$，右边区间的长度为 $\gamma>0$ 且 $\beta\neq\gamma$ 的情形. 如果去掉的空隙长度为 α，那么 $\alpha+\beta+\gamma=1$. 每一步都重复这个步骤. 这个康托尔集可以用下面两个函数定义

$$f_1(x)=\beta x \text{ 和}$$
$$f_2(x)=\gamma x+1-\gamma.$$

令 $\boldsymbol{K}_0=[0,1]$，且归纳定义 $\boldsymbol{K}_j$ 为

$$\boldsymbol{K}_j=f_1(\boldsymbol{K}_{j-1})\cup f_2(\boldsymbol{K}_{j-1}).$$

令

$$K=\bigcap_{j=0}^{\infty}K_j$$

为所得非一致康托尔集，那么

$$f_1(K_0)=[0,\beta],$$
$$f_2(K_0)=[1-\gamma,1]\text{ 和}$$
$$K_1=f_1(K_0)\cup f_2(K_0)=[0,\beta]\cup[1-\gamma,1].$$

596

下一步，

$$f_1(K_1)=[0,\beta^2]\cup[\beta(1-\gamma),\beta]\subset f_1(K_0)\subset K_1,$$
$$f_2(K_1)=[1-\gamma,1-\gamma+\beta\gamma]\cup[1-\gamma^2,1]\subset f_2(K_0)\subset K_1,$$
$$K_2=f_1(K_1)\cup f_2(K_1)\subset K_1\subset K_0.$$

K_2 中区间的长度分别为 β^2，$\beta\gamma$，$\beta\gamma$ 和 γ^2. 由归纳法，集合 K_j 中含有 2^j 个区间，它们的长度在下列数值中取值：

$$\beta^j,\beta^{j-1}\gamma,\cdots,\beta\gamma^{j-1},\gamma^j.$$

对于小的 $r>9$，确定需要多少个长为 r 的区间来覆盖这个康托尔集是不容易的.

我们对盒维数给出一个直观的讨论，它实际上给出了正确答案. 我们要指出的是这一步的推导是不严格的.

令 $N(r)$ 为覆盖 K 所需要的长为 r 的区间的个数，令 $I_\beta=[0,\ \beta]$ 和 $I_\gamma=[1-\gamma,\ 1]$，所以 $K_1=I_\beta\cup I_\gamma$ 是去掉一个区间后的集合. 令 $N(r,\ I_\beta)$ 为覆盖 $I_\beta\cap K$ 所需要的长度为 r 的区间的个数，$N(r,\ I_\gamma)$ 为覆盖 $I_\gamma\cap K$ 所需要的长度为 r 的区间的个数，这两个部分的数字之和必须等于覆盖整个集合 K 所需要的长为 r 的区间的个数；即

$$N(r)=N(r,I_\beta)+N(r,I_\gamma).$$

子集 $K\cap I_\beta$ 的 $1/\beta$ 倍等于 K，即 $K=\frac{1}{\beta}(K\cap I_\beta)$，所以

$$N(r,I_\beta)=N(r/\beta);$$

子集 $K\cap I_\gamma$ 的 $1/\gamma$ 倍移位等于 K，所以

$$N(r,I_\gamma)=N(r/\gamma).$$

结合起来，有

$$\begin{aligned}N(r)&=N(r,I_\beta)+N(r,I_\gamma)\\&=N(r/\beta)+N(r/\gamma).\end{aligned}$$

到目前为止，这都是严格的.

可是，现在假设对某个 C，

$$N(r)=Cr^{-d}$$

给出了所需要的长为 r 的区间的确切个数，而不仅仅是一个渐近的极限. 如果这个等式成立的话，将其代入上面的等式，则有

$$N(r)=N(r/\beta)+N(r/\gamma),$$

$$Cr^{-d} = C\left(\frac{r}{\beta}\right)^{-d} + C\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{-d},$$

$$1 = \beta^d + \gamma^d.$$

为了说明只有唯一的 d 值($0<d<1$)满足最后一个等式，令 $h(d)=\beta^d+\gamma^d$. 则 $h(0)=2$，$h(1)=\beta+\gamma<1$，且

$$h'(d) = \ln(\beta)\beta^{d-1} + \ln(\gamma)\gamma^{d-1} < 0.$$

所以，存在唯一的 d 值($0<d<1$)使得 $h(d)=1$. 参见图 14.1.7.

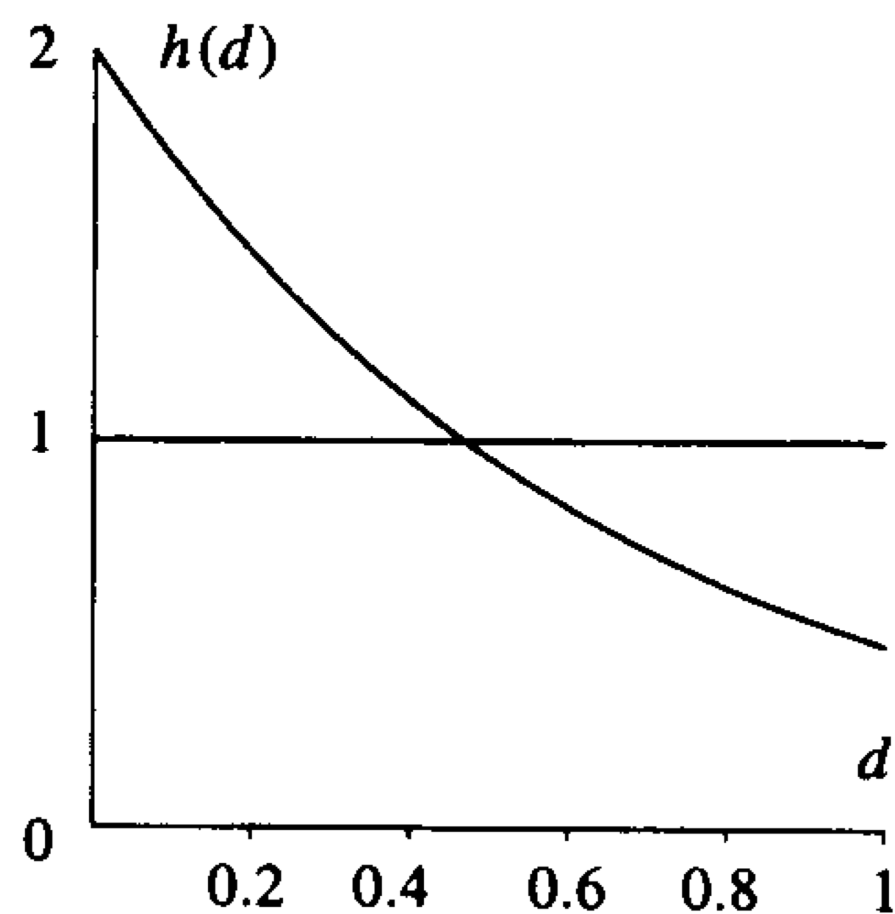


图 14.1.7　$h(d)$的图

满足 $h(d)=1$ 的 d 值称为尺度维数或相似维数. 我们已经给出了一个直观讨论，它解释了为什么这类维数和盒维数是一样的. 摩兰得到的一个定理证明了这一事实. 见[**35**]的论述和证明.

597

同前面一样，注意到当 $\gamma=\beta$，$d=\ln(2)/\ln(\beta^{-1})$时有

$$1 = 2\beta^d$$

$$0 = \ln(2) - d\ln(1/\beta)$$

$$d = \ln(2)/\ln(1/\beta).$$

■

我们还可以讨论如下形成的康托尔集：第一步剩下 n 个区间，长度分别为 β_1，⋯，β_n；然后后面的每一步都重复第一步的过程. 对于这样一个构造，尺度维数是满足下面等式的 d 值：

$$1 = \beta_1^d + \cdots + \beta_n^d.$$

再者，由摩兰定理，满足这个方程的 d 值也给出了盒维数.

例 14.1.13(有正测度的康托尔集)　到目前为止，我们已经讨论过的所有直线上的康托尔集的盒维数都小于1；由定理 14.1.11，它们在直线上的勒贝格测度为零. 如果在每一步去掉的区间适当小，则形成的康托尔集可以有正勒贝格测度，且盒维数等于1.

令 $\boldsymbol{K}_0=[0,1]$为单位区间. 第一步，去掉该区间的中间1/4部分，得到

$$\boldsymbol{K}_1 = [0,3/8] \cup [5/8,1].$$

为了形成 $\boldsymbol{K}_2$，去掉两个长为 $1/4^2$ 的区间，去掉的总长度为 $2/4^2=1/(2\cdot4)$. 在第 k 步，去掉

598

2^{k-1}个长度均为 $1/4^k$ 的区间，则去掉的总长度为 $2^{k-1}/4^k=\frac{1}{4}(1/2)^{k-1}$. 所以，去掉的总长度为

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

剩下的部分 $\boldsymbol{K}=\bigcap_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{K}_k$的勒贝格测度为 $1-1/2=1/2$. 这样，所得康托尔集有正测度，所以其盒

维数必定等于 1.

这个康托尔集与一个 α-中间康托尔集的区别是从每个区间去掉的没有一个固定的比例. 实际上，去掉的比例趋于零. ■

14.2　轨道的维数

盒维数方法在计算上碰到了一定的困难，首要问题是盒维数对计算机计算有很大的存储要求. 基于这个原因，P. Grassberger 和 I. Procaccia 提出了相关维数的概念. 相关维数与盒维数的另一个区别是，盒维数是应用于如吸引子之类的集合的测量，而相关维数是直接应用于轨道动力性态.

J. Kaplan 和 J. Yorke 引入了另一个也是应用于轨道的维数概念，它是由李雅普诺夫指数计算的，故称为李雅普诺夫维数. 它要比盒维数容易计算，主要缺点是缺少一个为什么称之为维数的直观解释. 我们将证明它为什么对有一致扩张和收缩的吸引子能给出相同的结果.

14.2.1　相关维数

相关维数测量一个轨道回头接近于轨道上的另一个点的频率. 如果这些点包含在一条曲线或基本上填满一条曲线，那么距离在 r 内的点的数目就约等于 r 的一个线性函数；如果这些点填满一个曲面，那么距离在 r 内的点的数目就约等于 r 的一个二次函数. 这个解释引出了下面的定义.

定义 14.2.1　设 $\boldsymbol{F}$ 为$\mathbb{R}^n$ 到其自身的一个映射，考虑一点的正向有界轨道$\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}^+(\boldsymbol{p}_0)$. 令$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{F}^j(\boldsymbol{p}_0)$，考虑点集 $\boldsymbol{S}_m = \{\boldsymbol{p}_j:\ 0 \leqslant j < m\}$. 满足条件 $0 \leqslant i < j < m$ 的点对$(i,\ j)$共有$\dfrac{m(m-1)}{2}$个. 考虑由相互之间距离小于 r 的点对 $\boldsymbol{p}_i$ 和 $\boldsymbol{p}_j$ 确定的指标对$(i,\ j)$的分数：

$$C(r,m) = \frac{\#\{(i,j) : 0 \leqslant i < j < m, \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\| < r\}}{\#\{(i,j) : 0 \leqslant i < j < m\}}.$$

这个数字 $C(r,\ m)$在 0 和 1 之间. 令

$$C(r) = \lim_{m\to\infty} C(r,m).$$

599

这个极限是彼此距离在 r 内的点对占整个轨道的百分数. 设对某个 d，$C(r)$近似于幂 r^d，$C(r) \sim r^d$，且 d 可以由下式计算出：

$$d = \dim_c(\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}^+(\boldsymbol{p}_0)) = \lim_{r\to 0} \frac{\ln(C(r))}{\ln(r)}.$$

注意到 $C(r) \leqslant 1$ 且 $r<1$，所以两个对数都是负的. 量$\dim_c(\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}^+(\boldsymbol{p}_0))$称为轨道的相关维数.

例 14.2.2　考虑双倍映射 $D(x) = 2x(\text{mod}1)$，它有在区间$[0,\ 1]$上是一致稠密的正向轨道. 取一点 x_0 使得其轨道在$[0,\ 1]$上一致稠密. 则对于小的 $r>0$，有 $C(r) \sim r$ 且 $\dim_c(\mathcal{O}_D^+(x_0)) = 1$. ■

例 14.2.3　考虑$[0,\ 1]\times[0,\ 1]$上的映射

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (2x(\text{mod}1), 3y(\text{mod}1)).$$

它有一点 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,\ y_0)$，其正向轨道在正方形内一致稠密. 对于一个很小的值 $r>0$，有大约 r^2 个点对在距离 r 内，从而 $C(r)\sim r^2$ 且 $\dim_c(\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p}_0))=2$. ■

例 14.2.4　考虑斜率为 $b>2$ 的帐篷映射 T_b，它形成了 $\alpha=1-2/b$ 中间的康托尔集 C_α. 那么，一条对所有迭代都保留在[0, 1]内的典型轨道，一致分布于 2^k 个长为 $1/b^k$ 的区间上，所以

$$C(b^{-k})\sim\frac{1}{2^k}\text{ 且}$$

$$\dim_c(\mathcal{O}_{T_b}^+(\boldsymbol{p}_0))=\frac{\ln(2)}{\ln(b)}<1.$$

应注意到这个数字与该康托尔集的盒维数相同. ■

对取 $a=1.4$，$b=-0.3$ 的 Hénon 映射的数值计算表明一个典型点的相关维数是 1.23，稍小于盒维数 1.245.

对于相关维数更详细的论述，以及分数维数的其他实际问题，见 E. Ott，T. Sauer 和 J. Yorke 的书[**81**].

14.2.2　李雅普诺夫维数

另一个分数维数，即所谓的*李雅普诺夫维数*，是由 J. Kaplan 和 J. Yorke 根据轨道的李雅普诺夫指数提出的. 轨道的李雅普诺夫指数可以进行数值计算而不存在数据存储的数量问题，因此李雅普诺夫维数也要比盒维数更容易计算. 当一个映射有一致的扩张和收缩时，它通常都会给出和盒维数一样的结果. 对于不一致扩张映射，答案也许会接近但会不同. 类似于相关维数，李雅普诺夫维数也是以轨道为基础而非点集. 它的思想是，轨道应渐近于一吸引子的，李雅普诺夫维数给出了轨道向吸引子靠近的信息.

600

定义 14.2.5　*令 $\boldsymbol{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个映射. $\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p}_0)$ 为一个有李雅普诺夫指数 $\ell_j=\ell_j(\boldsymbol{p}_0;\ \boldsymbol{F})$ 的有界正向轨道，且有 $\ell_1\geqslant\ell_2\geqslant\cdots\geqslant\ell_n$. 令 k 为满足下列条件的整数：*

$$\ell_1+\cdots+\ell_k\geqslant 0\text{ 且 }\ell_1+\cdots+\ell_{k+1}<0.$$

那么，所述轨道的李雅普诺夫维数为

$$\dim_L(\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p}_0))=k+\frac{\ell_1+\cdots+\ell_k}{|\ell_{k+1}|}.$$

注意到 $\ell_1+\cdots+\ell_k<|\ell_{k+1}|$，所以 $\dim_L(\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p}_0))<k+1$.

一个有吸引子的微分同胚当接近吸引子时体积减小，故有 $\ell_1+\cdots+\ell_n<0$ 且 $\dim_L(\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p}_0))<n$. 如果吸引子有一个正的李雅普诺夫指数，那么 $k\geqslant1$. 这样，有正李雅普诺夫指数的吸引子的李雅普诺夫维数必大于 1 且小于 n.

例 14.2.6　Hénon 映射不是一致扩张和收缩的，如果 $a=1.4$，$b=-0.3$，那么 $\ell_1\approx0.42$，$\ell_2\approx-1.62$. 这样，李雅普诺夫维数大约等于

$$1+\frac{0.42}{1.62}\approx1.26.$$

另一方面，盒维数约等于 1.245. ■

下一个定理说明，当吸引子在所有点都大体相同时，那么李雅普诺夫维数等于盒维数. 如果一映射 $\boldsymbol{F}$ 在其不变集的所有点处有相同的扩张率和收缩率，则称该映射在该不变集上是一致双曲的.

定理 14.2.7 令 $\boldsymbol{F}$ 为在一个混沌吸引子 $\boldsymbol{A}$ 上是一致双曲的微分同胚. 假设 $\boldsymbol{p}_0$ 为一满足 $\omega(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{F})=\boldsymbol{A}$ 的点. 那么，点 $\boldsymbol{p}_0$ 的轨道的李雅普诺夫维数等于吸引子 $\boldsymbol{A}$ 的盒维数.

证明思路 如下的启发式的讨论在一致扩张和收缩的情形下能够严格化. 令 $\ell_j=\ell_j(\boldsymbol{p}_0;\ \boldsymbol{F})$.

首先，考虑二维情形. 因为吸引子是混沌的，所有的方向不可能都是压缩的，且 $\ell_1>0$. 收缩域的面积在迭代下是减小的，所以 $\ell_1+\ell_2<0$ 且 $\ell_2<0$. 令 $N(r)$ 为覆盖吸引子 $\boldsymbol{A}$ 所需要的边长为 r 的盒的个数. k 次迭代后，每个盒在 $\boldsymbol{F}^k$ 下的像是一个维数约等于 $re^{\ell_1 k}\times re^{\ell_2 k}$ 的新盒. 为了用边长为 $re^{\ell_2 k}$ 的更小的盒来覆盖每一个新盒，大约需要用 $e^{\ell_1 k}/e^{\ell_2 k}=e^{(\ell_1-\ell_2)k}$ 个盒. 由于这些像有 $N(r)$ 个，因此用来覆盖整个吸引子且边长为 $re^{\ell_2 k}$ 的盒的总个数大约是

$$N(re^{\ell_2 k}) \approx N(r)e^{(\ell_1-\ell_2)k}.$$

令 $k\to\infty$ 并取极限，得

$$\begin{aligned}\dim_b(\boldsymbol{A}) &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(N(re^{\ell_2 k}))}{\ln(r^{-1}e^{-\ell_2 k})}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(N(r))+k(\ell_1-\ell_2)}{\ln(r^{-1})-k\ell_2}\\ &= \frac{\ell_1-\ell_2}{-\ell_2}=1+\frac{\ell_1}{|\ell_2|}\\ &= \dim_L(\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p}_0)).\end{aligned}$$

601

其次，考虑$\mathbb{R}^3$ 中一致扩张和收缩的情形，其中 $\ell_1+\ell_2>0$ 而 $\ell_1+\ell_2+\ell_3<0$. 环绕四次的收缩率为$\beta>1/4$ 的螺旋管就是满足这些条件的一个例子，尽管 $\ell_2<0$. 令 $N(r)$ 为覆盖吸引子所需要的边长为 r 的盒的个数. k 次迭代后，每个盒在 $\boldsymbol{F}^k$ 下的像是一个维数等于 $re^{\ell_1 k}\times re^{\ell_2 k}\times re^{\ell_3 k}$ 的新盒. 为了用更小的边长为 $re^{\ell_3 k}$ 的盒来覆盖这些新盒中每一个，在第一个方向上用大约需要 $e^{\ell_1 k}/e^{\ell_3 k}=e^{(\ell_1-\ell_3)k}$ 个盒，在第二个方向上大约用 $e^{\ell_2 k}/e^{\ell_3 k}=e^{(\ell_2-\ell_3)k}$ 个盒. 综合起来，一共需要

$$e^{(\ell_1-\ell_3)k}e^{(\ell_2-\ell_3)k}=e^{(\ell_1+\ell_2-2\ell_3)k}$$

个盒来覆盖每个盒的像. 由于这种像有 $N(r)$ 个，用来覆盖吸引子的边长为 $re^{\ell_3 k}$ 的盒的总个数大约是

$$N(re^{\ell_3 k}) \approx N(r)e^{(\ell_1+\ell_2-2\ell_3)k}.$$

令 $k\to\infty$ 并取极限，得

$$\begin{aligned}\dim_b(\boldsymbol{A}) &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(N(re^{\ell_2 k}))}{\ln(r^{-1}e^{-\ell_3 k})}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(N(r)e^{(\ell_1+\ell_2-2\ell_3)k})}{\ln(r^{-1}e^{-\ell_3 k})}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(N(r))+k(\ell_1+\ell_2-2\ell_3)}{\ln(r^{-1})-k\ell_3}\end{aligned}$$

$$= \frac{\ell_1 + \ell_2 - 2\ell_3}{-\ell_3} = 2 + \frac{\ell_1 + \ell_2}{|\ell_3|}$$

$$= \dim_L(\mathcal{O}_F^+(\boldsymbol{p}_0)).$$

这样，对于这种情形，李雅普诺夫维数等于盒维数. ■

14.3 叠函数系

本节给出了一个利用所谓的叠函数系来生成复杂集合的不同的方法. M. Barnsley 在[9]中有力推进了这种系统. 这个过程是一个生成复杂集合的简单方法. 在平面上构造的那些复杂集合在形式上是多种多样的，同时也是很有趣的. 这种集合中有些与由单个的映射产生的不变集有关，而另一些则与其无关.

在本章的引言里，曾给出了自相似的定义. 在这里再重复一下，因为这个定义在本节首次用到，而且许多叠函数系都自然而然地是自相似的.

定义 14.3.1 一个集合称为是自相似的，如果它的任意一个小块都能被放大而得到整个集合.

我们首先从三分康托尔集的一个不同的构造开始. 在从一个不同视角观看康托尔集的构造后，再把这些思想和构造应用到平面上的集合.

例 14.3.2(康托尔集) 我们再回到例 14.1.12，它由两个函数表示：

602

$$f_1(x) = \beta x, \quad f_2(x) = \gamma x + 1 - \gamma,$$

其中β，$\gamma>0$且$\beta+\gamma<1$，故$\beta<1-\gamma$. 因为单位区间在两个函数下都是不变的，所以不妨令$\boldsymbol{K}_0=[0,1]$. 则

$$f_1(\boldsymbol{K}_0) = [0,\beta] \subset \boldsymbol{K}_0, \quad f_2(\boldsymbol{K}_0) = [1-\gamma,1] \subset \boldsymbol{K}_0.$$

因此，若定义$\boldsymbol{K}_1$为它们的并集，得到

$$\boldsymbol{K}_1 = f_1(\boldsymbol{K}_0) \cup f_2(\boldsymbol{K}_0) = [0,\beta] \cup [1-\gamma,1] \subset \boldsymbol{K}_0.$$

那么，

$$f_1(\boldsymbol{K}_1) = [0,\beta^2] \cup [\beta(1-\gamma),\beta] \subset f_1(\boldsymbol{K}_0) \subset \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}_0,$$

$$f_2(\boldsymbol{K}_1) = [1-\gamma,1+\beta\gamma-\gamma] \cup [1-\gamma^2,1] \subset f_2(\boldsymbol{K}_0) \subset \boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}_0.$$

定义$\boldsymbol{K}_2$为并集，得到

$$\boldsymbol{K}_2 = f_1(\boldsymbol{K}_1) \cup f_2(\boldsymbol{K}_1),$$

它有$2^2=4$个长度为β^2，$\beta\gamma$或γ^2的区间. 令$\delta=\max\{\beta,\gamma\}$，则所有的长度都小于$\delta^2$. 由归纳法继续下去，我们会看到

$$\boldsymbol{K}_j = f_1(\boldsymbol{K}_{j-1}) \cup f_2(\boldsymbol{K}_{j-1})$$

有2^j个长度小于δ^j的区间. 交集

$$\boldsymbol{A} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{K}_j$$

是例 14.1.12 中讨论的非一致的康托尔集.

这种构造的重要特征是，f_1和f_2是两个压缩映射，每一个都把单位区间映到它自身里面，

而且它们的像是互不相交的.

注意到f_1通过一个相似压缩把集合A映射到$A\cap[0,\beta]$上；所以，它的逆映射f_1^{-1}是通过相似扩张把子集$A\cap[0,\beta]$映射到A上. 同样地，f_2^{-1}通过相似扩张把子集$A\cap[1-\gamma,1]$映射到A上. 取更多的迭代，对于选定的$s_0,\cdots,s_j$，每个s_i等于0或1，映射$f_{s_j}\circ\cdots\circ f_{s_0}$通过相似压缩把$A$映射到子集$A\cap f_{s_j}\circ\cdots\circ f_{s_0}[0,1]$上，它的逆映射通过相似扩张把子集映射到整个吸引子$A$上. 因此，集合$A$是自相似的. ■

定义 14.3.3　$\mathbb{R}^n$上的一个叠函数系是从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的映射的有限集$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_k\}$，$k\geqslant 1$. 称这样的系统为一个 IFS，定义它在紧集(有界闭集)上的作用为

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{S}) \cup \cdots \cup \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{S}).$$

定义 14.3.4　映射$\boldsymbol{F}_i$是一个压缩映射，如果存在$0<r_i<1$，使得对所有点$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，

$$\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{y})\| \leqslant r_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

成立. 对所有的点x和y都成立的最小的r_i值称为压缩常数. 如果一个 IFS 中每个$\boldsymbol{F}_i$都是压缩映射，其相应的压缩常数为r_i，那么 IFS 称为压缩的，$r=\max\{r_i\}$称为该 IFS 的压缩常数.

一组映射称为仿射映射叠函数系，如果每个映射都可以表示为

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i,$$

603

其中每个$\boldsymbol{L}_i$都是一个线性映射，且$\boldsymbol{c}_i$是$\mathbb{R}^n$上的常点. 仿射映射中某个是压缩映射当且仅当它的范数小于1，即$\|\boldsymbol{L}_i\|<1$.

如果对于任意的点$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，映射$\boldsymbol{F}_i$都满足

$$\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{y})\| = r_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

那么它把一个对象$\boldsymbol{S}$映射为相似的对象(即相同的形状，但可能大小不同). 这种映射可以写成

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}) = r_i\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i,$$

其中$\boldsymbol{Q}_i$是一个标准正交矩阵. 这样的映射称为一个相似. 在我们给出的几乎所有的例子中，所有的映射都是相似压缩，并有一个一致的压缩因子$0<r<1$，$r_i=r$. 这样的系统称为具有一致因子r的相似压缩叠函数系.

例 14.3.5(Sierpinski 垫)　首先从一个边长为 1 且顶点分别为$(0,0)$，$(1,0)$和$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的实心正三角形$\boldsymbol{T}_0$开始. 令$\boldsymbol{F}_1$表示向顶点$(0,0)$的$\frac{1}{2}$压缩，$\boldsymbol{F}_2$表示向顶点$(1,0)$的$\frac{1}{2}$压缩，$\boldsymbol{F}_3$表示向顶点$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的$\frac{1}{2}$压缩：

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-(1,0)) + (1,0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \left(\frac{1}{2},0\right),$$

$$\boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}-\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

由这些式子得到$\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{T}_0)\subset\boldsymbol{T}_0$，$1\leqslant j\leqslant 3$.

归纳地定义

604

$$T_j = \mathcal{F}(T_{j-1}) = F_1(T_{j-1}) \cup F_2(T_{j-1}) \cup F_3(T_{j-1}).$$

那么，T_1 由三个边长为$\frac{1}{2}$的实心等边三角形组成，参见图 14.3.1a. 由归纳法可知，T_j 由 3^j 个边长为 $1/2^j$ 的实心等边三角形组成，T_1 到 T_4 参见图 14.3.1a～d. 交集

$$G = \bigcap_{j=0}^{\infty} T_j$$

称为 Sierpinski 垫.

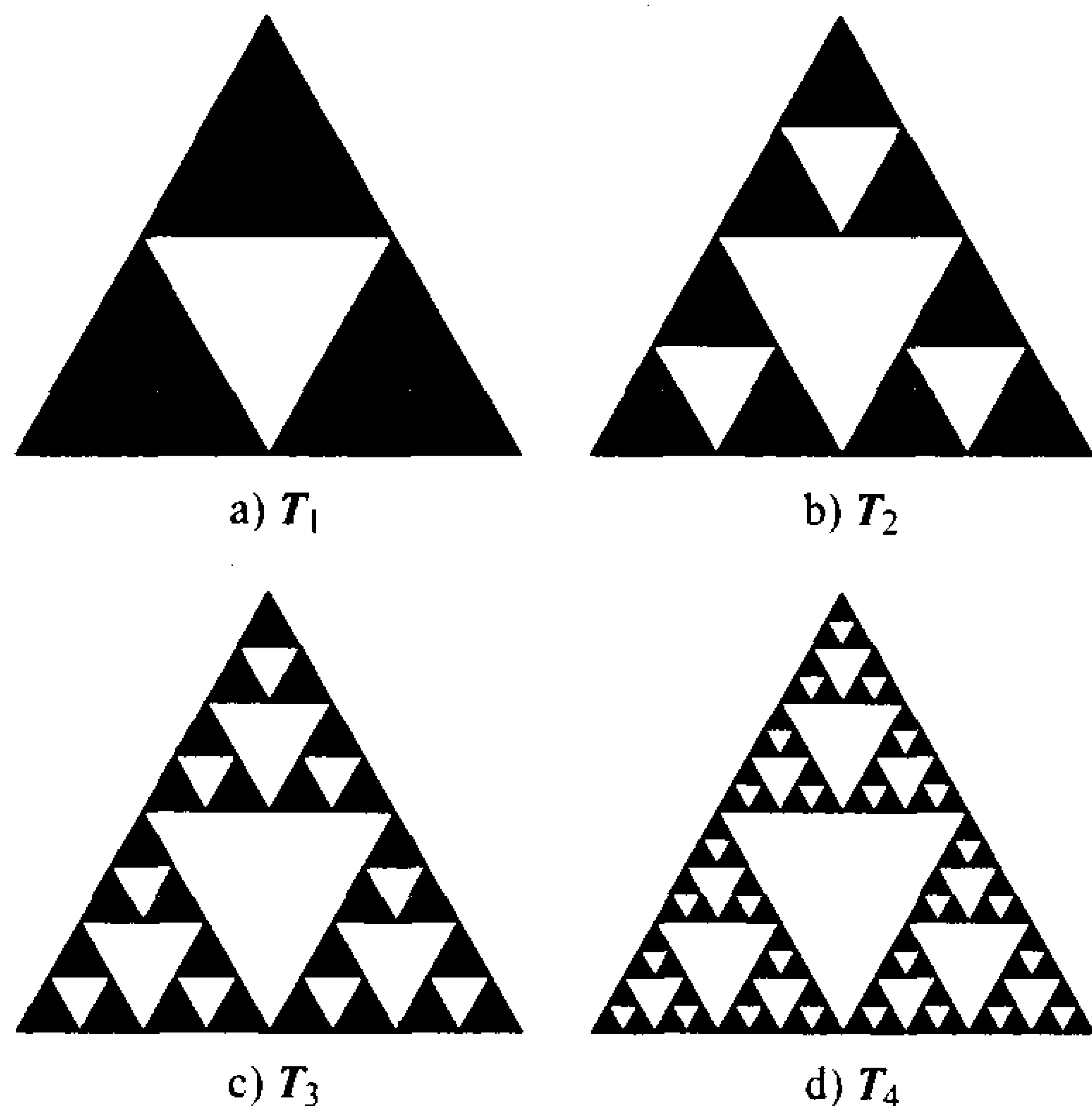


图 14.3.1　Sierpinski 垫中的集合 T_1，T_2，T_3 和 T_4

与康托尔集一样，Sierpinski 垫是自相似的.

由于第 j 步有 3^j 个边长为 2^{-j}的正三角形，且它们仅在顶点处相交，故 Sierpinski 垫的盒维数满足

$$\dim_b(G) = \lim_{j\to\infty} \frac{\ln(3^j)}{\ln(2^j)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} < 1. \qquad \blacksquare$$

例 14.3.6(Koch 曲线)　这最后一个例子的描述方式与前面相比稍有不同，差别在于此时没有一个集合映射到它自身. 令 S_0 为单位长的直线段，S_1 是由如图 14.3.2a 所示的四条长均为 1/3 的线段组成的曲线. 四个映射 F_i 都是压缩常数为 1/3 的压缩. 它们都使得每个像$F_i(S_0)$等于 S_1 的第 i 个子区间. 这样，F_1 只是一个没有旋转和平移的压缩；F_2 旋转 $\pi/3$ 角度并平移了 $c_2=(1/3, 0)$；F_3 旋转 $-\pi/3$ 角度并平移了 $c_3=(1/2, \sqrt{3}/6)$；F_4 仅仅是常数 $c_4=(2/3, 0)$ 的平移. 由这些描述得到，$\mathcal{F}(S_0)=S_1$.

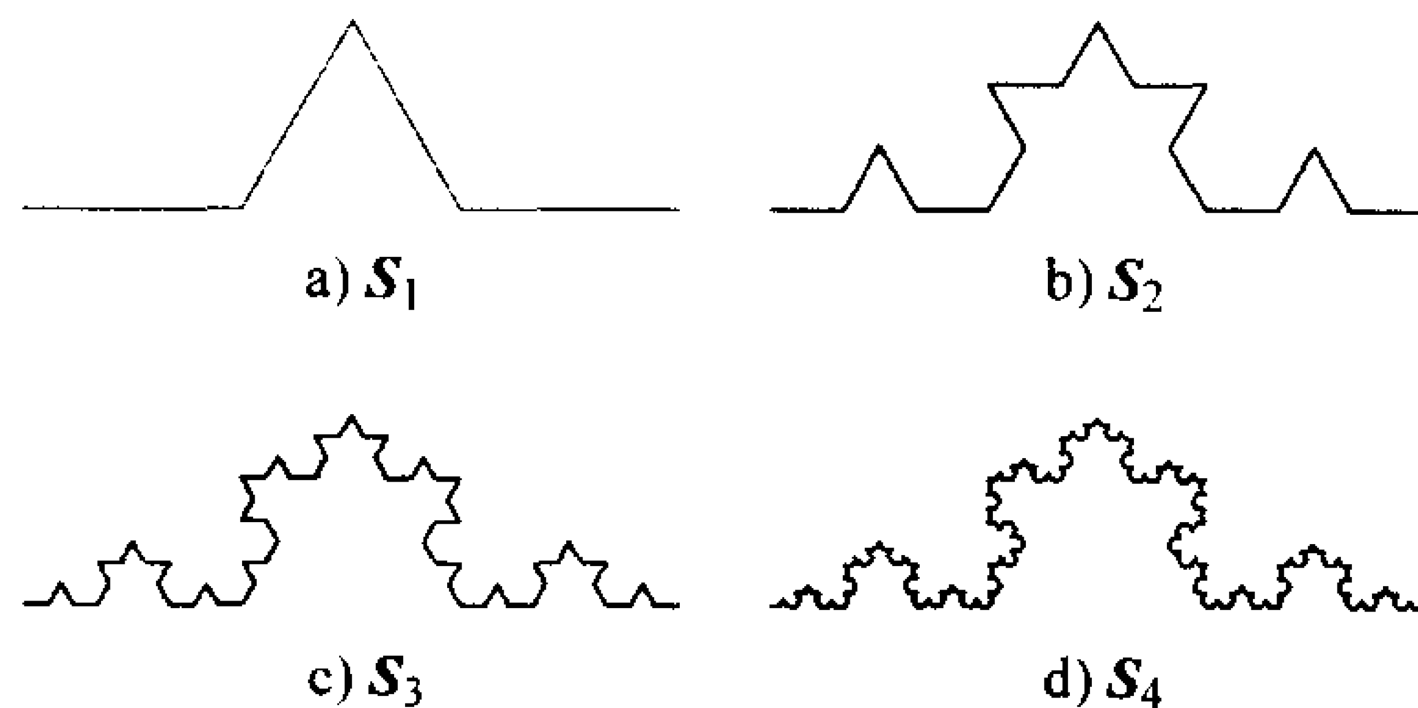


图 14.3.2　Koch 曲线中的集合 S_1，S_2，S_3 和 S_4

再次应用叠函数系，像 $F_i(S_1)$的端点就是 S_1 的第 i 个子区间的端点. 它们的并给出 S_2：

$$S_2 = \mathcal{F}(S_1) = F_1(S_1) \cup F_2(S_1) \cup F_3(S_1) \cup F_4(S_1).$$

参见图 14.3.2b. 该曲线由 4^2 条长为 $1/3^2$ 的线段组成，总长度为$(4/3)^2$.

由归纳法，定义

$$S_j = \mathcal{F}(S_{j-1}) = F_1(S_{j-1}) \cup F_2(S_{j-1}) \cup F_3(S_{j-1}) \cup F_4(S_{j-1}),$$

它由 4^j 条长为 $1/3^j$ 的线段组成，总长度为$(4/3)^j$. 令 K 为集合 S_j 的极限曲线. 因为当 j 趋于无穷时$(4/3)^j$ 趋于无穷，所以极限集 K 是一个有无限长度的连续曲线. 该曲线并不真正具有长度，它是不可求长的.

由于在第 j 步有 4^j 条长为 3^{-j}的线段，而且它们仅仅在顶点处相交，所以吸引子的盒维数是

$$\dim_b(\boldsymbol{K}) = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(4^j)}{\ln(3^j)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)},$$

故 $1<\dim_b(\boldsymbol{K})<2$. 这样，$\boldsymbol{K}$ 是一条盒维数大于 1 的连续曲线. ■

最后，我们讨论由一组压缩映射组成的叠函数系的不变集. 下面的定理说明前面给出的不变集是叠函数系唯一的紧不变集.

605

定理 14.3.7 令 $\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个压缩 IFS，且每个函数都有一个压缩常数 r_i. 设 $r=\max\{r_i\}$ 为 IFS 的压缩常数.

(a) 令

$$R = \max_i\left\{\frac{\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{0})\|}{1-r_i}\right\}$$

和 $\bar{\boldsymbol{B}}(R)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\ \|\boldsymbol{x}\|\leqslant R\}$. 那么，球在 IFS 下是正不变的，即

$$\mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{B}}(R)) \subset \bar{\boldsymbol{B}}(R).$$

(b) 令 $\boldsymbol{S}_0$ 为任意一个使得 $\mathcal{F}(\boldsymbol{S}_0)\subset\boldsymbol{S}_0$ 成立的紧集. 归纳地定义 $\boldsymbol{S}_m=\mathcal{F}(\boldsymbol{S}_{m-1})$，且 $\boldsymbol{A}=\bigcap_{m=0}^{\infty}\boldsymbol{S}_m$. 那么，此叠函数系把 $\boldsymbol{A}$ 映满到 $\boldsymbol{A}$ 上(即 $\mathcal{F}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$). 而且，$\boldsymbol{A}$ 是此叠函数系唯一的紧不变集. 更确切地说，如果 $\boldsymbol{A}'$ 是任意一个使得 $\boldsymbol{A}'=\mathcal{F}(\boldsymbol{A}')$ 成立的非空紧集，那么 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$. 特别地，如果 $\boldsymbol{S}_0$ 为任意一个使得 $\mathcal{F}(\boldsymbol{S}_0)\subset\boldsymbol{S}_0$ 成立的紧集，那么 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{S}_0$.

(c) 吸引子 $\boldsymbol{A}$ 的盒维数小于等于 $\ln(k)/\ln(1/r)$:

$$\dim_b(\boldsymbol{A}) \leqslant \frac{\ln(k)}{\ln(1/r)}.$$

如果 $\mathcal{F}$ 是具有一致因子 r 的相似压缩 IFS，且存在 $\mathcal{F}$ 的一个紧正不变集 $\boldsymbol{S}_0$，同时对所有的 $i\neq j$ 有 $\boldsymbol{F}_i(\mathrm{int}(\boldsymbol{S}_0))\cap\boldsymbol{F}_j(\mathrm{int}(\boldsymbol{S}_0))=\varnothing$，那么吸引子 $\boldsymbol{A}$ 的盒维数为

$$\dim_b(\boldsymbol{A}) = \frac{\ln(k)}{\ln(1/r)}.$$

证明见 14.4 节.

注 14.3.8 在前面的例子中，我们并不是取一个大球 $\bar{\boldsymbol{B}}(R)$ 然后考察它在叠函数系下的像，而是用一个与其关系更紧密的集合. 详之，对于康托尔集，我们选用一个区间；对于 Sierpinski 垫，我们选用三角形；对于 Koch 曲线，我们不是选用一个映入自身的集合，而是一条直线段的相继迭代.

14.3.1 作用在集合上的叠函数系

我们已经知道，$\mathbb{R}^n$ 上的单个的压缩映射有一个吸引所有点的不动点. 本节我们将会看到，压缩映射组成的一个叠函数系在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上的作用也是一个压缩，而且有唯一的紧不动集.

为了更精确地描述，我们先定义 $\mathbb{R}^n$ 上紧子集之间的一个距离. 为了确保存在一个不动点，我们需要知道 $\mathbb{R}^n$ 上的紧子集组成的空间 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 在所定义的距离下是完备的. 例如，无理数是不完备的：映射 $f(x)=x/2$ 是无理数上的一个压缩，但没有无理数不动点. (唯一的不动点是有理数 0.)

606

利用这些集合之间的距离，我们证明压缩映射的叠函数系的诱导作用是一个压缩. 由此可见此作用有一个紧不动集，它就是该叠函数系的吸引子.

紧集间的距离

先定义$\mathbb{R}^n$上的紧子集之间的距离. 我们将根据紧集间的两个"半度量"来定义它.（两个紧集之间的半度量可以为零，不需要它们相等.）

定义 14.3.9　*给定一个集合 $\boldsymbol{X}$，在 $\boldsymbol{X}$ 中两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 处取值 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的一个函数称为 $\boldsymbol{X}$ 上的一个度量或距离 d，如果对 $\boldsymbol{X}$ 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 都满足下列四条性质：*

(i) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(ii) $0 \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \infty$.

(iii) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ *当且仅当* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(iv) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

集合 $\boldsymbol{X}$，连同度量 d，称为一个度量空间.

令$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$表示$\mathbb{R}^n$上所有非空紧子集的全体：

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \{\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A} \text{ 非空且是紧的}\}.$$

我们知道$\mathbb{R}^n$的子集是紧的当且仅当它是闭的且有界.

利用一点 $\boldsymbol{x}$ 到非空闭集 $\boldsymbol{S}$ 的距离，即

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}) = \min\{\, \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| : \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S} \}$$

可定义紧集间的距离（这里应定义 $\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$——译者注）. 因为集合是闭的，所以上述最小值能够达到. 参见图 14.3.3. 因为集合是闭的，所以 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}) = 0$ 当且仅当$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

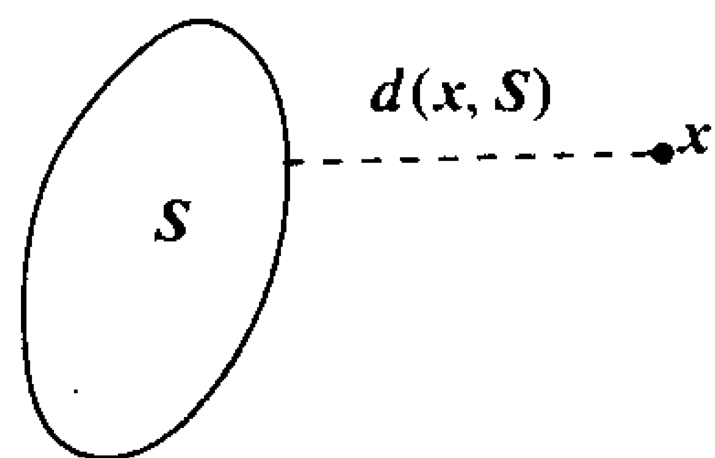


图 14.3.3　点到紧集的距离

为了定义$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的距离，我们考虑集合 $\boldsymbol{A}$ 的闭邻域$\overline{\mathcal{N}}_r(\boldsymbol{A})$ $(r > 0)$：

$$\overline{\mathcal{N}}_r(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}) \leqslant r\}.$$

令 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$中的两个集合，$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的下半度量定义为

607

$$\begin{aligned}\delta_l(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) &= \min\{r \geqslant 0 : \boldsymbol{A} \subset \overline{\mathcal{N}}_r(\boldsymbol{B})\} \\ &= \max\{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B}) : \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}\}.\end{aligned}$$

类似地，上半度量定义为

$$\begin{aligned}\delta_u(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) &= \min\{r \geqslant 0 : \boldsymbol{B} \subset \overline{\mathcal{N}}_r(\boldsymbol{A})\} \\ &= \max\{d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}) : \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\} \\ &= \delta_l(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

豪斯多夫度量定义为

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) &= \max\{\delta_l(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}), \delta_u(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\} \\ &= \min\{r > 0 : \boldsymbol{A} \subset \overline{\mathcal{N}}_r(\boldsymbol{B}) \text{ 且 } \boldsymbol{B} \subset \overline{\mathcal{N}}_r(\boldsymbol{A})\}, \\ &= \max\{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B}), d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}) : \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$．参见图 14.3.4.

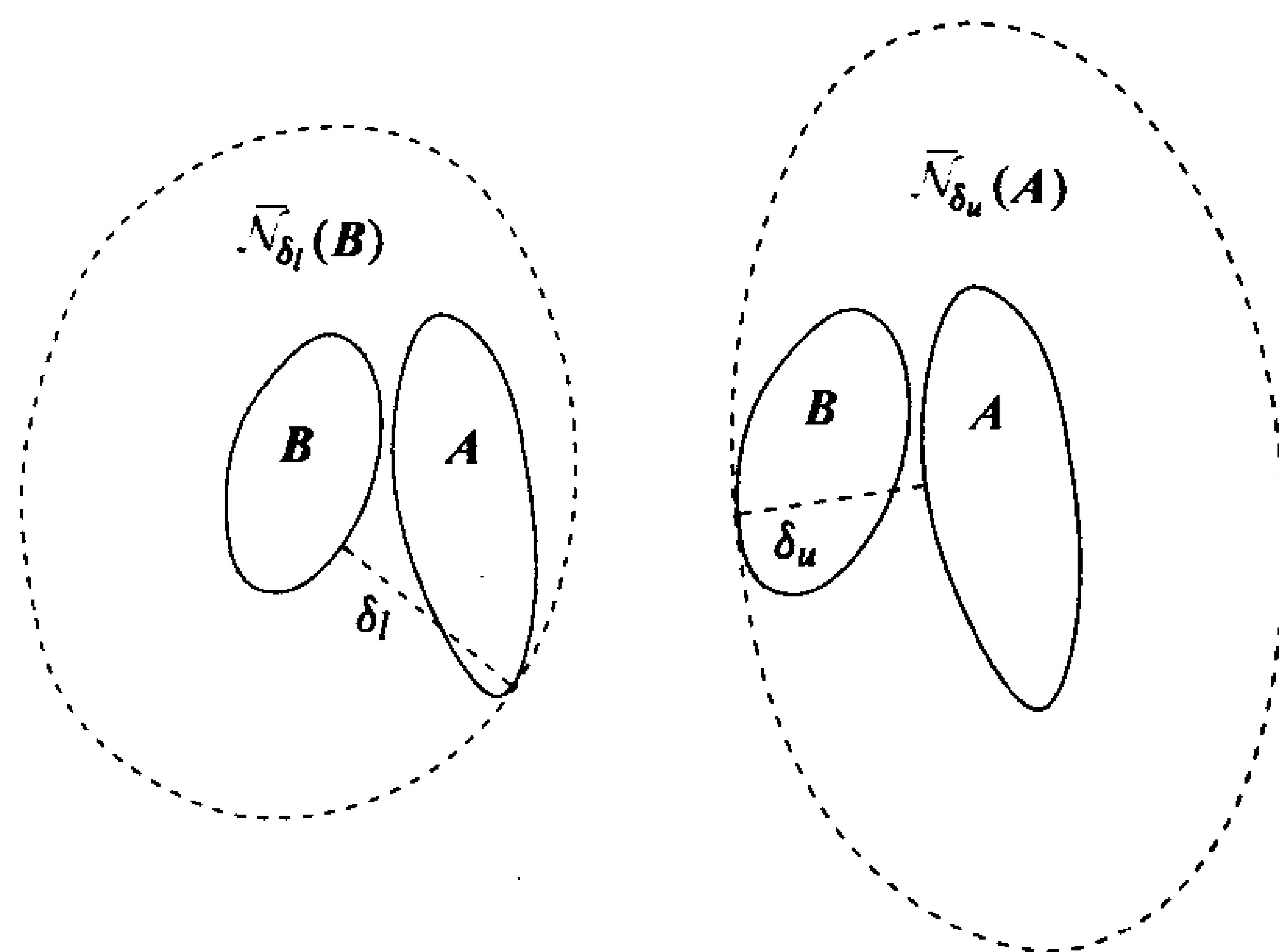


图 14.3.4　集合 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 之间的下距离 $\delta_l=\delta_l(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 和上距离 $\delta_u=\delta_u(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$

下面的定理表明 δ 是 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量.

定理 14.3.10　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 中的集合，

(a) 半度量 δ_l 满足下列条件：

(i′) $\delta_l(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 不一定等于 $\delta_l(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A})$.

(ii′) $0\leqslant\delta_l(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})<\infty$.

(iii′) $\delta_l(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{B}$.

(iv′) $\delta_l(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C})\leqslant\delta_l(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})+\delta_l(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$.

(b) 半度量 δ_u 满足与 δ_l 相同的条件，但条件 (iii′) 替换为 $\delta_u(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{A}$.

(c) 豪斯多夫度量 δ 是 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量.

证明见 14.4 节.

在本小节的开头部分已经提到，为了证明空间上的压缩有不动点，我们需要知道该空间是完备的. 对于实直线，我们可以根据递增点列的极限来定义完备性；但在欧几里得空间和一般的度量空间上，这是不可能的. 我们给出几个例子来说明这个问题.　608

定义 14.3.11　令 X 是一度量空间，度量为 d 且满足定义 14.3.9 中的条件.

一个点列 $\{\boldsymbol{x}^i\}_{i=0}^{\infty}$ 称为是柯西序列，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 I，使得对所有的 i，$j\geqslant I$ 有 $\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^j\|<\varepsilon$.

有距离 d 的度量空间 X 称为是完备的，如果对任意一个柯西序列 $\{\boldsymbol{x}^i\}_{i=0}^{\infty}$ 都在 X 中有极限 $\boldsymbol{x}^\infty$，使得当 i 趋于无穷大时 $\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^\infty\|$ 趋于零. 这样，任意互相“渐近”的点列（和在一个柯西序列中一样）必须收敛于空间中的一点 $\boldsymbol{x}^\infty$.

定理 14.3.12　空间 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 关于豪斯多夫度量 δ 是完备的.

定理的证明需要一些详细的构造，这并非易事，见 14.4 节.

应用于集合的压缩映射

如果 $\boldsymbol{S}$ 是一个紧集，$\boldsymbol{F}$ 是一个连续函数，那么 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})$ 也是紧的；这样，$\boldsymbol{F}$ 把 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 中的一

个集合变为$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$中的一个集合.

下面的定理表明，若当$\boldsymbol{F}$作用于$\mathbb{R}^n$上的点时是一个压缩，则它诱导出$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的一个压缩.

定理 14.3.13　假设$\boldsymbol{F}$是$\mathbb{R}^n$上的一压缩映射，且压缩常数为$r<1$. 那么，$\boldsymbol{F}$诱导出一个有相同压缩常数r的$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的压缩.

证明见 14.4 节.

定理 14.3.14　假设$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_k\}$是$\mathbb{R}^n$上的一压缩 IFS，压缩常数为$r_1, \cdots, r_k$，且$r=\max\{r_i: 1\leqslant i\leqslant k\}<1$. 则$\mathcal{F}$在$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的诱导作用是一个压缩常数为$r$的压缩.

证明见 14.4 节.

正如$\mathbb{R}^n$上的一压缩映射有一个不动点，$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上一个压缩 IFS 的诱导作用有一个不动集. 这需要用到$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$是完备的这一事实.

定理 14.3.15　假设$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_k\}$是$\mathbb{R}^n$上的一个压缩叠函数系，压缩常数为$0<r<1$. 那么，$\mathcal{F}$在$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上有唯一的不动集$\boldsymbol{A}$且该集为该叠函数系的吸引子.

证明见 14.4 节.

定理 14.3.15 中的唯一的不动集$\boldsymbol{A}$与定理 14.3.7 中的吸引子$\boldsymbol{A}$是相同的集合. 定理 14.3.7 中的构造更接近本书前面部分对收缩域的吸引子的讨论，且更具体. 而 14.3.1 节中介绍的由豪斯多夫度量给出的压缩从数学上来看更优美，且其他多数书中也是用此方法.

14.3.2　叠函数系的随机作用

我们首先证明，从 IFS 随机选择一个映射得到的轨道趋于吸引子.

定理 14.3.16　令$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_k\}$为由$\mathbb{R}^n$上的压缩映射组成的一个叠函数系，且有不变紧集$\boldsymbol{A}$. 令$r=\max\{r_i: 1\leqslant i\leqslant k\}<1$为压缩常数. 那么，对$\mathbb{R}^n$上的任意一个初始值$\boldsymbol{x}_0$，如果$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{F}_{s_j}(\boldsymbol{x}_{j-1})$是从这组映射里随机选择一个映射而得到的轨道，那么，从$\boldsymbol{x}_j$到$\boldsymbol{A}$的距离至少是以从$\boldsymbol{x}_0$到$\boldsymbol{A}$的初始距离的r^j倍快的速度趋于零的，即$d(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{A})\leqslant r^j d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{A})$.

证明见 14.4 节.

除了作用在集合上，一个叠函数系还可以按如下方式作用于一些点上：从函数系里随机取一个函数，并应用于这些点. 由于这种随机方式重复地应用于该函数系，所以轨道填满了这个函数系的吸引子.

609

定义 14.3.17　一个概率叠函数系是指从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的映射的有限组$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_k\}(k\geqslant 1)$，以及一些正的权重$p_1, p_2, \cdots, p_k$，使得对$1\leqslant i\leqslant k$有$0<p_i<1$且$p_1+\cdots+p_k=1$，其中每个$p_i$表示$\boldsymbol{F}_i$的选择概率.

例 14.3.18(康托尔集)　取$[0, 1]$中一点x_0. 投掷一个硬币，如果它正面朝上，那么将该点映为$x_1=f_1(x_0)=\frac{1}{3}x_0$；如果背面朝上，则将其映为$x_1=f_2(x_0)=\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}$. 继续投掷硬币，且按正面朝上还是背面朝上而取$f_1$或$f_2$，则$x_n=f_1(x_{n-1})$或$f_2(x_{n-1})$. 对于由正面或背面所成的随机序列，点列$x_n$在三分康托尔集$\boldsymbol{K}$上是稠密的. 即使$x_0$在区间$[0, 1]$的外部，它的迭代也收敛于集合$\boldsymbol{K}$. 因此，这个集合是这对函数的一个吸引子. ■

例 14.3.19(Sierpinski 垫) 设定义 Sierpinski 垫的三个函数为

$$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3\},$$

在等边三角形 $\boldsymbol{T}_0$ 中给定一个初始点 $\boldsymbol{x}_0$，以每个都为 1/3 的概率取其中一个映射.（可以通过滚动一个骰子来决定，如果出现 1 或 2 则选 $\boldsymbol{F}_1$，如果出现 3 或 4 则选 $\boldsymbol{F}_2$，如果出现 5 或 6 则选 $\boldsymbol{F}_3$.）对于这些映射的一个随机序列 $\boldsymbol{F}_{s_j}$，初始点的迭代 $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{F}_{s_j}(\boldsymbol{x}_{i-1})$ 在例 14.3.5 给出的集合 $\boldsymbol{G}$ 上是稠密的. ■

这个轨道在此叠函数系的吸引子里是稠密的原因由下面定理的(b)部分给出.

定理 14.3.20 设 Σ_k^+ 为具有位移映射 σ 的 k 个符号的单边完全位移. 设 $\{p_1,\cdots,p_k\}$ 为一列权重，对所有的 $1\leqslant i\leqslant k$ 有 $0<p_i<1$，且 $p_1+\cdots+p_k=1$.

(a)那么，存在一个定义在 Σ_k^+ 上的概率测度 μ_p，它对 σ 是不变的且满足：给定 $a_0,\cdots,a_n\in\{1,\cdots,k\}$，那么

$$\mu_p(\{\boldsymbol{s}:s_i=a_0\})=p_{a_0},$$

$$\mu_p(\{\boldsymbol{s}:s_i=a_i,0\leqslant i\leqslant n\})=\prod_{i=0}^{n}p_{a_i}.$$

(b)存在由符号序列所组成的全测集 $\Sigma^*\subset\Sigma_k^+$，$\mu_p(\Sigma^*)=1$，使得任意的 $\boldsymbol{s}\in\Sigma^*$ 包含所有的有限串(即对于任意有限串 $a_0\cdots a_{m-1}$，存在 j 使得对 $0\leqslant i\leqslant m-1$ 有 $a_i=s_{j+i}$). 因此，Σ^* 中任一符号序列 $\boldsymbol{s}$ 在映射 σ 下的 ω 极限集是整个 Σ_k^+，即 $\omega(\boldsymbol{s};\sigma)=\Sigma_k^+$.

证明见 14.4 节.

下面推论的证明是这个定理的一个简单结论.

推论 14.3.21 设 $\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_k\}$ 是具有权重 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 的压缩的概率叠函数系. 设 $\Sigma^*\subset\Sigma_k^+$ 是上一个定理中的集合且 $\boldsymbol{A}$ 是定理 14.3.7 中给出的叠函数系的吸引子.

(a)如果 $\boldsymbol{s}\in\Sigma^*$ 且 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的一个点，那么集合

$$\{\boldsymbol{F}_{s_i}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{s_0}(\boldsymbol{x}_0)\}_{i=0}^{\infty}$$

在 $\boldsymbol{A}$ 中是稠密的.

(b)如果 $\boldsymbol{s}\in\Sigma^*$ 且 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点，那么集合

$$\{\boldsymbol{F}_{s_i}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{s_0}(\boldsymbol{x}_0)\}_{i=0}^{\infty}$$

的闭包包含 $\boldsymbol{A}$.

610

证明 (a)假设 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{S}_0$ 是一个闭的有界集，且在叠函数系下是正不变的. Σ^* 中的一个元素 $\boldsymbol{s}$ 包含所有的有限串. 取一个有限串 $a_0\cdots a_{m-1}$. 则存在 j 使得对 $0\leqslant i\leqslant m-1$ 有 $a_i=s_{j+i}$. 因此

$$\boldsymbol{F}_{s_{j+m-1}}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{s_0}(\boldsymbol{x}_0)\in\boldsymbol{F}_{a_{m-1}}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{a_0}(\boldsymbol{S}_0).$$

但是，集合 $\boldsymbol{F}_{a_{m-1}}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{a_0}(\boldsymbol{S}_0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的任意小子集. 所以，在这列映射下，$\boldsymbol{x}_0$ 的轨道在 $\boldsymbol{A}$ 中是稠密的.

(b)若 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一点，由定理 14.3.16，有限次迭代后，点 $\boldsymbol{F}_{s_j}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{s_0}(\boldsymbol{x}_0)$ 非常接近 $\boldsymbol{A}$. 这样，(b)部分可以由(a)部分的讨论得到. ■

14.3.3　确定叠函数系

对于一个分形 $\boldsymbol{A}$，我们来确定生成它的叠函数系．对于所有考虑过的例子，函数都是仿射的且具有形式

$$\boldsymbol{F}_i\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_i & b_i\\c_i & d_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_i\\f_i\end{bmatrix}.$$

找到 IFS 是需要技巧的，在这里仅给出几个实例.

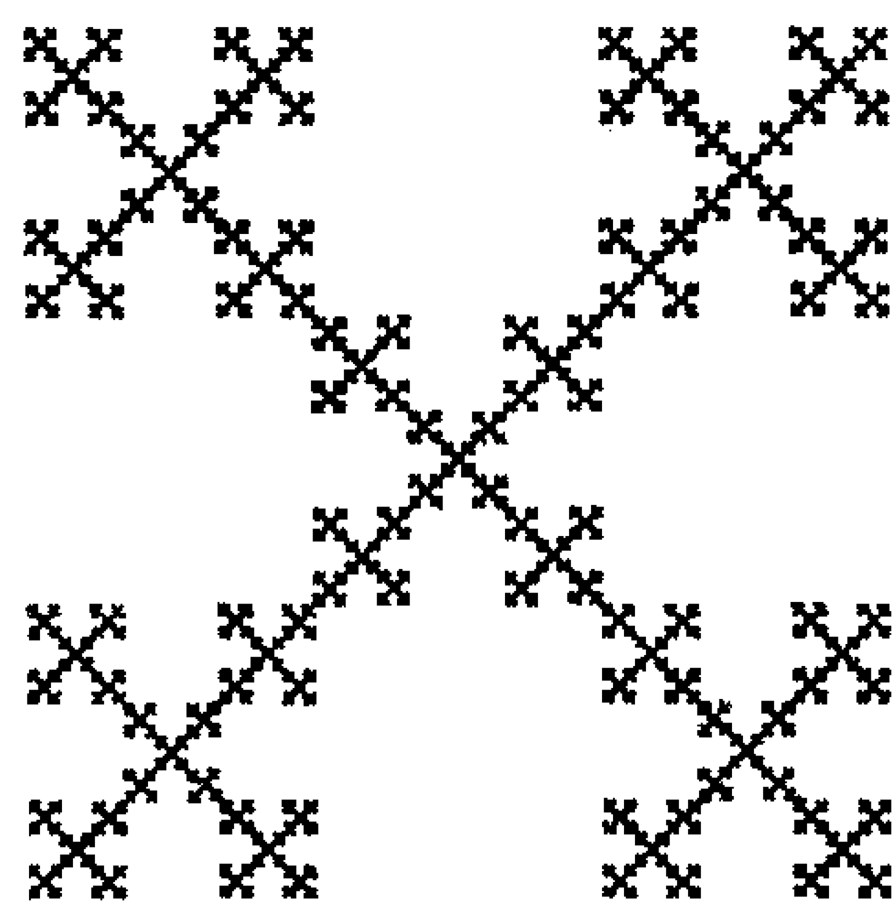


图 14.3.5　例 14.3.22 中的分形

例 14.3.22　图 14.3.5 中的分形显然有一些子集，它们都与整个分形相似．每个角都有分形的复制品，它是整个分形的1/3，在中心部位有第五个复制品，其大小也是整个分形的 1/3．由于这些复制品不牵涉任何旋转，可取矩阵为具有因子 1/3 的数乘矩阵，即

$$\begin{bmatrix}a_i & b_i\\c_i & d_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$1\leqslant i\leqslant 5$．对于每个函数，点$(e_i,\ f_i)^{\mathrm{T}}$是在子集的左下角．左下方的复制品包含了原点，所以是不能被替换的，故我们可以取 $e_1=f_1=0$．把右下方的复制品置于$(2/3,\ 0)^{\mathrm{T}}$．用这种方式继续下去，我们可以得到如表 14.3.1 所示的仿射映射的值的列表.

611

表 14.3.1　例 14.3.22 中的参数值

i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
3	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

■

例 14.3.23　如图 14.3.6 所示，本例比上例更复杂，并涉及旋转．近距离观察可以看出，在右上部有一个$\frac{2}{3}$大小的复制品，在右下部有一个$\frac{1}{3}$大小的复制品，而在左上部有一个旋转过的在$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$中间大小的复制品．前两个映射容易写出：

$$F_1\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$F_2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}.$$

对于第三个仿射映射，我们知

$$F_3\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix},\quad F_3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad F_3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

612

从(0，0)的像，我们可以知道 $e_3=1/3$，$f_3=0$. 用这些值和另外两点的像，我们可以确定

$$a_3=\frac{1}{3},\quad b_3=-\frac{1}{3},\quad c_3=\frac{1}{3} \text{ 和 } d_3=\frac{1}{3}.$$

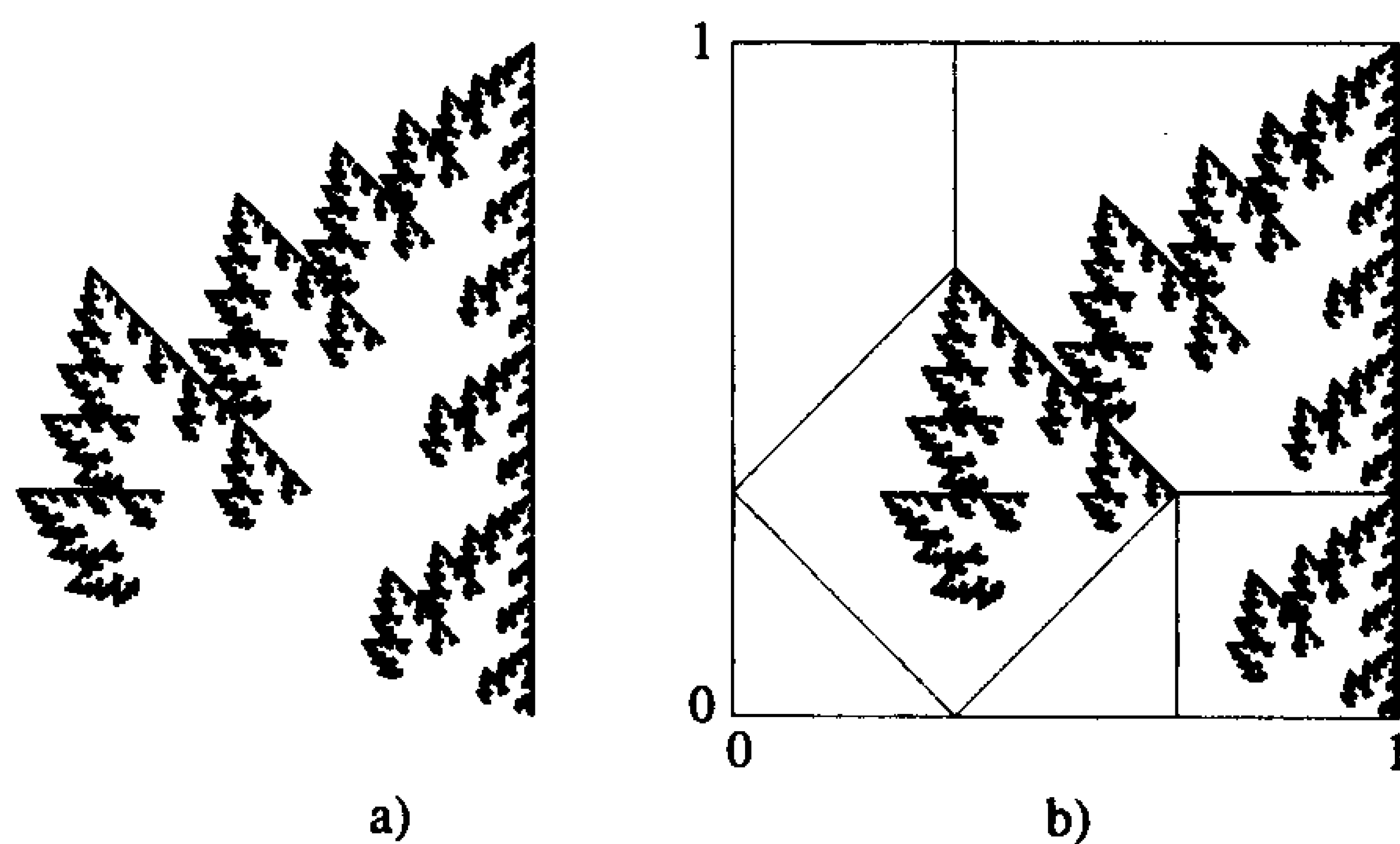


图 14.3.6 例 14.3.23 中的分形

这样，表 14.3.2 给出了这三个函数所有的值.

表 14.3.2 例 14.3.23 中的参数值

i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

■

14.4 理论与证明

盒维数

定理 14.1.6 设 S 为$\mathbb{R}^n$ 中的集合，并使极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{\ln(N'(r,S))}{\ln(1/r)} \text{ 或 }$$
$$\lim_{r\to 0}\frac{\ln(N''(r,S))}{\ln(1/r)}$$

存在且等于 d. 则盒维数$\dim_b(S)$存在且等于 d.

证明 我们仅考虑没有固定网格的盒 $N'(r,\ S)$的情形，而其他情形都是类似的. 对于一个给定的 $r>0$，显然，$N'(r,\ S)\leqslant N(r,\ S)$，因为一个由固定网格的盒组成的覆盖当然也是网格未必固定的盒组成的覆盖. 考虑用边长为 r 的盒组成的 S 的一个覆盖$\{\boldsymbol{B}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{B}_{N'(r,S)}\}$，且没有固定网格. 每个盒 $\boldsymbol{B}_i$ 在每个方向上至多与两个有固定网格的盒相交，于是至多与 2^n 个边长为 r 的有固定网格的盒相交. 因此，$N(r,\ S)\leqslant 2^n N'(r,\ S)$. 取对数，除以 $\ln(1/r)$然后取极限，得

$$N'(r,S)\leqslant N(r,S)\ \leqslant 2^n N'(r,S),$$
$$\frac{\ln(N'(r,S))}{\ln(1/r)}\leqslant\frac{\ln(N(r,S))}{\ln(1/r)}\leqslant\frac{\ln(N'(r,S))\ +n\ln(2)}{\ln(1/r)},$$
$$\begin{aligned} d &= \lim_{r\to 0}\frac{\ln(N'(r,S))}{\ln(1/r)}\\ &\leqslant \lim_{r\to 0}\frac{\ln(N(r,S))}{\ln(1/r)}\\ &\leqslant \lim_{r\to 0}\frac{\ln(N'(r,S))\ +n\ln(2)}{\ln(1/r)} = d. \end{aligned}$$

由于第一项和最后一项相等，所以中间的极限必定等于 d：

$$\dim_b(S)\ =\lim_{r\to 0}\frac{\ln(N(r,S))}{\ln(1/r)} = d.$$

613 定理得证. ■

定理 14.1.7 令 S 为$\mathbb{R}^n$ 中的集合. 假设存在一系列长度 r_j，满足

$$0 = \lim_{j\to\infty} r_j,$$
$$1 = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(r_{j+1})}{\ln(r_j)},$$
$$d = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(N(r_j,S))}{\ln(1/r_j)}$$

(即极限存在且等于 d). 则$\dim_b(S)$存在且等于 d.

证明 我们可以用一固定网格的盒组来讨论，但此处改用另一方法讨论，即选用曾用于定义 $N'(r,\ S)$的任意盒. 对于任意的 $r>0$，存在 j 使得 $r_j\geqslant r>r_{j+1}$. 因为所需小盒多于大盒，

所以

$$N'(r_j,S) \leqslant N'(r,S) \leqslant N'(r_{j+1},S).$$

由 $\ln(1/r_{j+1}) \geqslant \ln(1/r) \geqslant \ln(1/r_j)$，我们得到

$$\frac{\ln(1/r_j)}{\ln(1/r_{j+1})}\frac{N'(r_j,S)}{\ln(1/r_j)} \leqslant \frac{N'(r,S)}{\ln(1/r)} \leqslant \frac{\ln(1/r_{j+1})}{\ln(1/r_j)}\frac{N'(r_{j+1},S)}{\ln(1/r_{j+1})}.$$

从定理的假设，有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln(1/r_j)}{\ln(1/r_{j+1})} = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(1/r_{j+1})}{\ln(1/r_j)} = 1,$$

从而第一项和最后一项的极限都是 d，故得到

$$\lim_{r\to 0}\frac{N'(r,S)}{\ln(1/r)} = d$$

(即盒维数存在且等于 d). ■

定理 14.1.11　令 S 为$\mathbb{R}^n$ 的一个有界子集，且其盒维数小于 n. 那么，S 的 n 维勒贝格测度为零，即 $\lambda(S)=0$.

证明　集合 S 包含在 $N(r)$ 个各边长均为 r 的盒中. 因此，S 的勒贝格测度小于 $N(r)r^n$. 令 $d=\lim\limits_{r\to 0}\frac{\ln(N(r))}{\ln(r^{-1})}<n$ 和 $d_1=(d+n)/2<n$. 则存在一个 $r_0>0$，使得对任意满足 $1<r\leqslant r_0$ 的 r 有

$$\frac{\ln(N(r))}{\ln(r^{-1})} \leqslant d_1,$$

$$\ln(N(r)) \leqslant \ln(r^{-d_1}),$$

$$N(r) \leqslant r^{-d_1},$$

$$\lambda(S) \leqslant N(r)r^n \leqslant r^{n-d_1}.$$

由于 $n-d_1>0$，当 r 趋于零时最后一个不等式的右边趋于零，所以必定有 $\lambda(S)=0$. ■　614

叠函数系

定理 14.3.7　令$\mathcal{F}=\{F_1, \cdots, F_k\}$是$\mathbb{R}^n$ 上的一个压缩 IFS，且每个函数都有一个压缩常数 r_i.

(a)令

$$R = \max_i\left\{\frac{\|F_i(0)\|}{1-r_i}\right\}$$

和$\bar{B}(R)=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|\leqslant R\}$. 那么，球在 IFS 下是正不变的，即

$$F_i(\bar{B}(R)) \subset \bar{B}(R).$$

(b)令 S_0 为任意一个使得$\mathcal{F}(S_0)\subset S_0$ 成立的紧集. 归纳地定义 $S_m=\mathcal{F}(S_{m-1})$，且 $A=\bigcap\limits_{m=0}^{\infty}S_m$. 那么，此叠数系把 A 映满到 A 上(即$\mathcal{F}(A)=A$). 而且，A 是此叠函数系唯一的紧不变集. 更确切地说，如果 A'是任意一个使得 $A'=\mathcal{F}(A')$成立的非空紧集，那么 $A'=A$. 特别地，如果 S_0 为任意一个对所有 $1\leqslant i\leqslant k$ 使得 $F_i(S_0)\subset S_0$ 成立的紧集，那么 $A\subset S_0$.

(c)令 $r=\max\{r_i\}$ 为 IFS 的压缩常数，那么，吸引子 A 的盒维数小于等于 $\ln(k)/\ln(1/r)$：

$$\dim_b(A)\leqslant\frac{\ln(k)}{\ln(1/r)}.$$

如果$\mathcal{F}$是具有一致因子 r 的相似压缩 IFS，且存在$\mathcal{F}$的一个紧正不变集 S_0，同时对所有的 $i\neq j$ 有 $\boldsymbol{F}_i(\operatorname{int}(S_0))\cap\boldsymbol{F}_j(\operatorname{int}(S_0))=\varnothing$，那么吸引子 A 的盒维数为

$$\dim_b(A)=\frac{\ln(k)}{\ln(1/r)}.$$

证明　(a)由 R 的定义可知，$\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{0})\|\leqslant R(1-r_i)$. 对于 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant R$,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x})\|&\leqslant\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{0})\|+\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{0})\|\\&\leqslant r_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{0}\|+\|\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{0})\|\\&\leqslant r_iR+R(1-r_i)\\&=R.\end{aligned}$$

这证明了球$\bar{\boldsymbol{B}}(R)$在所有的 $\boldsymbol{F}_i$ 下是正不变的. ■

引理 14.4.1　令 A 为定理 14.3.7 中定义的集合，那么，叠函数系把 A 映满到 A 上.

证明　取 $\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{A}$. 由于 $A=\bigcap_{m=0}^{\infty}\mathcal{F}(\boldsymbol{S}_m)$，所以存在 $\boldsymbol{x}^m\in\boldsymbol{S}_m$ 和 i_m 使得 $\boldsymbol{F}_{i_m}(\boldsymbol{x}^m)=\boldsymbol{x}^*$. 这样的 i_m 必有无穷多个是相同的，所以可取子列 m_j 使得 $i_{m_j}=i^*$. 由于 $\boldsymbol{S}_{m_j}\subset\boldsymbol{S}_{m_{j0}}\subset\boldsymbol{S}_0$ 是闭的且有界(紧)，所以必有 $\boldsymbol{x}^{m_j}$的子列收敛于一点 $\boldsymbol{x}^\infty\in\boldsymbol{S}_{m_{j0}}$. 令 j_0 趋于无穷即知 $\boldsymbol{x}^\infty\in\boldsymbol{A}$. 由连续性，因为对所有的 j 有 $\boldsymbol{F}_{i^*}(\boldsymbol{x}^{m_j})=\boldsymbol{x}^*$，所以极限 $\boldsymbol{F}_{i^*}(\boldsymbol{x}^\infty)=\boldsymbol{x}^*$. 这说明函数系是满的. ■

令

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{S})=\min\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|:\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}\}$$

615　为如 14.3.1 节中定义的从点 $\boldsymbol{x}$ 到非空闭集的距离. 参见图 14.3.3.

引理 14.4.2　设 $\boldsymbol{F}$ 有压缩常数 $0<r<1$. 那么，对于任意点 $\boldsymbol{x}$,

$$d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S}))\leqslant rd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{S}).$$

特别地，如果 $\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的一个正不变集，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})\subset\boldsymbol{S}$. 那么，对任意点 $\boldsymbol{x}$ 有 $d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{S})\leqslant rd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{S})$.

证明　对任意点对 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，有

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\|\leqslant r\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

于是

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S}))&=\min\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}'\|:\boldsymbol{y}'\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})\}\\&=\min\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\|:\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}\}\\&\leqslant r\min\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|:\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}\}\\&=rd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{S}).\end{aligned}$$

如果 $\boldsymbol{S}$ 是一个正不变集，那么

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{S})&\leqslant d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S}))\\&\leqslant rd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{S}).\end{aligned}$$

■

定理 14.3.7(b)的证明　现在，假设存在一个非空不变集合 $\boldsymbol{A}'\neq\boldsymbol{A}$. 注意到$\boldsymbol{A}'$和 $\boldsymbol{A}$ 在叠函

数系的所有函数下都是正不变的，所以引理 14.4.2 可以应用于这两个集合.

设存在一点 $x \in A'$ 且 $x \notin A$，则 $d(x, A) > 0$. 设 $x^* \in A'$ 且满足

$$d(x^*, A) = \max\{d(x, A): x \in A'\}$$

(即 x^* 是 A' 中离 A 最远的点). 但对于所有 $x \in A'$，有

$$\begin{aligned} d(F_i(x), A) &\leqslant rd(x, A) \\ &\leqslant rd(x^*, A) \\ &< d(x^*, A). \end{aligned}$$

由于上式对所有的 i 都成立，所以 A' 不可能等于 $\mathcal{F}(A')$；这与 A' 是不变的假设相矛盾. 因此，$A' \subset A$.

调换 A 和 A'，得到 $A \subset A'$. 结合起来有 $A = A'$. ■

紧集间的距离

下面的定理释明了采用名词度量（距离）和与豪斯多夫度量 δ 有关的半度量的合理性.

定理 14.3.10 设 A，B 和 C 为 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 中的集合.

(a) 半度量 δ_l 满足下列条件：

(i′) $\delta_l(A, B)$ 不一定等于 $\delta_l(B, A)$.

(ii′) $0 \leqslant \delta_l(A, B) < \infty$.

(iii′) $\delta_l(A, B) = 0$ 当且仅当 $A \subset B$.

(iv′) $\delta_l(A, C) \leqslant \delta_l(A, B) + \delta_l(B, C)$.

(b) 半度量 δ_u 满足与 δ_l 相同的条件，但条件 (iii′) 替换为 $\delta_u(A, B) = 0$ 当且仅当 $B \subset A$.

(c) 豪斯多夫度量 δ 是 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量.

616

证明 (a. i′) 这是显然的.

(ii′) 从定义显然地有，对 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 中任意两个集合 A 和 B，$0 \leqslant d(A, B)$. 因为集合是紧的，故度量是有限的.

(iii′) 如果 $A \subset B$，那么显然有 $\delta_l(A, B) = 0$；如果 $\delta_l(A, B) = 0$，那么对所有的 $r > 0$ 有 $A \subset \bar{\mathcal{N}}_r(B)$，所以 $A \subset \bigcap_{r>0} \bar{\mathcal{N}}_r(B) = B$.

(iv′) 注意到，如果 $A \subset \bar{\mathcal{N}}_{r'}(B)$ 且 $B \subset \bar{\mathcal{N}}_r(C)$，那么 $A \subset \bar{\mathcal{N}}_{r'}(B) \subset \bar{\mathcal{N}}_{r'+r}(C)$. 取最小值，我们得到

$$\begin{aligned} \delta_l(A, C) &= \min\{s \geqslant 0 : A \subset \bar{\mathcal{N}}_s(C)\} \\ &= \min\{r + r' : A \subset \bar{\mathcal{N}}_{r+r'}(C), r \geqslant 0, r' \geqslant 0\} \\ &\leqslant \min\{r + r' : A \subset \bar{\mathcal{N}}_{r'}(B), B \subset \bar{\mathcal{N}}_r(C), r \geqslant 0, r' \geqslant 0\} \\ &\leqslant \min\{r' \geqslant 0 : A \subset \bar{\mathcal{N}}_{r'}(B)\} + \min\{r \geqslant 0 : B \subset \bar{\mathcal{N}}_r(C)\} \\ &= \delta_l(A, B) + \delta_l(B, C). \end{aligned}$$

(b)的证明是类似的.

(c. i) 显然有 $\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=\delta(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$.

(ii)对于一对集合 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $0\leqslant\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})<\infty$, 这可以从(a. ii′)和(b. ii′)得到.

(iii)$\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A})=0$ 是显然的. 反之, 如果 $\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=0$, 那么 $\delta_l(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=\delta_u(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=0$. 由(a. iii′)和(b. iii′), $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 这样, $\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(iv)由(a. iv′)和(b. iv′)直接可以得到 $\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})\leqslant\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})+\delta(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. ■

下面的定理是说空间$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$是完备的, 因此定义在它上面的压缩有不动点.

定理 14.3.12　空间$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$关于豪斯多夫度量 δ 是完备的.

证明　这个定理的证明要用到一些不平凡的构造.

为了证明它是完备的, 需要取由集合所成的一柯西列 $\boldsymbol{A}_k\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. 令 $\boldsymbol{A}_\infty$ 为所有点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的聚点全体, 其中 $\boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{A}_k$. 这样, 对于任意点 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}_\infty$, 都存在收敛于 $\boldsymbol{x}$ 的子列 $\boldsymbol{x}_{k_j}$. 注意到集合列 $\boldsymbol{A}_k$ 是柯西列, 所以对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N_ε 使得对 k, $m\geqslant N_\varepsilon$ 有 $\delta(\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}_m)\leqslant\varepsilon$. 因为 $\boldsymbol{A}_\infty$ 是 $\boldsymbol{A}_k$ 中的点列的聚点之集合, 所以对 $k\geqslant N_\varepsilon$ 有 $\boldsymbol{A}_\infty\subset\overline{\mathcal{N}}_\varepsilon(\boldsymbol{A}_k)$. 因此 $\boldsymbol{A}_\infty$ 是闭的且有界, 所以 $\boldsymbol{A}_\infty\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

下面证明对 $k\geqslant N_\varepsilon$ 有 $\boldsymbol{A}_k\subset\overline{\mathcal{N}}_\varepsilon(\boldsymbol{A}_\infty)$. 固定 $k\geqslant N_\varepsilon$, 取点 $\boldsymbol{x}_k^0\in\boldsymbol{A}_k$. 对于 $m\geqslant N_\varepsilon$, 有 $\boldsymbol{A}_k\subset\overline{\mathcal{N}}_\varepsilon(\boldsymbol{A}_m)$, 所以存在点 $\boldsymbol{x}_m\in\boldsymbol{A}_m$ 满足 $d(\boldsymbol{x}_k^0, \boldsymbol{x}_m)\leqslant\varepsilon$. 事实上, 由于列 $\boldsymbol{A}_m$ 是柯西列, 可取点列 $\boldsymbol{x}_m$, 它具有$\mathbb{R}^n$ 中柯西列所具有的性质. 因此, 它们收敛于$\mathbb{R}^n$ 中的一点 $\boldsymbol{x}_\infty$. 由 $\boldsymbol{A}_\infty$ 的定义知, $\boldsymbol{x}_\infty\in\boldsymbol{A}_\infty$, 因此, $d(\boldsymbol{x}_k^0, \boldsymbol{x}_\infty)=\lim\limits_{m\to\infty}d(\boldsymbol{x}_k^0, \boldsymbol{x}_m)\leqslant\varepsilon$ 且 $d(\boldsymbol{x}_k^0, \boldsymbol{A}_\infty)\leqslant\varepsilon$. 既然上式对任意的 $\boldsymbol{x}_k^0\in\boldsymbol{A}_k$ 都成立, 故有 $\boldsymbol{A}_k\subset\overline{\mathcal{N}}_\varepsilon(\boldsymbol{A}_\infty)$.

综上可知, 对任意的 $k\geqslant N_\varepsilon$, 都有 $\delta(\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}_\infty)\leqslant\varepsilon$ 成立. 这表明集合列 $\boldsymbol{A}_k$ 收敛于$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个集合 $\boldsymbol{A}_\infty$. ■

应用于集合的压缩映射

定理 14.3.13　假设 $\boldsymbol{F}$ 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个压缩映射, 且压缩常数为 $r<1$. 那么, $\boldsymbol{F}$ 诱导出一个有相同压缩常数 r 的$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的压缩.

617

证明　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$中的两个集合. 那么

$$\begin{aligned}\delta_l(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B})) &= \max\{d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B})):\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}\}\\ &\leqslant \max\{rd(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B}):\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}\}\\ &= r\delta_l(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

同样地, 有

$$\delta_u(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}))\leqslant r\delta_u(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

综合起来, 有

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B})) &= \max\{\delta_l(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B})),\delta_u(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}))\}\\ &\leqslant \max\{r\delta_l(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),r\delta_u(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\}\\ &= rd(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

因此，任一压缩诱导出了$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的一个压缩. ■

定理 14.3.14　假设$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_k\}$是$\mathbb{R}^n$上的一压缩 IFS，压缩常数为$r_1, \cdots, r_k$，且$r=\max\{r_i: 1\leqslant i\leqslant k\}<1$. 则$\mathcal{F}$在$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的诱导作用是一个压缩常数为$r$的压缩.

证明　对于半度量δ_l，有

$$\begin{aligned}\delta_l(\mathcal{F}(\boldsymbol{A}),\mathcal{F}(\boldsymbol{B})) &= \delta_l\left(\bigcup_i \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{A}),\ \bigcup_j \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{B})\right)\\ &= \max_i\left\{\delta_l\left(\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{A}),\ \bigcup_j \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{B})\right)\right\}\\ &\leqslant \max_i\{\delta_l(\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{B}))\}\\ &\leqslant \max_i\{r_i\delta_l(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\}\\ &\leqslant rd(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

由类似的讨论可得

$$\delta_u(\mathcal{F}(\boldsymbol{A}),\mathcal{F}(\boldsymbol{B}))\leqslant rd(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

结合起来，我们得到

$$d(\mathcal{F}(\boldsymbol{A}),\mathcal{F}(\boldsymbol{B}))\leqslant rd(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$ ■

定理 14.3.15　假设$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_k\}$是$\mathbb{R}^n$上的一个压缩叠函数系，压缩常数为$0<r<1$. 那么，$\mathcal{F}$在$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上有唯一的不动集$A$且该集为该叠函数系的吸引子.

证明　压缩 IFS 诱导了$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的一个压缩. 空间$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$是完备的，所以从任意集合$\boldsymbol{S}_0$开始，集合序列$\boldsymbol{S}_j=\mathcal{F}(\boldsymbol{S}_{j-1})$收敛于$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$中唯一的不动点(即$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$中在$\mathcal{F}$下是不变的唯一紧集). ■

618

随机作用

定理 14.3.16　令$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_k\}$为由$\mathbb{R}^n$上的压缩映射组成的一个叠函数系，且有不变紧集$\boldsymbol{A}$. 令$r=\max\{r_i: 1\leqslant i\leqslant k\}<1$为压缩常数. 那么，对$\mathbb{R}^n$上的任意一个初始值$\boldsymbol{x}_0$，如果$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{F}_{s_j}(\boldsymbol{x}_{j-1})$是从这组映射里随机选择一个映射而得到的轨道，那么，从$\boldsymbol{x}_j$到$\boldsymbol{A}$的距离至少是以从$\boldsymbol{x}_0$到$\boldsymbol{A}$的初始距离的r^j倍快的速度趋于零的，即$d(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{A})\leqslant r^j d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{A})$.

证明　任取一点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，由引理 14.4.2，对任意的$i$，有

$$d(\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{A}) = rd(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A}).$$

由归纳法，取这些映射的任意一个序列，可得到

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{F}_{s_j}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{s_0}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{A}) &\leqslant rd(\boldsymbol{F}_{s_{j-1}}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_{s_0}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{A})\\ &\vdots\\ &\leqslant r^{j+1}d(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$ ■

定理 14.3.20　设Σ_k^+为具有位移映射σ的k个符号的单边完全位移. 设$\{p_1, \cdots, p_k\}$为一列权重，对所有的$1\leqslant i\leqslant k$有$0<p_i<1$，且$p_1+\cdots+p_k=1$.

(a)那么，存在一个定义在Σ_k^+上的概率测度μ_p，它对σ是不变的且满足：给定$a_0, \cdots,$

$a_n \in \{1, \cdots, k\}$，那么

$$\mu_p(\{s:s_i = a_0\}) = p_{a_0},$$

$$\mu_p(\{s:s_i = a_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}) = \prod_{i=0}^{n} p_{a_i}.$$

(b)存在由符号序列所组成的全测集 $\Sigma^* \subset \Sigma_k^+$，$\mu_p(\Sigma^*) = 1$，使得任意的 $s \in \Sigma^*$ 包含所有的有限串（即对于任意有限串 $a_0 \cdots a_{m-1}$，存在 j 使得对 $0 \leqslant i \leqslant m-1$ 有 $a_i = s_{j+i}$）. 因此，Σ^* 中任一符号序列 s 在映射 σ 下的 ω 极限集是整个 Σ_k^+，即 $\omega(s;\sigma) = \Sigma_k^+$.

证明　(a)定理的陈述定义了圆柱集合上的测度，其中前几个符号是特定的. 由于这些集合在 Σ_k^+ 中既开又闭，测度的性质可以被用来确定任意博雷尔集的测度.

(b)固定一个有限串 $w = a_0 \cdots a_{m-1}$，它的概率为

$$p_w = \prod_{i=0}^{m-1} p_{a_i}.$$

令 $\Sigma(w)$ 为 Σ_k^+ 中的某处含有 w 的符号序列全体，易知 w 不是前 m 个符号的概率是 $1 - p_w$，w 不是前 m 个符号又不是从第 m 个到第 $2m-1$ 个符号的概率是 $(1-p_w)^2$. 继续下去，w 不是前 j 个长为 m 的符号段之一的概率是 $(1-p_w)^j$. 由于这个数趋于零，所以对任意的 i，w 不是段 $s_{mi}, \cdots, s_{m(i+1)-1}$ 之一的概率为零，故 $\Sigma(w)$ 的测度为 1.（还有其他的方法使 w 出现在符号序列中，但这仅仅使得集合增大而测度不会大于 1.）

令

619

$$\Sigma^* = \bigcap_{w} \Sigma(w).$$

由于只有可列个字符，所以

$$\mu_p\left(\bigcup_{w} (\Sigma_k^+ \setminus \Sigma(w))\right) \leqslant \sum_{w} \mu_p(\Sigma_k^+ \setminus \Sigma(w))$$
$$= \sum_{w} 0 = 0$$

和

$$\mu_p(\Sigma^*) = 1 - \mu_p(\Sigma_k^+ \setminus \Sigma^*)$$
$$= 1 - \mu_p\left(\bigcup_{w} \Sigma_k^+ \setminus \Sigma(w)\right)$$
$$= 1.$$

■

练习

14.1　盒维数

14.1.1　设 S 为 $\mathbb{R}$ 中的集合，其定义如下：

$$S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k^2} : k \geqslant 1\right\}.$$

试计算 S 的盒维数.

14.1.2 设 S 为$\mathbb{R}$中的集合，其定义如下：

$$S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2^k} : k \geqslant 1\right\}.$$

试计算 S 的盒维数.

14.1.3 设 $p \geqslant 1$ 为常数，S 为$\mathbb{R}$中的集合，其定义如下：

$$S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k^p} : k \geqslant 1\right\}.$$

试计算 S 的盒维数.

14.1.4 设 $p > 1$ 为常数，S 为$\mathbb{R}$中的集合，其定义如下：

$$S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{p^k} : k \geqslant 1\right\}.$$

试计算 S 的盒维数.

14.1.5 从单位区间中去掉两个且保留 3 个长为 1/5 的小区间，并由归纳法继续这个过程，在每一步都是从上一步的每一区间 J 中去掉两个且保留 3 个长为 J 之长的 1/5 的小区间. 这样所得的集合是一康托尔集，试计算其盒维数.

14.1.6 从单位区间中去掉一个长为 1/4 的小区间，保留两个长各为 1/4 和 1/2 小区间，并由归纳法继续这个过程. 这样所得集合的尺度维数是多少？提示：置 $z = (1/2)^d$ 于方程 $1 = (1/2)^d + (1/4)^d$.

620

14.1.7 设 C 是直线上的三分集，令

$$S = C \times C = \{(x, y) : x, y \in C\}$$

为康托尔集与其自身的叉积，它位于$\mathbb{R}^2$中，试计算 S 的盒维数.

14.2 轨道的维数

14.2.1 一个皮式面包师映射定义为

$$B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x \\ 2y \end{bmatrix} & 0 \leqslant y < \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ 2y - 1 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

在计算关联维数时，对在吸引子中有一致稠密轨道的轨道，有量 $C(3^{-j}) \approx 2^{-j} \cdot 3^{-j}$.（轨道的 2^{-j} 部分在 x 方向进入 3^{-j} 距离内，轨道的 3^{-j} 部分在 y 方向进入 3^{-j} 距离内.）将此式用为等式计算相关维数.

14.2.2 设 F 为例 13.4.12 中引入的用于确定螺旋管 Λ 的映射，该螺旋管的李雅普诺夫维数是多少？

14.2.3 一个皮式面包师映射定义为

$$B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x \\ 2y \end{bmatrix} & 0 \leqslant y < \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ 2y - 1 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

a. 若 $S = [0, 1] \times [0, 1]$，试解释 $\Lambda = \bigcap_{j=0}^{\infty} B^j(S)$ 是三分康托尔集与单位区间的卡式积（$\Lambda = C \times [0, 1]$）的原因.

b. 方形 S 中任意一点的李雅普诺夫指数是多少？

c. 不变集 L 的李雅普诺夫维数是多少？

14.3　叠函数系

14.3.1　(Sierpinski 毯)考虑单位方形 $S_0=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 及向其每个角按 1/3 收缩的 4 个映射 F_i，令 $\mathcal{F}=\{F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4\}$ 为该 IFS.

a. 写出这 4 个函数的表示式.

b. 绘出 S_0 在该 IFS 作用下的前两个像 $S_1=\mathcal{F}(S_0)$，$S_2=\mathcal{F}(S_1)$.

c. 吸引子 $A=\bigcap_{k=0}^{\infty}S_k$ 的盒维数是多少?

14.3.2　考虑由下列$\mathbb{R}^2$ 中 3 个映射组成的叠函数系$\mathcal{F}$:

$$F_1\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0.5\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

$$F_2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0.5\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix},$$

$$F_3\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0.5\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}.$$

621

a. 若 $S=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$，描述像$\mathcal{F}(S)$，$\mathcal{F}^2(S)$，并绘其图.

b. 需要多少个边长为$(0.5)^3$ 的小盒才能覆盖吸引子?

c. 此叠函数系的盒维数是多少?(给出推导过程而不仅仅是写出答案.)

14.3.3　下列函数中哪些是直线上的压缩映射? 若是，则求出使

$$|f(x)-f(y)|\leqslant r|x-y|,\quad x,y\in\mathbb{R}$$

成立的最小的压缩常数.

a. $f(x)=\frac{1}{2}-x$

b. $f(x)=-\frac{1}{3}x+6$

c. $f(x)=\sin(x)$

d. $f(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$

14.3.4　对下列每对集合 A 与 B，集合间的距离 $\delta_l(A,\ B)$，$\delta_u(A,\ B)$，$\delta(A,\ B)$各是多少?

a. 设 A 为单位正方形，B 为单位圆盘，即

$$A=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\},\quad B=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

b. 设 A 为方形$[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$，B 为上述的单位圆盘，即 $A=\{(x,\ y):\ -1\leqslant x,\ y\leqslant 1\}$.

c. 设 $A=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$如上，而 $B=\{(x,\ y):\ x^2+y^2\leqslant 2\}$.

14.3.5　设 X 表示介于 1 与 2 之间的有理数之集，即

$$X=\left\{\frac{p}{q}:1\leqslant\frac{p}{q}\leqslant 2\right\}.$$

设 d 为 X 上继承于实直线的通常距离，即 $d(x,\ y)=|x-y|$ (X 在此距离下是不完备的). 定义函数(牛顿映射)N: $X\to X$ 如下:

$$N(x)=x-\frac{x^2-2}{2x}.$$

a. 验证当 $x\in X$ 时 $N(x)\in X$.

b. 证明 N: $X\to X$ 是压缩映射. 提示: 映射 N 将区间$[1,\ 2]$映射到其自身，且 $|N'(x)|<1$.

c. 证明 N 在 X 中没有不动点. 解释一下出现这类情况的原因.

14.3.6　设 $f(x)=\frac{1}{2}x$，$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)$，$\mathcal{F}=\{f,\ g\}$，试求$\mathcal{F}$在$\mathbb{R}$ 的紧集$\mathcal{K}(\mathbb{R})$上的唯一的不动点.

14.3.7 考虑图 14.4.1 中的分形，什么样的 IFS 以这些集合为其吸引子？提示：每个 IFS 有 3 个函数，其中之一是个旋转.

622

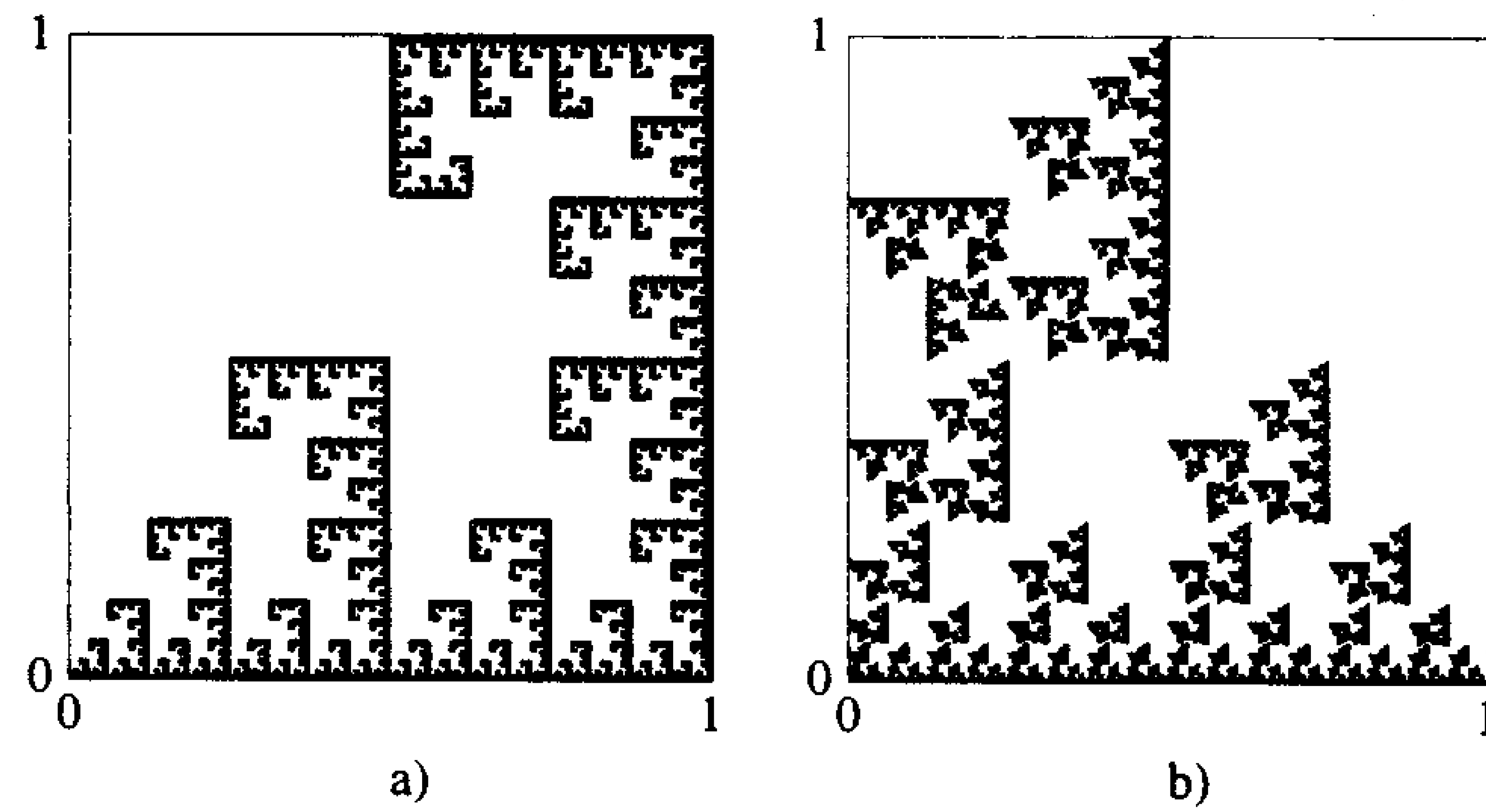


图 14.4.1 练习题 14.3.7 中的分形

623

附录 A　微积分学基础知识和记号

连续性定义见附录 B 的定义 B.0.14.

单变量函数

定义 A.0.1　函数 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续可微的或 C^1 的，若 f 连续且 $f'(x)$ 关于 x 连续. 对 $r\in Z$，$r\geqslant 1$，f 是 r 阶连续可微的或 C^r 的，若 f 连续且 f 的直到 r 阶导数皆关于 x 连续. 若对所有正整数 r，该函数是 C^r 的，则称它是 C^∞ 函数.

定理 A.0.2(中值定理)　设 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^1 函数，那么，任取两点 x_1，$x_2\in\mathbb{R}$，则存在一点 z，介于 x_1 与 x_2 之间，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(z)(x_2-x_1).$$

定理 A.0.3(一阶泰勒展开式)　设 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^2 函数，那么

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{1}{2}f''(t_1)t^2,$$

其中 t_1 介于 0 与 t 之间. 由于对 $|t_1|\leqslant 1$，$|f''(t_1)|$ 有界，

$$|f''(t_1)t^2|\leqslant C|t|^2.$$

我们用

$$f''(t_1)t^2=O(|t|^2)$$

来表示对某常数 C，$|f''(t_1)t^2|\leqslant C|t|^2$.

多变量函数

定义 A.0.4　设有函数 $\boldsymbol{F}$: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$，记其坐标函数为 $F_i(\boldsymbol{x})$，于是

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}F_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ F_n(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}.$$

对整数 $r(r\geqslant 1)$，称 $\boldsymbol{F}$ 是 r 阶连续可微的或是 C^r 的，若 $\boldsymbol{F}$ 连续且 $\boldsymbol{F}$ 的直到 r 阶所有偏导数都存在且连续；即对所有 $j_1+\cdots+j_m=k\leqslant r(j_1\geqslant 0,\ \cdots,\ j_m\geqslant 0)$，

$$\frac{\partial^k F_i}{\partial^{j_1}x_1\partial^{j_2}x_2\cdots\partial^{j_m}x_m}(\boldsymbol{x})$$

存在且连续. 若 $\boldsymbol{F}$ 的各阶偏导数都存在(即对所有 r，$\boldsymbol{F}$ 是 C^r 函数)，则称 $\boldsymbol{F}$ 是 C^∞ 函数.

我们将函数 $\boldsymbol{F}$ 的坐标函数的偏导数矩阵简记为

$$D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p})}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\right),$$

也称之为 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{p}$ 处的导数. 许多人把求导数的点和 F 放在同一行上，如 $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$. 而我们把该点置于下标处，这样，当几个导数相乘时(正如下面的定理中)，行线更易识别. 读者应该细

心区分用下标表示变量的符号和求导的符号.

在接下来的定理中，我们就利用这种记法，用矩阵乘积形式给出函数求导的链式法则.

定理 A.0.5(链式法则) 设 $\boldsymbol{F}$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{G}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 都是 C^1 函数，则复合函数 $\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F}$ 的偏导数矩阵是 $\boldsymbol{G}$ 的偏导数矩阵与 $\boldsymbol{F}$ 的偏导数矩阵的乘积，即

$$D(\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F})_{(\boldsymbol{x})} = D\boldsymbol{G}_{(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))} \cdot D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})}.$$

定理 A.0.6(一阶泰勒展开式) 设 $\boldsymbol{F}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是 C^2 函数，其坐标函数为 F_i. 则

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) + D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|^2).$$

证明思路 固定 i，令 $g(t) = F_i(\boldsymbol{p}_t)$，其中 $\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$. 则 $g(0) = F_i(\boldsymbol{x})$, $g(1) = F_i(\boldsymbol{x})$，且

$$g'(t) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}_t)(x_j - p_j),$$

$$g''(t_{1,i}) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{p}_{t_1})(x_j - p_j)(x_k - p_k),$$

$$F_i(\boldsymbol{x}) = F_i(\boldsymbol{p}) + \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}), \quad \cdots, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{p})\right] \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix} + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|^2),$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix} + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|^2), \text{从而}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) + D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + O(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|^2).$$

因为 $t_{1,i}$ 的值依赖于坐标函数，所以不可能像单变量函数的情形那样，能够找到一个点，使得所有的二阶偏导数在该点计值. 如果 $\boldsymbol{F}$ 仅是 C^1 函数，则可以计算 $D\boldsymbol{F}_{(\boldsymbol{x})}$，但在定理中给出的公式的余项则要求函数是 C^2 的. ■ 626

附录B 分析学和拓扑学的相关术语

在本书里，我们使用了分析学和拓扑学中的一些概念和结论，这些概念通常涵盖在本科课程的实分析和微积分中，我们并未假定读者学过这一课程，所以为便于在这本书里使用，我们选取其中的一部分做简单介绍. 更详细的介绍可参见[**11**]、[**107**]、[**65**]、[**71**]或者[**112**].

定义 B.0.1 存在递增的有理数序列，它收敛于无理数而不是有理数，因此有理数集是不完备的. 而实数集$\mathbb{R}$是完备的. 这个性质可用几种方式来刻画. 对于实数，可定义如下：令x_n是一个递增实序列，且有上界b；即

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < \cdots < b.$$

则有一个实数x_∞使得x_n收敛于x_∞(即$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，使得当$n\geqslant N$时，$|x_n - x_\infty| < \varepsilon$).

下述定理阐述连续情况下实数的完备性，它可由引理4.2.3的证明得到.

定理 B.0.2 设$g(t)$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是单调有界递增函数(即如果$t_1<t_2$，则$g(t_1)\leqslant g(t_2)$). 那么

$$\lim_{t\to\infty} g(t)$$

存在且有限.

定理 B.0.3(介值定理) 设有连续函数f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，并且$f(x_1)<a<f(x_2)$，那么在x_1和x_2之间存在一点x_3，使得$f(x_3)=a$.

我们再给出有界闭区间套之交的性质. 如果

627

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$$

是一个非空有界闭区间的无穷序列，那么

$$\bigcap_{k\geqslant 0}[a_k,b_k]\neq\varnothing.$$

这个性质是下面讨论的紧集套之交的一种特殊情况.

设$\boldsymbol{S}_1$和$\boldsymbol{S}_2$是两个集合，则集合$\boldsymbol{S}_1$和$\boldsymbol{S}_2$的差集是指

$$\boldsymbol{S}_1\setminus\boldsymbol{S}_2=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}_1:\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{S}_2\},$$

其中，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}_1$意味着$\boldsymbol{x}$在$\boldsymbol{S}_1$中而$\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{S}_2$意味着$\boldsymbol{x}$不在$\boldsymbol{S}_2$中.

开集、闭集、内部、边界和邻域等概念是经常遇到的. 所有这些定义在$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n$和度量空间$\boldsymbol{X}$(即在$\boldsymbol{X}$中的点之间定义一种距离)中均有意义. 下面我们在$\mathbb{R}^n$中定义它们.

对于$r>0$和$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，以$r$为半径，$\boldsymbol{x}_0$为中心的开球定义为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0,r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<r\}.$$

如果把上式的小于号改成小于或等于号，那么得到半径为r的闭球

$$\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}_0,r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant r\}.$$

定义 B.0.4 令$\boldsymbol{S}$是$\mathbb{R}^n$中的一个集合，$\boldsymbol{p}$是一点. 于是$\boldsymbol{p}$到$\boldsymbol{S}$的距离是使得

$$r \leqslant \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$$

成立的最大的数 $r \geqslant 0$，这个最大数 r 叫做量 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ 的最大下界(或下确界). 因此，记

$$d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{S}) = \mathrm{glb}\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}\}.$$

如果集合 $\boldsymbol{S}$ 是闭集，那么 $\boldsymbol{S}$ 中有一点实现这个数并，且

$$d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{S}) = \min\{\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}\}.$$

参见图 B.0.1.

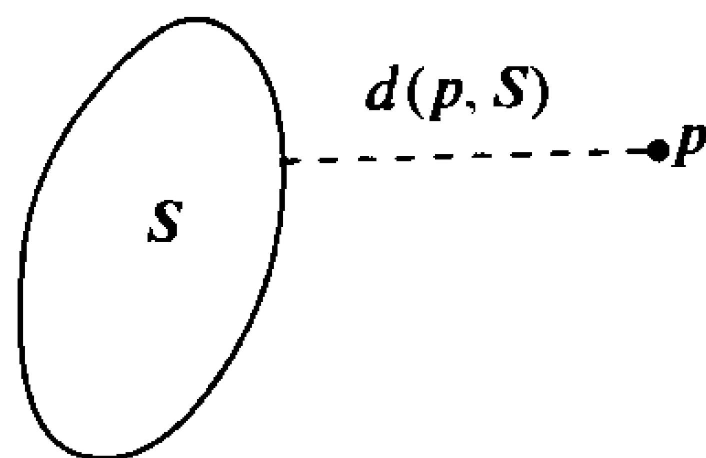


图 B.0.1　点到集合的距离

定义 B.0.5　$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\boldsymbol{U}$ 称为开集，如果对于 $\boldsymbol{U}$ 中的每一点 $\boldsymbol{x}_0$，有一个 $r>0$ 使得的以 r 为半径，$\boldsymbol{x}_0$ 为中心的开球包含在 $\boldsymbol{U}$ 中，即

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0, r) \subset \boldsymbol{U}.$$

另一种说法是，$\boldsymbol{U}$ 中的任何点 $\boldsymbol{x}_0$ 到 $\boldsymbol{U}$ 的补集 $\mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{U}$ 的距离为正，即

$$d(\boldsymbol{x}_0, \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{U}) > 0$$

对于 $\boldsymbol{U}$ 中的所有点 $\boldsymbol{x}_0$ 成立.

628

定义 B.0.6　$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\boldsymbol{C}$ 称为是闭的，如果它的补集 $\mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{U}$ 是开集.

另一种说法是，集合 $\boldsymbol{C}$ 包含满足

$$d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{C}) = 0$$

的所有点 $\boldsymbol{x}_0$，即

$$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x}_0 : d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{C}) = 0\}.$$

也就是说，如果 $\boldsymbol{x}_j$ 是集合 $\boldsymbol{C}$ 中的一个点列，且在空间 $\mathbb{R}^n$ 中收敛于 $\boldsymbol{x}_\infty$，那么 $\boldsymbol{x}_\infty$ 在 C 中.

定义 B.0.7　$\mathbb{R}^n$ 中集合 $\boldsymbol{S}$ 的内部是包含于 $\boldsymbol{S}$ 的最大开集 $\boldsymbol{U}$. 记内部为 $\mathrm{int}(\boldsymbol{S})$. 一个集合的内部是这样一些点的集合，即以这些点为中心可以做一个有完全包含于 $\boldsymbol{S}$ 的小球：

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(\boldsymbol{S}) &= \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} : \text{存在 } r>0, \text{使得 } \boldsymbol{B}(x_0, r) \subset \boldsymbol{S}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} : d(\boldsymbol{x}, \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{S}) > 0\}.\end{aligned}$$

定义 B.0.8　$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\boldsymbol{S}$ 的闭包是包含 $\boldsymbol{S}$ 的最小闭集 $\boldsymbol{C}$. 记闭包为 $\mathrm{cl}(\boldsymbol{S})$. 闭包也可以由

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(\boldsymbol{S}) &= \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}\,(\mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{S}) \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}) = 0\}\end{aligned}$$

给出. 开球 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0, r)$ 的闭包是闭球 $\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}_0, r)$.

定义 B.0.9　$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\boldsymbol{S}$ 的边界是由将内部和外部分离的那些点组成的，记为 $\mathrm{bd}(\boldsymbol{S})$ 或 $\partial(\boldsymbol{S})$. 更确切地说，边界由

$$\begin{aligned}\mathrm{bd}(\boldsymbol{S}) &= \mathrm{cl}(\boldsymbol{S}) \setminus \mathrm{int}\,(\boldsymbol{S}) \\ &= \mathrm{cl}(\boldsymbol{S}) \cap \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{S}) \\ &= \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, r) \cap \boldsymbol{S} \neq \varnothing \text{ 及 } \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{S}) \neq \varnothing, r>0\}\end{aligned}$$

给出. 因此，如果一个集合 $\boldsymbol{C}$ 包含所有的边界点，那么它就是闭的.

一个球的边界是球面，即

$$\mathrm{bd}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0, r)) = \mathrm{bd}(\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}_0, r)) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| = r\}.$$

定义 B.0.10　设 $\boldsymbol{a}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一点，$\boldsymbol{a}$ 的邻域是指其内部包含 $\boldsymbol{a}$ 的任一集合. 特别地，一

个开集是其中任意点的邻域.

定义 B.0.11 $\mathbb{R}^n$ 中的一个集合 S 是有界的，如果存在常数 $C>0$，使得 $S\subset B(0, C)$.

定义 B.0.12 $\mathbb{R}^n$ 中的一个集合 S 是紧的，如果它是闭的且是有界的.（这不是通常的定义，但它是判定$\mathbb{R}^n$ 上的子集是否是紧的常用准则之一.）

定义 B.0.13 $\mathbb{R}$ 上的区间$[a, b]$有连通性质. $\mathbb{R}^n$ 中的集合 S 是连通的，如果对满足 $S\subset U\cup V$(即 S 包含于 U 和 V 的并)和 $S\cap U\cap V=\varnothing$(即 U 和 V 在 S 上无交)任何两个开集 U 和 V，必有(i)$S\subset U$ 且 $S\cap V=\varnothing$，或(ii)$S\subset V$ 且 $S\cap U=\varnothing$.

定义 B.0.14 设 $U\subset\mathbb{R}^m$，称函数 F: $U\to\mathbb{R}^n$ 在 U 中一点 x_0 连续，若点 x_0 到 x 的一个很小的改变引起值 $F(x)$的一个很小的改变. 可以从输出结果的误差 $\varepsilon>0$ 找出待定量 $\delta>0$ 的一个界，它是输入量的最大误差：更精确地说，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时 $\|F(x)-F(x_0)\|<\varepsilon$. 如果函数 F 在集合 U 中所有点都连续，那么称 F 是连续的或 F 在 U 上连续. 对于连续函数 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它的图像没有跳跃或不连续点(即不必抬起笔就能够画出图来).

629

下一个定理把中值定理推广到从$\mathbb{R}^n$ 的连通子集到$\mathbb{R}$ 上的函数.

定理 B.0.15(中值定理) 设 F 是$\mathbb{R}^n$ 上的实连续函数，U 是$\mathbb{R}^n$ 的一个连通子集，x_1，x_2 为 U 中的两点，且 $F(x_1)<a<F(x_2)$，则存在一点 $x_3\in U$ 使得 $F(x_3)=a$.

获得开集和闭集的重要方法之一是利用连续函数. 设函数f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的，考察集合

$$f^{-1}(C)\equiv\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)=C\},$$
$$U=f^{-1}((-\infty,C))\equiv\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)<C\},$$
$$K=f^{-1}((-\infty,C])\equiv\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)\leqslant C\}.$$

则集合$f^{-1}(C)$和 K 是闭集而 U 是开集. U 的闭包包含于 K，但是可能有点使得$f(x)=C$ 而临近的点并不满足$f(x)<C$. U 和 K 的边界均包含于$f^{-1}(C)$. 然而，要成为边界点，其附近必须有其函数值小于 C 的点，又有其函数值大于 C 的点. K 的内部包含 U(即 U 的任何点在 K 的内部). 然而，集合$f^{-1}(C)$上可能有点在 C 的内部. 例如，如果$f(x)=x^3-3x$，那么 -1 在 $f^{-1}((-\infty, 2])$的内部，因为它的临近点的值都小于或等于 2.

更一般地，令f: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是连续的，U 是$\mathbb{R}^n$ 中的开集，C 是$\mathbb{R}^n$ 中的闭集. 则$f^{-1}(U)$是$\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f^{-1}(C)$是$\mathbb{R}^m$ 中的闭集.

如果$\mathbb{R}^m$ 中的集合 S 是紧集且f: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是连续的，那么在 S 中存在 $x_{\min}$和 $x_{\max}$使得对 S 中的所有点 x 有

$$f(x_{\min})\leqslant f(x)\leqslant f(x_{\max}).$$

因此，f 在紧集上取得最大值和最小值. 更一般地，如果$\mathbb{R}^m$ 中的 S 是紧的且f: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是连续的，那么 $f(S)$在$\mathbb{R}^n$ 上是紧的.

紧集的另一个应用与紧集套之交有关. 如果 $S_0\supset S_1\supset\cdots\supset S_k\supset\cdots$是$\mathbb{R}^n$ 中的非空紧子集套，那么

$$\bigcap_{k\geqslant 0}S_k\neq\varnothing.$$

如果这些紧集都是连通的，那么 $\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j$ 也是连通的.

集合 $\boldsymbol{S}$ 称为*完全不连通的*，若对于 $\boldsymbol{S}$ 集合中的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，都有满足 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{V}$ 及 $\boldsymbol{S}\subset \boldsymbol{U}\cup \boldsymbol{V}$ 的两个无交的开集 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$.

$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\boldsymbol{S}$ 称为*无处稠密的*，若集合 $\boldsymbol{S}$ 的闭包没有内部.

$\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\boldsymbol{S}$ 称为*完全的*，如果对于 $\boldsymbol{S}$ 中的每一点 $\boldsymbol{p}$，在 $\boldsymbol{S}$ 中存在点 $\boldsymbol{x}_i\neq \boldsymbol{p}$ 使得当 $i\to\infty$ 时 $\boldsymbol{x}_i$ 收敛于 $\boldsymbol{p}$(即 $\boldsymbol{p}$ 的每个开球 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{p},\delta)$ 都包含 $\boldsymbol{S}$ 中异于 $\boldsymbol{p}$ 的点).

讨论极限集时，我们常用到这样的事实，即 $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有一个极限点. 此结论用到紧性. 令 $C>0$，且设 $\boldsymbol{a}_j$ 是 $\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{0},C)$ 中的点列，则有一个子列 $\boldsymbol{a}_{j_i}$ 和一点 $\boldsymbol{a}^*$ 使得 $\boldsymbol{a}_{j_i}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}^*$ (即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 使得当 $i\geqslant N$ 时，$\|\boldsymbol{a}_{j_i}-\boldsymbol{a}^*\|<\varepsilon$).

这个性质可推广到度量空间. [630]

设有集合 $\boldsymbol{X}$，在 $\boldsymbol{X}$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 有定义而产生一个数 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的函数 d 称为 $\boldsymbol{X}$ 上的一个*度量或距离*，如果对于 $\boldsymbol{X}$ 中所有的点 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$，下面四条性质成立：

(i) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

(ii) $0\leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<\infty$.

(iii) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

(iv) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

集合 $\boldsymbol{X}$，连同度量 d 一起，称为*度量空间*.

设 $\boldsymbol{X}$ 是度量空间，度量为 d. 称 $\boldsymbol{X}$ 的子集 $\boldsymbol{A}$ 是*紧的*，如果 $\boldsymbol{A}$ 中的任何点列 $\{\boldsymbol{x}_j\}$ 都有收敛于 $\boldsymbol{A}$ 中的某点 $\boldsymbol{x}_\infty$ 的子序列 $\{\boldsymbol{x}_{j_i}\}$.

称度量空间 $(\boldsymbol{X},d)$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_j\}$ 是*柯西序列*，如果对任给的 $\varepsilon>0$，都存在 N_ε 使得当 $j,k\geqslant N_\varepsilon$ 时有

$$d(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_k)<\varepsilon.$$

称度量空间 $(\boldsymbol{X},d)$ 是*完备的*，如果 $\boldsymbol{X}$ 中任何柯西序列 $\{\boldsymbol{x}_j\}$ 都收敛于 $\boldsymbol{X}$ 中的某点 $\boldsymbol{x}_\infty$.

流形

*流形*的概念通常在微积分中没有涉及，它是数学中的一般术语，不但包括高维对象，还包括曲线和曲面. 在非专业英语用法中这个词“manifold”意味着许多或有许多出口的管子(如蒸汽机上与汽缸相连的排气管). 因此，专业数学用法强调在其内部有许多不同的运动方向的点的集合.

多重积分内容涉及曲线和曲面. 一条曲线是直线的光滑像，没有角出现，而一个曲面是平面区域的光滑像，没有皱和折角. 曲线通常描述为函数 g 从实直线(或其开区间)到三维空间 $\mathbb{R}^3$ 上的函数的可微像. 因此，曲线可用取值于实直线的参数 t 来给出. 曲面通常表示为平面到实数的图像，其图像置于三维空间. 有些微积分书籍讨论用参变量数定义的曲面，这样就可以用球坐标定义球面(及其大部分).

我们在“稳定流形”和“不稳定流形”名词中用到流形这一术语，这是因为维数依赖不动点、周期轨或其他不变集的稳定性类型. 这些流形局部定义为不动点附近特征空间上的图像. 更详细的处理在[**44**]中给出，也可参见[**87**]. [631]

附录C 矩阵代数

在这个附录里，我们概述矩阵代数中的一些重要概念. 这里介绍的大多数概念会在线性代数初级课程中讲到，有几个概念虽然不会讲到，但也能在这样的课程中介绍有关知识时涉及.

特征值和特征向量

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n \times n$ 阶实矩阵，行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 在大多线性代数书中都有定义，迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$ 是主对角线上所有元素之和：

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的转置记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，它是通过行列互换所得的矩阵：如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $(b_{ij}) = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，那么对于每一对 i 和 j，$b_{ij} = a_{ji}$.

一个 $n \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程是方程

$$0 = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}).$$

特征方程的根叫做特征值. 如果 λ_1，$\cdots$，λ_n 是特征值，可能有重根，那么其行列式等于这些特征值的积，而矩阵的迹等于特征值之和：

$$\det(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

我们还用到有关特征值的另外两个结果. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 λ_1，$\cdots$，λ_n. 那么对于整数 $k > 1$，$\boldsymbol{A}^k$ 的特征值是 λ_1^k，$\cdots$，λ_n^k. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么对于取负值的 k 这个关系也成立. 特别地，$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值是 λ_1^{-1}，$\cdots$，λ_n^{-1}.

如果 $\boldsymbol{B}$ 线性共轭于 $\boldsymbol{A}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

最后，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值也相同.

对角矩阵是只在主对角线上有非零元素的矩阵：

$$\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

633

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可对角化的，如果它线性共轭于一对角矩阵，即

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n).$$

向量 $\{\boldsymbol{w}^1, \cdots, \boldsymbol{w}^k\}$ 称为是线性无关的，如果 $c_1\boldsymbol{w}^1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}^k = \boldsymbol{0}$，那么所有的 $c_j = 0$. 特别地，$\mathbb{R}^n$ 中的 n 个向量的集合 $\{\boldsymbol{w}^1, \cdots, \boldsymbol{w}^n\}$ 是线性无关的当且仅当

$$\det(\boldsymbol{w}^1, \cdots, \boldsymbol{w}^n) \neq 0.$$

如果 $\{\boldsymbol{w}^1, \cdots, \boldsymbol{w}^n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个线性无关的向量，那么 $\mathbb{R}^n$ 中的任何向量 $\boldsymbol{X}$ 可写成诸 $\boldsymbol{w}^j$ 的线性组合，即

$$x = y_1 w^1 + \cdots + y_k w^n.$$

(上式成立是因为能从方程组

$$(w^1,\cdots,w^n)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x$$

中解出 y_1，…，y_n.)基于这个原因，如果$\{w^1, \cdots, w^n\}$是$\mathbb{R}^n$ 中的 n 个线性无关的向量组，那么称它是$\mathbb{R}^n$ 的一个基.

由上面的定义和结论可以断言，如果 λ_1，…，λ_n 是 n 个互异的特征值，相应的特征向量为 v^1，…，v^n，则向量组$\{v^1, \cdots, v^n\}$形成$\mathbb{E}^n$ 的一个基.

广义特征向量

哈密顿-凯莱定理是说，如果

$$p(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

是矩阵 A 的特征多项式，那么

$$0 = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 I.$$

特别地，如果 λ_1，…，λ_q 是 A 的代数重数为 m_1，…，m_q 的不同的特征值，即

$$p(x) = (x - \lambda_1)_1^m \cdots (x - \lambda_q)_q^m,$$

那么

$$S_k = \{v:(A - \lambda_k I)^{m_k} v = 0\}$$

是一 m_k 维的向量子空间. 于是，几何重数，即 S_k的维数，等于代数重数(即特征方程里的重数). S_k 中的向量称为广义特征向量. 因此，即使不存在由特征向量形成的基，总有广义特征向量形成的基.

取重数为 $m_k > 1$ 的实特征值 λ_k. 设 $v^{(r)}$是一个向量，满足

$$(A - \lambda_k I)^r v^{(r)} = 0 \quad 但$$
$$(A - \lambda_k I)^{r-1} v^{(r)} \neq 0,$$

这里 $1 < r \leqslant m_k$. 令

$$v^{(r-j)} = (A - \lambda_k I)^j v^{(r)},$$

634

我们得到

$$(A - \lambda_k I) v^{(r)} = v^{(r-1)},$$
$$(A - \lambda_k I) v^{(r-1)} = v^{(r-2)},$$
$$\vdots$$
$$(A - \lambda_k I) v^{(2)} = v^{(1)},$$
$$(A - \lambda_k I) v^{(1)} = 0,$$

或

$$A v^{(r)} = \lambda_k v^{(r)} + v^{(r-1)},$$
$$A v^{(r-1)} = \lambda_k v^{(r-1)} + v^{(r-2)},$$
$$\vdots$$

$$Av^{(2)} = v^{(2)}\lambda_k v^{(2)} + v^{(1)},$$
$$Av^{(1)} = \lambda_k v^{(1)}.$$

按此部分基，(A 的表达式中)存在下列形式的 $r \times r$ 子块：

$$C_\ell = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

若尔当标准型定理指出这种形式的子块有足够多，相应的特征向量合在一起能够生成整个子空间 S_k. 因此，在重复实特征向量的情况下，矩阵 A 在 S_k 上可以表示为形如 C_ℓ 的子块加上一个对角矩阵.

下面，我们设 $\lambda_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k$ 是有重数 $m_k > 1$ 的复特征值. 如果特征向量的个数小于代数重数，那么有下述形式的若尔当块：

$$D_\ell = \begin{bmatrix} B_k & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_k \end{bmatrix},$$

这里 B_k 是 2×2 子块，其元素为 α_k 和 $\pm\beta_k$.

矩阵范数

我们常常需要了解在线性映射拉伸向量时的最大量，即$\frac{|Av|}{|v|}$. 因为

$$\frac{\| Av \|}{\| v \|} = \left\| A \frac{v}{\| v \|} \right\|,$$

于是得到

$$\max_{v \neq 0} \left\{ \frac{\| Av \|}{\| v \|} \right\} = \max_{\| u \| = 1} \| Au \|.$$

定义矩阵 A 的范数 $\| A \|$ 为这个最大值：

635

$$\| A \| = \max_{\| u \| = 1} \| Au \|.$$

注意 $\| A \| \geq 0$.

我们可以利用特征值求出矩阵 A 的范数，而该特征值与 A 有关. 事实上，正如下一命题所述，范数 $\| A \|$ 是对称矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值的平方根.

命题 C.0.1 令 A 是一个 $n \times n$ 阶矩阵.

(a) 矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 是对称的，因此，它有实特征值且非负.

(b) 如果 λ_1 是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值，那么 A 的范数是 λ_1 的平方根，

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_1}.$$

证明　(a)矩阵 $A^{\top}A$ 是对称的，因此，它有实特征值，且相应的特征向量可取为互相垂直且有单位长度(标准正交的). 如果 λ 是 $A^{\top}A$ 的特征值，相应的特征向量为 v，那么

$$\begin{aligned}0 \leq |Av|^2 &= v^{\top}A^{\top}Av \\ &= v^{\top}\lambda v = \lambda |v|^2,\end{aligned}$$

因此，特征值非负.

(b)对于矩阵 $A^{\top}A$，令 $0 \leq \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_1$ 为特征值，且构成标准正交基的特征向量为 $v^1, \cdots, v^n$. 如果

$$x = y_1 v^1 + \cdots + y_n v^n,$$

且 $|x| = 1$，那么 $|x| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} = 1$，且

$$\begin{aligned}|Ax|^2 &= x^{\top}(A^{\top}A)x \\ &= (y_1 v^1 + \cdots + y_n v^n)^{\top}(y_1\lambda_1 v^1 + \cdots + y_n\lambda_n v^n) \\ &= y_1^2\lambda_1 |v^1| + \cdots + y_n^2\lambda_n |v^n| \\ &= y_1^2\lambda_1 + \cdots + y_n^2\lambda_n.\end{aligned}$$

由于 $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$，上述量当 $y_1 = 1$ 且 $y_j = 0$，$j \geq 2$ 时达到最大值. 因此，A 的范数就是 $A^{\top}A$ 的最大特征值 λ_1 的平方根，即

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_1}.$$

■

通常，我们不一定要知道范数的具体值，只要它存在即可. 利用这一点可以看到映射的线性部分可以确定不动点附近的许多性质.

636

附录D 通有性质

在讨论混沌吸引子时我们曾指出，无论对微分方程组还是叠函数系，假设吸引子对状态空间中的初始值有敏感依赖性是不够的，它必须限制在吸引子上有对初始值的敏感依赖性. 例 7.2.11和例 11.2.11 讨论的吸引子对状态空间中的初始值有敏感依赖性，但限制在吸引子上时情况就不是这样了. 这两个例子都没有所谓的混沌运动. 对例 7.2.11，如果系统中含$\dot{y}$的方程加上小项 $0.01\cos(\tau)$，则吸引子便变为混沌的. 对这种扰动，图 7.5.4 给出了庞加莱映射的示意图. 这种吸引子在一个小扰动之下会发生剧烈变化，所以原系统不是通有的.

通有条件的想法是指任何系统都应该能够用具有所希望性质的新系统来逼近. 在这部分我们讨论几个通有性质. 如果想了解更多的关于这方面的内容，请参阅[**87**]的第 11 章.

通有性质的研究是斯梅尔在 20 世纪 60 年代发起的，参见[**98**]. 它是寻找结构稳定系统(即其动力学本质性态在小扰动之下不会改变太多)的计划的一部分. 人们希望大部分系统是结构稳定的，然而结果并不是这种情况；一般动力学性质的可能性种类大大多于结构稳定的系统. 然而，通有性质仍然告诉我们哪些特征在系统的小扰动之下有可能是不变的. 由于大部分系统对外界干扰是敏感的，认为观察到的系统就是通有的，这似乎是合理的.

在讨论通有性质时，很重要的一点是指明所述函数有多少阶导数只有微小改变. C^1 逼近要求不仅两个函数的值而且它们的一阶导数值都几乎相等，但对它们的二阶导数及更高阶导数则没有任何要求. C^r 逼近则要求两个函数的值以及它们的直到 r 阶偏导数的值都是相近的. 因此在 C^2 意义下，g 在 f 附近要比在 C^1 意义下严格得多. C^1 通有性质是指在 C^1 意义下大多数函数都满足的性质(即任何函数可以被这类函数 C^1 逼近). 类似地，C^r 通有性质是指在 C^r 意义下大多数函数都满足的性质(即任何函数可以被这类函数 C^r 逼近). 因此，证明一个性质是 C^2 通有的要比证明它是 C^1 通有的更为困难. 下面我们讨论的前几个性质已经被证明是 C^1 通有的而不是 C^2 通有的，对 $r\geqslant2$，它们也不是 C^r 通有的.

637

先来讨论几个 C^1 通有性质，它们与混沌吸引子的定义有关. Charles Pugh 证明了所谓的一般稠密性定理：对于由若干系统 ϕ 组成的一个 C^1 通有集，周期轨道和不动点的集合$\mathcal{P}(\phi)$在 ϕ 的任何 ω 极限集中是稠密的. 因此，对通有性质(例如$\mathcal{P}$在任何 ω 极限集中的稠密性)而言，任何系统可以被一具此性质的系统来逼近. 这个定理建立于 Pugh 的 C^1 闭引理：在其 ω 极限集中含有点 $\boldsymbol{p}$ 的任何系统 ϕ 都可以被一个新系统 ψ 来 C^1 逼近，且点 $\boldsymbol{p}$ 是 ψ 的周期点.

C. Bonatti 和 S. Croesier 的最近的一个定理表明：在 C^1 通有系统中，周期轨道在任何吸引子中都是稠密的. 更一般地，周期轨道在任何链回归集中是稠密的. 见[**18**]. 这项工作建立于 S. Hayashi 对 C^1 闭引理的有意义的推广，称之为连接引理. Bonatti 和 Croesier 还证明：任何吸引子(有收缩域)对 C^1 通有来说是拓扑传递的. 因此，对一个含有吸引子 A 的 C^1 通有系统而言，这个系统在 $\boldsymbol{A}$ 上是拓扑传递的，且周期点在 $\boldsymbol{A}$ 中是稠密的. 这意味着，对一个通有系统，

它在本书意义下限制在混沌吸引子上是在 Devaney 定义的意义之下混沌的.

现在我们来讨论一些与混沌吸引子的定义没有直接联系的性质，但却说明了为什么我们举出的某些例子不是通有的. 这些性质本身是 C^r 通有的(其中 $r \geqslant 1$).

由例 7.2.11，非通有性的一个特征是周期轨道 γ 的稳定和不稳定流形重合：

$$\gamma = \{(0, \quad 0, \quad \tau): 0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi\} \text{ 且}$$

$$W^u(\gamma) = W^s(\gamma).$$

对大多数系统而言，不动点与周期轨道的稳定和不稳定流形一定是"横截"相交，而不是像本例那样重合.

为了介绍横截思想，我们首先讨论$\mathbb{R}^n$ 的线性子空间 S_1 和 S_2，它们都包含原点. 考虑两个子空间的和，它是每个子空间中所有可能的向量加起来得到的，即

$$S_1 + S_2 = \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 : \boldsymbol{v}_1 \in S_1, \boldsymbol{v}_2 \in S_2\}.$$

如果 $S_1 + S_2$ 是$\mathbb{R}^n$(即两空间中的向量张成$\mathbb{R}^n$)，则我们称它们在原点是横截的. 在$\mathbb{R}^3$ 空间中，都经过原点的一条直线和一个平面，只要该直线不含于该平面，就是横截的. 两条直线在$\mathbb{R}^3$空间中不可能是横截的，因为它们仅能张成一个平面. 都过原点且不重合的两个平面在$\mathbb{R}^3$中是横截的，既使它们的交是一条直线.

$\mathbb{R}^2$ 中两条参数化曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 是横截的，如果当 $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ 时向量 $\gamma'_1(t_1)$ 和 $\gamma'_2(t_2)$ 不平行.

不动点或周期轨道(或函数叠代的周期轨道)的稳定流形与不稳定流形是希望横截相交的研究对象. 这些流形在任何点附近都可以被函数 $\boldsymbol{G}$ 参数化，其中 $\boldsymbol{G}$ 是从欧氏空间$\mathbb{R}^k$ 中的开集 $\boldsymbol{U}$ 映入空间$\mathbb{R}^n$ 的函数：

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} F_1(t_1, & \cdots, & t_k) \\ & \vdots & \\ F_n(t_1, & \cdots, & t_k) \end{bmatrix}.$$

欲使此参数化是好的，$\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{U}$ 中任何点的偏导数矩阵的秩必须等于参数空间的维数 k. 在本书的许多例子中，$\boldsymbol{G}$ 实际上是这样一个图，其中某些变量是利用其他一些变量给出的，例如： 638

$$\boldsymbol{G}(x_1, \quad \cdots, \quad x_k) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ F_{k+1}(x_1, \quad \cdots, \quad x_k) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \quad \cdots, \quad x_k) \end{bmatrix}.$$

对流形 $\boldsymbol{S}$，其上 $\boldsymbol{p}$ 点的所有切向量构成的集合记为

$$T_p\boldsymbol{S},$$

并且称之为流形在 $\boldsymbol{p}$ 点的切空间. 如果 $\boldsymbol{G}$ 是流形 $\boldsymbol{S}$ 在点 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{p}$ 附近的参数化，则 $\boldsymbol{G}$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 的偏导数矩阵的像就等于 $\boldsymbol{S}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 的切空间；即

$$DG_{(a)}\mathbb{R}^k = \{v = DG_{(a)}w : w \in \mathbb{R}^k\} = T_pS.$$

关于流形和切空间的更多内容参见[**44**].

现在我们可以给出横截性定义.

定义 D.0.1　设 S_1 和 S_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个流形，$p \in S_1 \cap S_2$，我们称 S_1 和 S_2 在 p 处是横截的，若

$$T_pS_1 + T_pS_2 = \mathbb{R}^n.$$

我们称 S_1 和 S_2 是横截的，若 S_1 和 S_2 在 $S_1 \cap S_2$ 中的任一点 p 处都是横截的. 约定，若 S_1 和 S_2 不相交，则它们是横截的.

在下面的定义和定理中，$\mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$是$\mathbb{R}^n$ 上 C^1 向量场的集合，$\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$是$\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 微分同胚的集合，$\mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$中的向量场 F 通过$\dot{x} = F(x)$诱导出$\mathbb{R}^n$(或其他流形)上的一个微分方程系统.

设$\mathcal{F}^1(\mathbb{R}^n)$是$\mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$或 $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}^1(\mathbb{R}^n)$上的 C^1 拓扑是说若$\mathcal{F}^1(\mathbb{R}^n)$中的两元及它们的偏导数在任何点的值是接近的，则这两元就是接近的(因为$\mathbb{R}^n$ 不是紧的，要说明$\mathcal{F}^1(\mathbb{R}^n)$中两元是接近的，需要用连续实值定理来指明在每一点接近的含义，详略).

定义 D.0.2　这个定义有前后两部分，前部分是关于向量场的，后部分是关于微分同胚的.

设 $F(x)$是$\mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$中的向量场(或其他流形上的向量场)，$F(x)$诱导出一微分方程系统. 我们称 F 满足 Kupka-Smale 性质，若它满足下面两条性质：

1. 所有不动点和周期轨道是双曲的，因此不动点的所有特征值有非零实部，且周期轨道的所有特征乘数的绝对值不等于 1.

2. 设 S_1 是任何不动点或周期轨道的不稳定流形，S_2 是任何不动点或周期轨道的稳定流形，那么 S_1 和 S_2 是横截的.

设 $F(x)$是$\mathbb{R}^n$(或其他流形)上的微分同胚. 我们说 F 满足 Kupka-Smale 性质，若它满足下面两条性质：

1. 所有的周期轨道是双曲的，因此周期轨道的所有特征值的绝对值不等于 1.

2. 设 S_1 是任何周期轨道的不稳定流形，S_2 是任何周期轨道的稳定流形，那么 S_1 和 S_2 是横截的.

639　下面的定理表明 Kupka-Smale 性质是通用的.

定理 D.0.3　设$\mathcal{F}^1(\mathbb{R}^n)$是$\mathcal{X}^1(\mathbb{R}^n)$或 $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$，且取 C^1 拓扑，设$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$是满足 Kupka-Smale 性质的向量场全体，那么$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$在$\mathcal{F}^1(\mathbb{R}^n)$上是稠密的.

对任一 $r \geqslant 1$，上述定理对于 C^r 微分同胚或向量场也是正确的. 欲了解更多内容，参见[**87**]或[**98**].

满足一般稠密定理和 Kupka-Smale 性质的通有系统不具有例 7.2.11 和例 11.2.11 所显示的

640　特性，而具有我们直觉上认为一个混沌系统应该具有的更多的动态特征.

参考文献

1. Ackerman, E., L. Gatewood, J. Rosevear, and G. Molnar, "Blood glucose regulation and diabetes", *Concepts and Models of Biomathematics* (F. Heimnmets, ed.), Marcel Dekker, 1969, pp. 131 - 156.
2. Ahmed, A., El-Misiery, and H.N. Agiza, "On controlling chaos in an inflation-unemployment dynamical system", *Chaos Solitons Fractals* **10** (1999), 1567 - 1570.
3. Alekseev, V.M., "Quasirandom dynamical systems, I", *Math. USSR-Sb.* **5** (1968), 73 - 128.
4. Alekseev, V.M., "Quasirandom dynamical systems, II", *Math. USSR-Sb.* **6** (1968), 505 - 560.
5. Alekseev, V.M., "Quasirandom dynamical systems, III", *Math. USSR-Sb.* **7** (1969), 1 - 43.
6. Allen, L.J.S., "Some discrete-time SI, SIS, and SIR epidemic models", *Math. Biosciences* **124** (1994), 83 - 105.
7. Alligood, K., T. Sauer, and J. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1997.
8. Andronov, A.A., L. Pontryagin, "Systèmes grossier", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **14** (1937), 247 - 251.
9. Barnsley, M., *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., New York, 1988.
10. Barrow-Green, J., *Poincaré and the three body problem*, Amer. Math. Soc., Prividence RI, 1997.
11. Bartle, R. and D. Shubert, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
12. Barton, R. and K. Burns, "A simple special case of Sharkovskii's Theorem", *Amer. Math. Monthly* **107** (2000), 932 - 933.
13. Belickii, G. R., "Functional equations and conjugacy of local diffeomorphisms of finite smooth class", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **13** (1972), 56 - 59.
14. Benedicks, M., L. Carleson, "The dynamics of the Hénon map", *Annals of Math.* **133** (1991), 73 - 169.
15. Benedicks, M., L.S. Young, "Sinai–Bowen–Ruelle measures for certain Hénon maps", *Invent. Math.* **112** (1993), 541 - 576.
16. Birkhoff, G. D., *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Providence RI, 1927.
17. Block, L., J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, and L.S. Young, "Periodic points and topological entropy of one dimensional maps", *Lect. Notes in Math.* **819** (1980) Springer–Verlag, (New York–Berlin–Heidelberg), 18 - 34.
18. Bonatti, C. and S. Crovisier, *Recurrence et Genericity*, Preprint 311, Université de Bourgogne, 2003.
19. Brauer, F. and J. Nohel, *Qualitative Theory of Ordinary DIfferential Equations*, Benjamin, Inc., New York and Amsterdam, 1969.
20. Brauer, F., C. Castillo-Chávez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 2001.
21. Braun, M., *Differential Equations and Their Applications*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1973.
22. Braun, M., C. Coleman, D. Drew, *Differential Equation Models*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1978.
23. Burden, L. and J.D. Faires,, *Numerical Analysis*, PWS-Kent Publ. Co., Boston, 1978.
24. Carr, J., *Applications of Center Manifold Theory*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1981.
25. Choi, Y., *One Dimensional Lorenz-like Attractors*, Ph.D. thesis, Northwestern University, Evanston Illinois, 1998.
26. Chow, S.N., J. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1982.
27. Chow, S.N., J. Mallet-Paret, "Integral averaging and bifurcation", *J. Differential Equations* **26** (1977), 112 - 159.

28. Costantino, R.F., R.A. Desharnais, J.M. Cushing, and B. Dennis, "Chaotic dynamics in an insect population", *Science* **275** (1995), 389 - 391.

29. Coullet, P. and C. Tresser, "Itération d'endomorphismes et groupe de renormalisation", *J. de Physique Colloque* **39** (1978), C5 - C25.

30. Day, R., "Irregular growth cycles", *Amer. Economic Review* **72** (1982), 406 - 414.

31. Devaney, R., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison–Wesley Publ. Co., New York & Reading, MA, 1989.

32. Devaney, R., *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison–Wesley Publ. Co., New York & Reading, MA, 1992.

33. Diacu, F. and P. Holmes, *Celestial Encounters*, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1996.

34. Du, B.-S. , *A simple proof of sharkovkii's theorem*, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei Taiwan, 2002.

35. Edgar, G., *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1990.

36. Enns, R. and G. McGuire, *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1997.

37. Feigenbaum, M., "Quantitative universality for a class f non-liner transformations", *J. Statistical Physics* **21** (1978), 25 - 52.

38. Gidea, M. and C. Robinson, "Topologically crossing heteroclinic connnections to invariant tori", *J. Differential Equations* **193** (2003), 49 - 74.

39. Gidea, M. and P. Zgliczyński, *Covering relations for multidimensional dynamical systems*, http://www.im.uj.edu.pl/~zgliczyn, 2002.

40. Gleick, J., *Chaos: Making a New Science*, Penguin Books, New York, London, 1987.

41. Guckenheimer, J., "A strange, strange attractor", *Hopf Bifurcation and Its Applications* (New York–Berlin–Heidelberg) (Marsden and McCracken, eds.), Springer–Verlag, 1976, pp. 368 - 381.

42. Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1983.

43. Guckenheimer, J. and R. Williams, "Structural stability of the Lorenz attractor", *Publ. Math. I.E.H.S.* **50** (1980), 73 - 100.

44. Guillemin, V., and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1974.

45. Gulick, D., *Encounters with chaos*, McGraw Hill, New York, et al., 1992.

46. Hahn, W., *Stability of Motion*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1967.

47. Hale, J., *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, New York–London–Sydney–Toronto, 1969.

48. Hale, J. and H. Koçak, *Dynamics and bifurcations*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1991.

49. Hartman, P., *Ordinary differential equations*, 2nd ed., Birkäuser, Boston, Basel, and Stuttgart, 1982.

50. Hassell, M.P., "Density-dependence in single-species populations", *J. Animal Ecology* **44** (1974), 283 - 296.

51. Hirsch, M. and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York and London, 1974.

52. Hofbauer, J. and K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, New York and Cambridge, 1988.

53. Hopfield, J.J., "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilitites", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **79** (1982), 2554 - 2558.

54. Hurley, M. and C. Martin, "Newton's algorithm and chaotic dynamical systems", *SIAM J. Mathematical Analysis* **15** (1984), 238 - 252.

55. Jordan, D.W. and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations, second edition*, Oxford University Press, Oxford, 1987.

56. Kaplan, D. and L. Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1995.

57. Katok, H. and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge UK and New York, 1995.

58. Kulenović, M., *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton FL, 2002.

59. Lanford, O.E., "A shorter proof of the existence of Feigenbaum fixed point", *Commun. Math. Phys.* **96** (1984), 521 - 538.

60. LaSalle, J. P., and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

61. Laskar, J., "A numerical experiment on the chaotic behavior of the solar system", *Nature* **338** (1989), 237 - 238.

62. Lasota, A., "Ergodic problems in biology", *Soc. Math. France, Astérisque* **50** (1977), 239 - 250.

63. Lasota, A. and J. Yorke, "On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations", *Transactions Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 481 - 488.

64. Lay, S., *Analysis with an Introduction to Proof*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 2001.

65. Lewin, J. and M. Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1993.

66. Li, T. and J. Yorke, "Period three implies chaos", *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 985 - 992.

67. Li, T. and J. Yorke, "Ergodic transformations from an interval into itself", *Transactions of Amer. Math. Soc.* **335** (1978), 183 - 192.

68. Lorenz, E. N., "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmospheric Science* **20** (1963), 130 - 141.

69. Lotka, A.J., *Elements of Phsical Biology*, Williams & Wilkins, Baltimore, 1925.

70. Lynch, S., *Dynamical Systems with Applications using Maple*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

71. Marsden, J. and M. Hoffman, *Elementary classical analysis*, 2nd ed., W. H. Freeman and Co., New York, 1993.

72. Marsden, J. and M. McCracken, *Hopf bifurcation and its applications*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1976.

73. Martelli, M., *Introduction to discrete dynamical systems and chaos*, Wiley–Interscience Publ., New York, 1999.

74. Mather, J. and R. McGehee, "Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time", *Dynamical Systems Theory and Applications, Lecture Notes in Physics* **38** (1975) (J. Moser, ed.), Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg pp. 573 - 587.

75. May, R., *Stability and complexity in model ecosystems*, 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1975.

76. Meyer, K.R. and G.R. Hall, *Introduction to hamiltonian dynamical systems and the n-body problem*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1992.

77. Morales, C.A. and E.R. Pujals, "Singular strange attractors on the boundary of Morse–Smale systems", *Annales Econle Norm. Sup.* **30** (1997), 693 - 717.

78. Moser, J., *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973.

79. Murray, J.D., *Mathematical biology*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1989.

80. Nusse, H. and J. Yorke, *Dynamcis: Numerical exploration*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

81. Ott, E., T. Sauer, and J.A. Yorke, *Coping with Chaos: Analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems*, J. Wiley, New York, 1994.

82. Parker, T.S. and L.O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1989.

83. Patterson, S. and C. Robinson, "Basins of sinks near homoclinic tangencies", *Dynamical Systems and bifurcation theory, Pitman Research Notes in Math.* (M. I. Camacho, M.J. Pacifico and F. Takens, eds.), Johm Wiley & Sons, Inc., New York, 1987, pp. 347 - 376.

84. Percival, I. and D. Richards, *Introduction to Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge–New York–New Rochelle, 1982.

85. Polking, J. and D. Arnold, *Ordinary Differential Equations using Matlab*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 2004.

86. Ricker, W.E., "Stock and recruitment", *J. Fisheries Research Board of Canada* **11** (1954), 559 - 623.

87. Robinson, C., *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 1999.

88. Robinson, C., "Nonsymmetric Lorenz Attractors from a Homoclinic Bifurcation", *SIAM J. Mathematical Analysis* **32** (2000), 119 - 141.

89. Ross, C. and J. Sorensen, "Will the real bifurcation diagram please stand up!", *College Mathematics J.* **31** (2000), 2 - 14.

90. Ruelle, D. and F. Takens, "On the nature of turbulence", *Commun. Math. Phys.* **20** (1971), 167 - 192.
91. Rykken, E., "Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms of $\mathbf{T}^2$", *Rocky Mountain J. of Mathematics* **28** (1998), 1103 - 1124.
92. Saari, D., *Celestial Mechanics*, Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc. for College Board of the Mathematical Sciences, Providence RI, 2004.
93. Saari, D. and J. Urenko, "Newton's method, circle maps, and chaotic motion", *Amer. Math. Monthly* **91** (1984), 3 - 17.
94. Samuelson, P., "Conditions that a root of a polynomial be less than unity in absolute value", *Ann. Math. Stat.* **12** (1941), 360 - 364.
95. Sharkovskii, A.N., "Coexistence of cycles of a contiuous map of a line into itself", *Ukrainian Math. J.* **16** (1964), 61 - 71.
96. Singer, D., "Stable orbits and bifurcation of maps of the interval", *SIAM J. Applied Mathematics* **35** (1978), 260 - 267.
97. Sitnikov, K., "Existence of oscillating motions for the three-body problem", *Dokl. Akad. Nauk. USSR* **133** (1960), 303 - 306.
98. Smale, S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747 - 817.
99. Smith, H., *Monotone Dynamical Systems, American Math. Soc.*, Providence RI, 1995.
100. Snavely, M., "Markov partitions for the two-dimensional torus", *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), 517 - 527.
101. Sparrow, C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1982.
102. Stewart, I., *Does God Play Dice?, The Mathematics of Chaos*, Blackwell, Cambridge MA, 1989.
103. Straffin, P. D., "Periodic orbits of continuous functions", *Math. Mag.* **51** (1978), 99 - 105.
104. Strogatz, S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison–Wesley Publ. Co., Reading MA, 1994.
105. Sussman, J. and J. Wisdom, "Chaotic evolution of the solar system", *Science* **257** (1992), 56 - 62.
106. Taubes, C., *Modeling Differential Equtions in Biology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 2001.
107. Thomson, B., J. Bruckner, A. Bruckner, *Elementary Real Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 2001.
108. H. Thunberg, "Periodicity versus chaos in one-dimensional dynamics", *SIAM Review* **43** (2001), 3 - 30.
109. Y Ueda, "Strange attractors and the origin of chaos", *Nonlinear Science Today* **2** (1992), 1 - 16.
110. Ueda, Y et al., "Computer simulation of nonlinear ordinary differential equations and nonperiodic oscillations", *Trans. IECE Japan* **56-A** (1973), 218 - 225, (English translation) Scripta, pp. 27-34.
111. Volterra, V., *A Mathematical Theory of the Struggle for Life*, Gauthier–Villars, Paris, 1931.
112. Wade, W., *An Introduction of Analysis, Second Edition*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 2000.
113. Waltman, P., *Competition Models in Population Biology*, Soc. for Indust. and Applied Math., Philadelphia, 1983.
114. Williams, A., *Asymptotic Stability of Nonsymmetirc Neural Networks by Sink Symmetrization*, Ph.D. thesis, Northwestern University, Evanston Illinois, 2002.
115. Xia, Z., "Melnikov method and transversl homoclinic points in the restricted three-body problem", *J. Differential Equations* **96** (1992), 170 - 184.
116. Xia, Z., "The existence of noncollision singularities in Newtonian systems", *Annals of Mathematics* **135** (1992), 411 - 468.

索　引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致．

A

B

C

G

H

I

N

O

P

X

Y